

Anwendung der Extremwerttheorie zur Quantifizierung von Marktpreisrisiken – Test der Relevanz anhand vergangener Extrembelastungen von DAX und MSCI Europe

Von Michael Pohl, Berlin

I. Einleitung

Die Quantifizierung von Marktpreisrisiken in Kreditinstituten erfolgt – analog zu den Vorgaben durch Basel II und die nationalen Umsetzungen – weitgehend auf Basis von Value-at-Risk-(VaR-)Modellen. Beim Einsatz entsprechender Modelle zur Berechnung von unter Risiko- wie auch Renditegesichtspunkten besonders entscheidenden Extremereignissen kann jedoch eine falsche Risikoschätzung erfolgen. Ursache hierfür ist, dass die unterstellten Verteilungsannahmen die tatsächliche Verlustverteilung in den Rändern nicht richtig abbilden, oder im Fall historischer Simulationen schlicht die nötige Datenbasis fehlt.

Einen möglichen Lösungsansatz hierfür stellen Verfahren der Extremwerttheorie dar. Sie wurden ursprünglich für die Katastrophenvorhersage (insbesondere für Flut-Prognosen) entwickelt, finden jedoch auch bereits im Bereich der Marktpreisrisikomessung Anwendung.¹ Dies unter anderem auch aufgrund der Tatsache, dass die Bank für Internationalen Zahlungsausgleich (BIZ) die Extremwerttheorie als einziges Verfahren herausstellte, das in der Lage ist, in einer Stress-Test-Umgebung Schadenshöhe und Eintrittswahrscheinlichkeit miteinander zu verknüpfen.² Festzustellen ist aber, dass extremwerttheoretische Anwendungen dennoch in der Praxis für das Tagesgeschäft kaum eingesetzt werden.³

In den letzten Jahren wurde der Einsatz extremwerttheoretischer Modelle für zahlreiche Märkte empirisch untersucht. Im Jahr 2003 haben

¹ Vgl. *Embrechts/Klüppelberg/Mikosch* (2003), S. 3 f.; *Borkovec/Klüppelberg* (2000), S. 220; *Chavez-Demoulin* (2004), S. 42.

² Vgl. *BIZ* (2000), S. 7.

³ Vgl. *Danielsson* (2008), S. 326.

Da Silva und Mendes Untersuchungen für zehn asiatische Aktienmärkte durchgeführt. Sie kamen zum Ergebnis, dass extremwerttheoretische Modellierungen insbesondere für ein Konfidenzniveau von 99,9 % wesentlich bessere VaR-Schätzungen als die Normalverteilung ergaben.⁴ Gençay und Selçuk untersuchten die Güte der Extremwerttheorie 2004 ebenfalls für zehn „Emerging Markets“ – darunter mit Brasilien, Argentinien, Mexiko und der Türkei vier außerhalb Asiens. Bei einem Konfidenzniveau von 99,9 % zeigten sie, dass mittels Extremwerttheorie VaR-Werte ermittelt werden konnten, die – außer für den koreanischen Markt – weniger oft überschritten wurden als die Risikoschätzungen auf Basis der Student-*t*-Verteilung, der Normalverteilung und der historischen Simulation.⁵ Bereits ein Jahr zuvor führten sie zusammen mit Ulugülyağci Untersuchungen für den türkischen Aktienmarkt durch. Dabei zeigten sie, dass die Generalisierte Paretoverteilung, als Verteilungsmaßgabe der Extremwerttheorie, bei einem Konfidenzniveau von 99,9 % gegenüber der historischen Simulation, dem Varianz-Kovarianz-Modell, sowie dem GARCH-Ansatz mit normalverteilten Innovationen überlegen war. Für den GARCH-Ansatz mit student-*t*-verteilten Innovationen war die extremwerttheoretische Ermittlung nur überlegen, wenn bei dieser auf die gesamte Datenhistorie und nicht nur auf die vergangenen 500, 1.000 oder 2.000 Handelstage zurückgegriffen wurde.⁶

Ein von Fernandez im Jahr 2003 durchgeführter Vergleich der Extremwerttheorie mit einem GARCH-Modell mit normalverteilten und student-*t*-verteilten Innovationen kam ebenfalls zum Ergebnis, dass die Extremwerttheorie in der Regel überlegen ist. Dabei wurden der chilenische und der US-amerikanische Aktienmarkt sowie der Kupfer-Spotpreis und der Wechselkurs des Chilenischen Pesos zum US-Dollar berücksichtigt. GARCH-Modelle mit student-*t*-verteilten Innovationen erwiesen sich dabei lediglich bei nahezu gleichen Randverteilungen für positive und negative Renditen als gute Alternativen. Es wurden Konfidenzniveaus von 95 %, 99 % und 99,5 % untersucht.⁷

Im vorliegenden Beitrag wird zunächst die Extremwerttheorie als mögliches Verfahren zur Quantifizierung von Marktpreisrisiken dargestellt. Hierbei wird insbesondere auf die Peaks-over-Threshold-(POT-)Methode als modernes und häufig Anwendung findendes Verfahren der Extrem-

⁴ Vgl. *Da Silva/Mendes* (2003).

⁵ Vgl. *Gençay/Selçuk* (2004).

⁶ Vgl. *Gençay/Selçuk/Ulugülyağci* (2003).

⁷ Vgl. *Fernandez* (2003).

werttheorie eingegangen. Die mathematisch komplexen Zusammenhänge werden durch ein einfaches Beispiel verdeutlicht.

Darauf basierend werden Güte und Einsatzfähigkeit der Extremwerttheorie für den Deutschen Aktienindex (DAX) und als Vergleichsindex für den MSCI Europe dargestellt. Der MSCI Europe wurde dabei als Vergleichsindex gewählt, da er an den untersuchten Stichtagen ebenfalls Extrembelastungen aufweist, gleichzeitig aber nur zu etwa 12 % deutsche Aktien enthält und somit zum DAX weitgehend überschneidungsfrei ist. Für beide Indizes wird anhand der POT-Methode mithilfe einer Maximum-Likelihood-Schätzung das Risikoniveau für Daten mit signifikanten Kursverläufen abgeleitet. Dies erfolgt auf Basis der stetigen Renditen sowie der Residuen eines GARCH-Modells mit student-*t*-verteilten Innovationen. Zum anderen wird aus den tatsächlichen Kursrückgängen deren am Vortag zu erwartende Eintrittswahrscheinlichkeit getestet und mit den Ergebnissen der Normalverteilung, der historischen Simulation sowie eines GARCH-Modells mit normalverteilten und eines mit student-*t*-verteilten Innovationen verglichen.

In der Literatur werden häufig Gütetests angewandt, in denen die Überschreitungen auf Basis von Konfidenzniveaus von maximal 99,9 % für historische Zeitintervalle zur Validierung der Modelle herangezogen werden. Im Gegensatz hierzu werden im vorliegenden Beitrag tatsächliche Belastungsfälle zeitpunkt- und nicht zeitraumbezogen betrachtet. Dadurch entstehen drei neue Einblicke. Zum einen werden durch die teilweise größeren Risikohöhen und damit auch Konfidenzniveaus Unterschiede in den Ergebnissen der einzelnen Modelle deutlicher sichtbar. Zum anderen wird bei einer historischen Betrachtung von Ausreißern (also der Anzahl von Tagen, an denen der VaR überschritten wurde) vernachlässigt, dass die VaR-Messung für Zwecke des Risikomanagements an jedem Handelstag ein möglichst richtiges und somit auch nicht zu hohes Risikopotenzial ausweisen sollte.⁸ Darüber hinaus kann durch den gewählten Ansatz der Einfluss unterschiedlicher Schwellen im Rahmen des POT-Ansatzes untersucht werden. Bei den in der bestehenden Literatur gängigen Zeitreihenuntersuchungen ist dies durch das Setzen einer Schwelle als Quantil der gesamten Datenbasis ausgeschlossen.⁹

⁸ So hat Wagner für den DAX anhand von Beispielrechnungen aufgezeigt, dass GARCH-Modelle teilweise stark auf Renditeausreißer und damit Volatilitätsänderungen reagieren. Vgl. *Wagner* (2005), S. 264. Sich daraus ergebende Fehlschätzungen des Risikos gilt es zu beachten.

⁹ Vgl. exemplarisch zum entsprechenden Vorgehen *McNeil/Frey* (2000).

II. Theoretische Grundlagen der Extremwerttheorie

Während Extremwerte in gängigen Risikomodellen häufig als Ausreißer betrachtet werden, werden in der Extremwerttheorie explizit diese Werte untersucht und stattdessen alle Ausprägungen, die keine Extremwerte darstellen, für die Risikobestimmung vernachlässigt.¹⁰ Grundannahme ist, dass bei Kenntnis der Randverteilung die Analyse über die Datenbasis hinaus erweitert werden kann. So sollen Extremereignisse betrachtet werden können, die in diesem Ausmaß noch nicht – oder zumindest nicht innerhalb der verfügbaren Datenbasis – vorgekommen sind.

Zur Darstellung der Extremwerttheorie werden im Folgenden ihre mathematischen Grundlagen im Allgemeinen sowie die Peaks-over-Threshold-(POT-)Methode – als ein Verfahren der Extremwerttheorie – vorgestellt. Abschließend wird die Parameterschätzung zur Bestimmung des VaR dargestellt.

1. Die Konvergenz der Stichprobenmaxima nach Fisher und Tippet

Für die Randverteilung werden in der klassischen Extremwerttheorie nur die größten Werte oder die Exzedenten einer vorgegebenen Schwelle betrachtet.¹¹ Während in der allgemeinen Statistik der zentrale Grenzwertsatz fundamentalen Charakter mit der Aussage besitzt, dass die Verteilung des arithmetischen Mittels von unabhängig, identisch verteilten Zufallsvariablen mit endlicher Varianz gegen die Normalverteilung konvergiert,¹² nimmt die gleiche Funktion für die Extremwerttheorie der Satz von Fisher und Tippet¹³ wahr. Dieser besagt, dass die normalisierten Maxima einer Folge von Zufallsvariablen, sofern sie in Verteilung gegen einen Grenzwert konvergieren, nur gegen Verteilungen vom Typ Fréchet, Weibull oder Gumbel streben können.¹⁴

Die drei Verteilungen werden unter der sogenannten Generalisierten Extremwertverteilung (GEV) zusammengefasst. Dabei ist die GEV wie folgt definiert:¹⁵

¹⁰ Vgl. hierzu auch *Emmer/Klüppelberg/Trüstedt* (1998).

¹¹ Vgl. *Borkovec/Klüppelberg* (2000), S. 222. Als Exzedent wird dabei ein Wert bezeichnet, der eine vorgegebene Schwelle überschreitet.

¹² Vgl. *Bleymüller/Gehlert/Gülicher* (2008), S. 78.

¹³ Vgl. *Fisher/Tippet* (1928).

¹⁴ Vgl. *Embrechts/Klüppelberg/Mikosch* (2003), S. 121 f.; *Borkovec/Klüppelberg* (2000), S. 223 f.; *Köllezi/Gilli* (2000), S. 7; *Franke/Härdle/Hafner* (2003), S. 318.

$$(1) \quad H_{\xi}(x) = \begin{cases} \exp\left(-(1 + \xi x)^{-1/\xi}\right) & \text{falls } \xi \neq 0 \\ \exp(-\exp(-x)) & \text{falls } \xi = 0 \end{cases}$$

Um festzulegen, welche Werte als Basis für die Bestimmung der Verteilungsparameter herangezogen werden sollen, sind innerhalb der Extremwerttheorie im Wesentlichen zwei Gruppen von Modellen auszumachen. Die ältere der beiden Gruppen sind die *Block-Maxima-Modelle*. Ihre Grundidee liegt darin, die verfügbaren zeitlich aufeinanderfolgenden Ausgangsdaten in Blöcke gleicher Länge aufzuteilen, um aus den Maximalwerten der jeweiligen Blöcke die Parameter der GEV zu schätzen. Probleme ergeben sich dabei vor allem hinsichtlich der Festlegung der Blocklängen. Die zweite, neuere Gruppe auf Basis der *POT-Methode* wird im Folgenden eingehender dargestellt, da auf ihrer Basis auch die empirische Untersuchung durchgeführt wird. Wie noch gezeigt wird, ist jedoch auch sie mit Problemen hinsichtlich der Schwellenbestimmung verbunden.

2. Die Peaks-over-Threshold-(POT-)Methode

Die POT-Methode berücksichtigt zur Verteilungsbestimmung nur die Werte, die innerhalb des gesamten Beobachtungszeitraums eine vorgegebene Schwelle (u) überschreiten. Alle Werte, die diese Schwelle überschreiten, werden als Exzedenten und das Ausmaß der jeweiligen Überschreitung als Exzess bezeichnet. Vereinfachend werden dabei im Folgenden die negativen Renditen in ihrem Betrag betrachtet. Eine Überschreitung der Schwelle bedeutet damit eine stärker negative Rendite.

Zur Verdeutlichung der Grundidee wird im Laufe der Ausführungen auf das Beispiel in Abb. 1 Bezug genommen.

Um eine Grenzwertaussage über den Punktprozess¹⁶ der Überschreitungen treffen zu können, muss die Anzahl der Beobachtungen (n) gegen unendlich streben und gleichzeitig u zunehmend höher gesetzt werden. Sofern die Daten voneinander unabhängig und gleichverteilt sind, ist die Anzahl der Beobachtungen, welche u überschreiten, binominalverteilt mit den Parametern n und $P(X_i > u)$.¹⁷

¹⁵ Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch (2003), S. 152.

¹⁶ Zu den Grundlagen von Punktprozessen vgl. bspw. Cox/Isham (1980).

¹⁷ Vgl. hierzu und im Folgenden Borkovec/Klüppelberg (2000), S. 226.

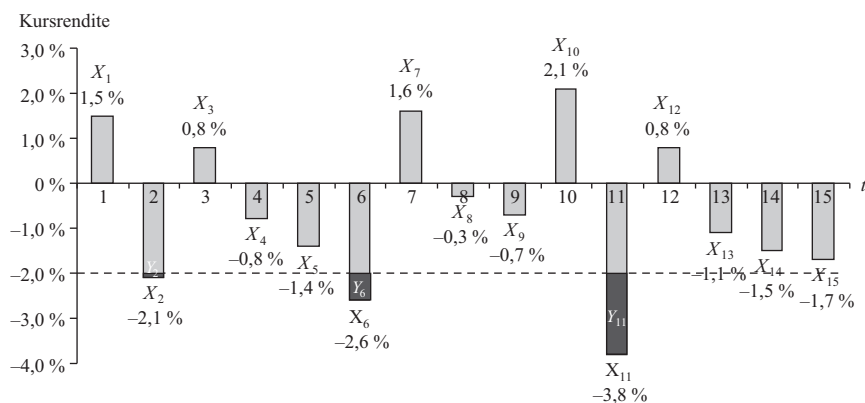


Abbildung 1: Exemplarische Kursrenditen (X_t) im Zeitablauf¹⁸

Wenn

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nP(X_i > u) = \tau \in (0, \infty),$$

mit: n = Anzahl der Beobachtungen
 P = Verteilung der X_i
 u = Schwelle
 τ = Parameter der Poissonverteilung

so konvergiert nach dem *Satz von Poisson*¹⁹ die Verteilung der Anzahl Beobachtungen, welche u überschreiten, gegen eine Poissonverteilung mit dem Parameter τ . Geht man wie im vorgestellten Beispiel von einer zeitlichen Betrachtung aus, so wird mit zunehmendem n die Zeitspanne immer größer und mit zunehmendem u die Anzahl der Exzesse pro Zeitraum (z. B. ein Jahr) immer geringer. Normiert man das gesamte Zeitintervall jedoch auf das Intervall $[0,1]$, so wird ein Exzedent X_i nicht mehr bei i , sondern bei i/n abgetragen. Davon ausgehend, kann man den sogenannten zeitnormierten Punktprozess der Exzedenten bestimmen, welcher die Anzahl der Exzedenten (n_u) in Abhängigkeit der Schwelle u abbildet:²⁰

$$(3) \quad n_u = \text{card}\{i : i = 1, \dots, n, X_i > u\}$$

mit: card = Anzahl auf Basis kardinaler Grundzahlen

¹⁸ Eigene Darstellung in Anlehnung an Embrechts/Klüppelberg/Mikosch (2003), S. 353; Borkovec/Klüppelberg (2000), S. 225; Këllezi/Gilli (2000).

¹⁹ Vgl. Poisson (1837); Bleymüller/Gehlert/Gülicher (2008), S. 55 f.

²⁰ Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch (2003), S. 220 ff.

Wird beispielsweise in Abb. 1 die Schwelle u bei -2% festgelegt, existieren drei Beobachtungen (X_i), die diese Schwelle überschreiten, womit $n_{-2\%}$ folglich gleich drei wäre. Es besteht damit die Möglichkeit, eine dem Grundmodell des VaR entsprechende Bestimmung des Sicherheitsniveaus – respektive eine Verknüpfung von Risikohöhe und Überschreitungswahrscheinlichkeit – vornehmen zu können.

In der Extremwerttheorie interessiert jedoch vornehmlich nicht, wie viele Ereignisse oberhalb der Schwelle auftreten, da die Schwelle lediglich ein Mittel zum Zweck ist, aber keine Zielgröße darstellt. Ziel ist es vielmehr, zu bestimmen, wie hoch die jeweiligen Exzesse und aus diesen abgeleitet der mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit maximal zu erwartende Exzess ist. Der Exzess Y_i als Betrag der Überschreitung der Schwelle berechnet sich aus der Differenz zwischen X_i und u . Die Verteilungsfunktion $F_u(y)$ der Exzesse ist dabei – abgeleitet aus der Verteilungsfunktion F der Zufallsvariable X – wie folgt definiert:²¹

$$(4) \quad F_u(y) = P\{X > u + y \mid X > u\} = 1 - \frac{1 - F(u + y)}{1 - F(u)}, \quad y > 0$$

In *Formel 2* kann der Parameter τ gleich dem negativen natürlichen Logarithmus der GEV gesetzt ($\tau = -\ln H_\xi(y)$) (vgl. *Formel 1*) werden und die Schwelle als lineare Funktion definiert werden. Damit kann gezeigt werden, dass es eine positive Funktion $a(u)$ gibt, sodass für $1 + \xi y > 0$, unter der Voraussetzung, dass die Verteilung für $u \rightarrow \infty$ konvergiert, gilt:²²

$$(5) \quad \lim_{u \rightarrow \infty} P\left\{\frac{X - u}{a(u)} > y \mid X > u\right\} = \begin{cases} (1 + \xi y)^{-1/\xi} & \text{falls } \xi \neq 0 \\ e^{-y} & \text{falls } \xi = 0 \end{cases}$$

Der Gestaltparameter ξ ist somit von der Höhe der Exzesse ($X - u$) in Relation zur Funktion $a(u)$ abhängig und vice versa. Für alle $\xi \in \mathbb{R}$ folgt aus den Theoremen von Balkema und de Haan sowie Pickands,²³ dass die GPV (*Formel 6*) eine gute Approximation der Verteilung der Exzesse darstellt:²⁴

²¹ Vgl. Këllezi/Gilli (2000), S. 8.

²² Für die ausführliche Herleitung vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch (2003), S. 160; Borkovec/Klüppelberg (2000), S. 226, sowie die hierin zitierten Quellen.

²³ Vgl. Balkema/de Haan (1974); Pickands (1975).

²⁴ Vgl. Borkovec/Klüppelberg (2000), S. 226; Këllezi/Gilli (2000), S. 9.

$$(6) \quad G_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi \cdot y}{\beta}\right)^{-1/\xi} & \text{falls } \xi \neq 0, \beta > 0, \quad 0 \leq y \leq (x_{\max} - u) \\ 1 - e^{(-y/\beta)} & \text{falls } \xi = 0 \end{cases}$$

mit: G = Generalisierte Paretoverteilung
 β = Skalenparameter²⁵
 x_{\max} = größte Ausprägung der Zufallsvariable X

Die GPV kann somit als die Limitfunktion der um β skalierten Exzesse betrachtet werden. Für das Beispiel aus Abb. 1 müsste die GPV also etwa den Rückschluss liefern, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 66,7 % ein Exzess von 0,6 % nicht überschritten wird.²⁶

In der Folge kann zur Bestimmung der Verteilungsfunktion der Daten, welche die Schwelle überschreiten, *Formel 4* nach $F(u + y)$, was $F(x)$ entspricht, aufgelöst und die Tailverteilung der Exzesse (\bar{F}_u) durch die GPV ersetzt werden:

$$(7) \quad F(x) = [1 - F(u)] \cdot G_{\xi, \beta}(y) + F(u), \quad y = x - u$$

Eine entscheidende Komponente zur Bestimmung des Verteilungstyps der Tailverteilung und damit der Schwelle sowie der Ableitung des Gestaltparameters liefert der *Verlauf der Exzessmittelwertfunktion* (EMF). Die EMF ist dabei als der Erwartungswert aller Exzesse definiert.²⁷ Für das Beispiel aus Abb. 1 ergäbe sich entsprechend bei einer Schwelle von -2 % ein empirischer Exzessmittelwert von 0,83 % $[(0,1\% + 0,6\% + 1,8\%)/3]$.

Sinnvoll ist es hierbei jedoch, die EMF nur für Schwellen zu berechnen, an welchen ein Beobachtungswert wegfällt. Führt man dies für das vorliegende vereinfachte Beispiel durch, so ergeben sich die in Abb. 2 dargestellten Funktionswerte.

Berechnet man die EMF alternativ über die GPV, so ergibt sich der Erwartungswert über das Integral der Grenzfunktion als:²⁸

²⁵ Der Skalenparameter entspricht in Übertragung auf das Modell der Normalverteilung der Standardabweichung.

²⁶ Im Beispiel aus Abb. 1 wird eine negative Rendite von -2,6 % (X_6) und somit ein Exzess von 0,6 % nur in einem Fall (durch X_{11}) überschritten.

²⁷ Vgl. *Embrechts/Klüppelberg/Mikosch* (2003), S. 161.

²⁸ Vgl. hierzu *Embrechts/Klüppelberg/Mikosch* (2003), S. 162, sowie den zugehörigen Beweis S. 165 f.

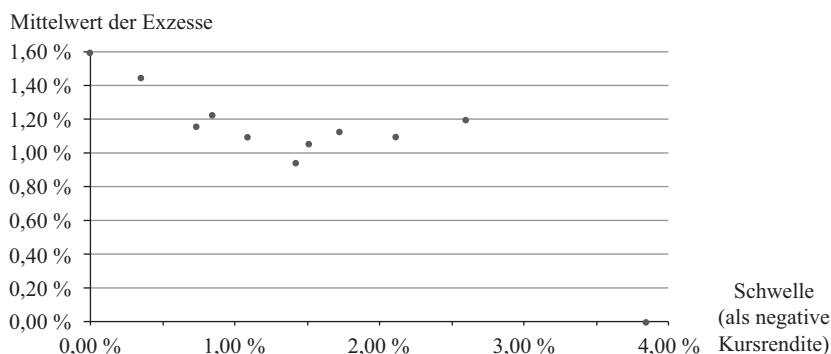


Abbildung 2: Beispiel der EMF anhand exemplarischer stetiger Renditen

$$(8) \quad e(u) = E(X - u | X > u) = \frac{\beta + \xi \cdot u}{1 - \xi} \quad \text{mit } \beta + \xi \cdot u > 0$$

mit: $e(u)$ = Erwartungswert der Exzesse in Abhängigkeit der Schwelle

Wie aus *Formel 8* ersichtlich wird, kann aus der EMF bei bekanntem β folglich der Gestaltparameter abgeleitet werden. Ebenso kann im Fall einer horizontalen EMF darauf geschlossen werden, dass $\text{EW}_{\text{Exzesse}} = \beta$, da ξ in diesem Fall gleich null sein muss. Im Fall einer fallenden EMF muss $\xi < 0$ gelten, da der Zähler des Quotienten dann mit zunehmender Schwelle abnimmt. Entsprechend muss für eine steigende EMF $\xi > 0$ sein.

Da der Gestaltparameter ein Substitutionsfaktor der Verteilungsparameter der Extremwertfunktionen ist,²⁹ kann vom Verlauf der EMF schließlich noch auf die vorliegende Verteilungsfunktion geschlossen werden. Dabei weisen schwach ausgeprägte Extremwertverteilungen einen Funktionsverlauf der EMF auf, der mit zunehmender Schwelle abnimmt, wohingegen die EMF der Exponentialfunktion eine horizontale Linie darstellt. Verteilungen mit ausgeprägten Verteilungsenden, wie die Paretoverteilung, weisen hingegen einen mit steigender Schwelle zunehmenden Exzessmittelwert auf. Im vorliegenden Beispiel würde somit ab einem Schwellenwert von 1,4 eine Extremwertverteilung mit leicht ausgeprägten Enden vorliegen (vgl. Abb. 2).

²⁹ Vgl. *Formel 1*. Zu einer ausführlichen Zuordnung von Verteilungen zu den Verteilungstypen Fréchet, Gumbel und Weibull vgl. bspw. *Embrechts/Klüppelberg/Mikosch* (2003), S. 153 ff.

Hieraus lässt sich des Weiteren auch eine Grundregel zur Bestimmung der Schwelle ableiten. So sollte die EMF rechts der Schwelle möglichst linear wachsen.³⁰ Damit wird sichergestellt, dass die Schwelle so gewählt wurde, dass sie sich im Bereich der Extremfunktion (mit möglichst ausgeprägter Randverteilung) und nicht mehr im Mittelbereich der Verteilung befindet. Ein Problem besteht darin, dass bei Verwendung realer Daten nur selten optimale Funktionsverläufe der EMF vorkommen.

Problemverstärkend kommt noch ein existierender *Trade-off* hinzu. Einerseits muss eine ausreichende Anzahl an Beobachtungen jenseits der Schwelle vorliegen, um ξ und β der GPV zu schätzen. Andererseits darf die Schwelle aber auch nicht zu tief angesetzt werden, um keinen systematischen Fehler zu begehen, der die Grundannahmen der GPV verletzt.³¹ Dies führt dazu, dass häufig mehrere Schwellen gewählt und die resultierenden Risikogrößen gegeneinander abgewogen werden.³²

3. Die Parameterschätzung zur Bestimmung des VaR

Im Rahmen der Parameterschätzung sind der Gestaltparameter, der Skalenparameter und die Verteilungsfunktion der Schwelle zu bestimmen, um im Anschluss daran das Risikopotenzial quantifizieren zu können.

Für die Verteilungsfunktion der Schwelle bietet es sich an, auf die historische Simulation zurückzugreifen. Sie ist somit durch die Zahl der unterhalb der Schwelle liegenden Beobachtungen ($n - n_u$) in Relation zur Gesamtzahl der Beobachtungen (n) zu ermitteln.³³ Dabei wird die historische Simulation jedoch nicht zur Abbildung der Exzessverteilung eingesetzt, da für jenen Bereich zu wenige Ereignisse vorliegen. Hingegen unterstellt man, dass sie im Bereich der Schwelle noch hinreichend genaue Wahrscheinlichkeitsaussagen liefert. Setzt man das Ergebnis der historischen Simulation für die Verteilungsfunktion der Schwelle in *Formel 7* ein, so ergibt sich:

$$(9) \quad \hat{F}(x) = \left(1 - \frac{n - n_u}{n}\right) \cdot G_{\xi, \beta}(y) + \frac{n - n_u}{n}$$

³⁰ Vgl. Borkovec/Klüppelberg (2000), S. 228.

³¹ In der Extremwerttheorie wird auch vom Bias-Varianz-Trade-off gesprochen. Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch (2003), S. 341 ff.

³² Vgl. bspw. das Vorgehen von McNeil (1997); Kellezi/Gilli (2000).

³³ Vgl. McNeil (1999), S. 99.

Für das vorliegende Beispiel resultiert für die Verteilung der Exzesse bei einer Schwelle der negativen Kursrendite von 2 % somit:

$$\hat{F}(x) = \left(1 - \frac{15-3}{15}\right) \cdot G_{\xi, \beta}(y) + \frac{15-3}{15}$$

Schwieriger gestaltet sich die Schätzung des Gestaltparameters und des Skalenparameters. Für ihre Bestimmung besteht die Möglichkeit der semiparametrischen und die der parametrischen Ermittlung.

Die semiparametrischen Ansätze bauen nicht explizit auf der festgelegten Schwelle und damit der POT-Methode auf, sondern verfolgen lediglich das Ziel einer Minimierung der Varianz des Schätzers des Gestaltparameters. Den Skalenparameter errechnen die semiparametrischen Ansätze hierbei als die Varianz der Exzesse:

$$(10) \quad \hat{\beta} = \text{Var}(x - u | x > u)$$

mit: $\hat{\beta}$ = Schätzer des Skalenparameters

Die am häufigsten in der Literatur Anwendung findenden semiparametrischen Ansätze zur Ableitung des Gestaltparameters sind der Hill-Schätzer, der Pickands-Schätzer sowie der Dekkers-Einmahl-de-Haan-Schätzer.³⁴ Welcher semiparametrische Schätzer das beste Ergebnis im Sinne einer minimierten Varianz liefert, hängt, wie zahlreiche Vergleiche zeigen, vom jeweiligen Fall ab.³⁵ Ihnen allen liegt jedoch das Problem der getrennten Ermittlung des Gestalt- und des Skalenparameters zugrunde. Aufgrund der formelbasierten Bestimmung des Gestaltparameters bieten sie aber die Möglichkeit, direkt die Veränderungen des Schätzers durch Schwellenänderungen in einem Diagramm abzutragen. Dieses für den Hill-Schätzer auch als Hill-Plot bezeichnete Diagramm stellt neben der EMF ein zweites Instrument zur Bestimmung der Schwelle dar. Hierbei bestimmt man jenen Punkt als Schwelle, ab welchem sich der Gestaltparameter bei einer weiteren Erhöhung der Schwelle möglichst nicht mehr verändert.³⁶

³⁴ Vgl. *Beirlant/Teugels/Vynckier* (1996); *Embrechts/Klüppelberg/Mikosch* (2003), S. 327 ff.

³⁵ Vgl. *Embrechts/Klüppelberg/Mikosch* (2003), S. 342 ff., sowie die hierin zitierten Quellen. Zu unterschiedlichen Ergebnissen bei Verwendung des Hill-Schätzers mittels alternativer Ansätze anhand deutscher Aktien vgl. *Lux* (2000), S. 646 ff.

³⁶ Vgl. *Gençay/Selçuk/Ulugülyağci* (2001), S. 218 ff. Alternativ zum im vorliegenden Fall gewählten Vorgehen, die Anzahl der Beobachtungen, die die Schwelle

Ein alternatives Vorgehen zu den semiparametrischen Ansätzen beschreiben die parametrischen Ansätze mittels der GPV. Diese werden von einigen Autoren als gleichwertig,³⁷ von anderen jedoch als klar überlegen gegenüber den semiparametrischen Ansätzen – im Speziellen gegenüber dem Hill-Schätzer – bewertet.³⁸ Aus diesem Grund wird in den weiteren Betrachtungen der Fokus auf den parametrischen Schätzern liegen. Die bekanntesten parametrischen Schätzer sind hierbei die Maximum-Likelihood-(ML-)Schätzung sowie die Schätzung mittels der Methode der wahrscheinlichkeitsgewichteten Momente.³⁹ Die Methode der wahrscheinlichkeitsgewichteten Momente wurde von Hosking, Wallis und Wood⁴⁰ maßgebend für die Extremwerttheorie geprägt. Sie liefert gegenüber der ML-Schätzung in einigen empirischen Untersuchungen bessere Ergebnisse. Es muss sich dabei jedoch um kleine Stichproben unter 100 Werten und Gestaltparameter im Bereich von null bis 0,4 handeln.⁴¹ Darüber hinaus besitzt die ML-Methode den Vorteil, einfach an Trends und andere Effekte angepasst werden zu können.⁴²

Ziel der ML-Schätzung ist es, ξ und β so zu bestimmen, dass die Likelihood-Funktion maximiert wird. Aus rechentechnischen Gründen wird dazu meist auf die logarithmierte Likelihood-Funktion zurückgegriffen, welche eine streng monotone Transformation darstellt und folglich die gleichen Extrema aufweist. Da die Ableitungen der Log-Likelihood-Funktion jedoch keine explizite Lösung aufweisen, scheidet eine analytische Berechnung aus. Man ist daher auf eine numerische Lösung – beispielsweise mithilfe eines entsprechenden EDV-Programms – angewiesen.⁴³

Zur Bestimmung der Risikohöhe – im vorliegenden Fall also des maximalen Kursrückgangs – gilt es, abschließend in *Formel 9* die GPV gemäß *Formel 6* einzusetzen und die resultierende Verteilungsfunktion dem ge-

überschreiten, gegen ξ zu plotten, kann dies für den Hill-Plot auch gegen ξ^{-1} erfolgen (vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch (2003), S. 330 ff.).

³⁷ Vgl. bspw. McNeil (1999), S. 95 ff.

³⁸ Vgl. bspw. Franke/Härdle/Hafner (2003), S. 335.

³⁹ Vgl. Bley Müller/Gehlert/Gülicher (2008), S. 98.

⁴⁰ Vgl. Hosking/Wallis/Wood (1985).

⁴¹ Vgl. Hosking/Wallis/Wood (1985), S. 259; Hosking/Wallis (1987). Die Güte der Schätzung wurde hierbei über den Root Mean Square Error bestimmt, wobei anzumerken ist, dass es auf dieser Basis keinen besten Schätzer schlechthin geben kann. Vgl. Toutenburg (2005), S. 111.

⁴² Vgl. Smith (1990), S. 453.

⁴³ Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch (2003), S. 318; Gençay/Selçuk/Ulugüly-
ağci (2001) S. 231 f.

wünschten Konfidenzniveau (q) gleichzusetzen. Löst man die sich ergebende Gleichung mittels Inversion nach der Risikohöhe x_q auf, so ergibt sich:⁴⁴

$$(11) \quad \hat{x}_q = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{n}{n_u} (1 - q) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) = \text{VaR}_q$$

Unter der Annahme, die Zufallsvariable X bestünde aus Kursrenditen, entspricht hierbei die Ausprägung x_q dem VaR_q als relative Kursänderung.

III. Empirische Untersuchung der Güte und Einsatzfähigkeit der POT-Methode

1. Datengrundlage und Untersuchungszeitpunkte

Zum Test der Güte des Einsatzes der vorgestellten extremwerttheoretischen VaR-Ermittlung wird die POT-Methode auf den DAX und den MSCI Europe retrospektiv angewandt. Als exemplarische Extrembelastungstage der jüngeren Vergangenheit werden dabei der 11.9.01 (Anschlag auf das World Trade Center), der 21.1.08 (größter relativer Wertrückgang des DAX von Beginn der aktuellen Finanzmarktkrise bis zum 30.9.09) und der 16.10.08 (höchste implizite Standardabweichung gemäß VDAX⁴⁵) herangezogen. Damit sind zwei Handelstage während der Subprime-Krise enthalten – wobei der 16.10.08 einen Zeitpunkt höchster Risikoaversion abbildet – und demgegenüber mit dem 11.9.01 ein Kursrückgang, der nicht Teil einer sich sukzessive aufbauenden Krise war, sondern plötzlich eingetreten ist.

Die den Berechnungen zugrunde gelegten Indexstände sind jeweils die Endstände eines jeden Handelstages gemäß Thomson Financial. Für den DAX liegt hierbei eine Datenhistorie ab dem 1.1.1965 und für den MSCI Europe ab dem 1.1.1980 vor.⁴⁶ Als Risikofaktor der VaR-Ermittlung werden die logarithmierten Renditen definiert, da diese gegenüber den dis-

⁴⁴ Vgl. Borkovec/Klüppelberg (2000), S. 228. Der Value at Risk wird im Folgenden, da er per Definition als Verlustgröße zu verstehen ist, ohne negatives Vorzeichen notiert.

⁴⁵ Zum VDAX als Maß der impliziten Volatilität, welcher über Eurex-Optionen ermittelt wird, vgl. bspw. Deutsche Börse (2007).

⁴⁶ Für den 1.1.1970 bis zum 1.1.1980 existieren für den MSCI Europe nur monatliche Werte, welche für die vorliegende Betrachtung nicht genutzt werden können.

kreten Renditen durch die gegebene Symmetrie⁴⁷ bereits definitorisch eher der Normalverteilungsannahme entsprechen.

Problematisch bleibt jedoch, dass die Ermittlung des VaR mittels vorgestelltem POT-Ansatz grundsätzlich auf unabhängige und unkorrelierte Beobachtungen beschränkt ist. Da dies für Kursreihen – so auch im vorliegenden Fall – nicht gegeben ist, werden in der Literatur insbesondere zwei mögliche Lösungen vorgeschlagen. Einerseits kann der sogenannte extreme Index eingeführt werden, womit sich der *unconditional VaR* ergibt. Durch den extremen Index werden explizit Volatilitätscluster berücksichtigt. Seine Ermittlung unterliegt jedoch Schätzungenauigkeiten und ist in hohem Maße von der gewählten Schwelle abhängig.⁴⁸ Dabei liegt der *unconditional VaR* für hohe Konfidenzniveaus regelmäßig über dem unkorrigierten Ergebnis.⁴⁹ Andererseits kann der Ansatz des sogenannten *conditional* oder *dynamic VaR* gewählt werden. Dabei wird an die Renditezeitreihe ein GARCH-Modell angepasst und die geschätzten standardisierten Residuen werden als Basis der Parameterschätzung der Extremwerttheorie herangezogen.⁵⁰ Für sie ist die Forderung nach Unabhängigkeit und Unkorreliertheit wesentlich besser gegeben. Als Vergleich zum Basisansatz wird daher im Folgenden der auf Grundlage der standardisierten Residuen eines GARCH(1,1)-Modells mit student-*t*-verteilten Innovationen ermittelte VaR ausgewiesen.

Die Bestimmung des VaR erfolgt jeweils auf Basis der gesamten historischen Datenbasis und auf Basis einer Historie von 1.000 Handelstagen. Durch die Verwendung der verkürzten Historie kann auch die Güte der Risikoschätzung bei beschränkt verfügbaren historischen Daten überprüft werden. Die Verkürzung der Historie erfolgte dabei auf 1.000 Handelstage, da dies – gemäß allgemeiner Meinung –⁵¹ die Untergrenze für extremwerttheoretische Ansätze darstellen sollte.

⁴⁷ Logarithmierte Renditen können im Bereich von minus unendlich bis plus unendlich liegen, wohingegen diskrete Renditen von unter minus 100 % für Aktien per se ausgeschlossen sind.

⁴⁸ Hinsichtlich Anwendung und kritischer Würdigung vgl. Bordin/Klüppelberg (2008), S. 681 ff.; Borkovec/Klüppelberg (2000), S. 231 ff.

⁴⁹ Vgl. bspw. Da Silva/Mendes (2003), S. 36; Borkovec/Klüppelberg (2000), S. 240 f.

⁵⁰ Vgl. Bordin/Klüppelberg (2008), S. 681 ff.; McNeil/Frey (2000), S. 277 ff.

⁵¹ Vgl. bspw. Danielsson/Morimoto (2000), S. 40, und die darin zitierten Quellen.

2. Ermittlung des VaR zu den Untersuchungszeitpunkten mittels der POT-Methode

Zur Ermittlung des VaR mittels der POT-Methode ist in einem ersten Schritt die Schwelle festzulegen, auf deren Basis die Auswahl der Werte erfolgt, welche zur Funktionsbestimmung herangezogen werden. Wie dargelegt, kann hierbei auf die EMF und den Hill-Plot zurückgegriffen werden. Nimmt man zur Schwellenbestimmung die EMF zur Hilfe, so sollte diese rechts der Schwelle möglichst wachsen. Im Fall des Hill-Plots ist die Schwelle so zu wählen, dass bei einer Erhöhung der Schwelle nur noch geringe Veränderungen des Gestaltparameters erfolgen. Eine zusammenfassende Darstellung der auf Basis der Anhänge 1 bis 6 ermittelten Mindestschwellen für den DAX gibt Tabelle 1. Für den MSCI Europe ist die analog ermittelte Tabelle in Anhang 7 wiedergegeben.

Tabelle 1

Mindestschwellen gemäß EMF und Hill-Plot für den DAX

Datum	Mindestschwelle					
	11.9.01		21.1.08		16.10.08	
Datenhistorie	1.000	9.177	1.000	10.792	1.000	10.982
EMF	-2,25 %	-0,75 %	⁻⁵²	-0,5 %	-1,5 %	-0,65 %
Hill-Plot	-1,5 %	-1,0 %	-1,75 %	-1,5 %	-1,5 %	-1,25 %

Untersucht man die Daten eingehend, fällt für beide Indizes auf, dass bei einer größeren Datengesamtheit bereits ab Schwellen, die dichter bei 0 % liegen, ein stabiler Gestaltparameter geschätzt werden kann. Darüber hinaus ist die Mindestschwelle im Zeitablauf keineswegs konstant – ein Umstand, der bei empirischen Zeitreihenuntersuchungen durch das Setzen einer festen Schwelle für die gesamte Zeitreihe meist vernachlässigt wird.

In einem zweiten Schritt sind der Gestalt- und der Skalenparameter in Abhängigkeit von der gewählten Schwelle zu schätzen, um darauf aufbauend den VaR zu ermitteln. Dies erfolgte im vorliegenden Fall mithilfe

⁵² Aufgrund der fallenden EMF muss festgestellt werden, dass es sich um eine Verteilung mit wenig ausgeprägten Verteilungsenden handelt (vgl. Anhang 2). Eine Schwellenbestimmung auf Basis der EMF scheidet hier somit aus.

der Funktion *gpd* aus dem Softwarepaket EVIM für MATLAB®.⁵³ Hierbei wurde, ausgehend von den ermittelten Mindestschwellen, die Schwelle in ihrem Betrag sukzessive erhöht, um die Stabilität des geschätzten VaR bei alternativen Schwellenwerten zu untersuchen. In Tabelle 2 sind für den DAX die anhand der alternativen Schwellen geschätzten Gestalt- und Skalenparameter dargestellt und der für ein Konfidenzniveau von 99% sowie 99,9% resultierende VaR ermittelt.

Darüber hinaus wurde die auf Basis der jeweiligen Verteilung geschätzte Wahrscheinlichkeit (q_{inv}), dass der tatsächlich eingetretene Indexrückgang nicht überschritten würde, ermittelt.⁵⁴ Es handelt sich somit um ein rückgerechnetes Konfidenzniveau. Aus Veranschaulichungsgründen wurde des Weiteren abgeleitet, innerhalb welcher Zeitspanne in Jahren⁵⁵ ein entsprechendes Ereignis im Erwartungswert einmal eintreten oder überschritten würde (d_J). Für den MSCI Europe sind die entsprechend ermittelten $VaR_{99,9\%}$ und d_J in Anhang 8 dargestellt.

Wie deutlich wird, schwanken die ermittelten Werte abhängig von der gewählten Schwelle sowie der zugrunde liegenden Datenhistorie teils markant. Den unterschiedlichen Risikoausweis betreffend wird hierbei sichtbar, dass sich insbesondere für hohe Konfidenzniveaus erhebliche Unterschiede ergeben. Für den Fall der Datenhistorie von 1.000 Beobachtungen am 11.9.01 kann hinsichtlich der massiven Abweichungen der Ergebnisse bei den Schwellen von -1,5% und -2,0% für den DAX noch vorgebracht werden, dass die Schwellenwerte auch nicht durch den Verlauf der EMF gedeckt sind (vgl. Tabelle 1). Hingegen muss für dasselbe Datum im Fall der gesamten Datenhistorie konstatiert werden, dass ein erheblicher Unterschied besteht, ob die Risikomessung zum Ergebnis kommt, dass ein Verlust von 8,8% innerhalb eines Tages nur alle 27,87 Jahre oder alle 11,75 Jahre einmal eintritt.

Wie bei der Schwellenbestimmung über den Verlauf der EMF mit der Datenhistorie von 1.000 Handelstagen für den 21.1.08 bei beiden Indizes bereits festgestellt wurde, kommt die POT-Methode hier zum Ergebnis, dass die Verteilung der stetigen Indexveränderungen des DAX wenig ausgeprägte Verteilungsenden aufweist. Entsprechend wird einem Kursrückgang von -7,4% oder mehr für den DAX und -6,1% oder mehr für

⁵³ Vgl. *Gençay/Selçuk/Ulugülyağci* (2001), S. 231 f.

⁵⁴ Für den 11.9.01 lag der Indexrückgang des DAX bei -8,8%, für den 21.1.08 bei -7,4% und für den 16.10.08 bei -5,0%.

⁵⁵ Unterstellt wurden hierbei 250 Handelstage pro Jahr.

Tabelle 2

Ermittlung des VaR über geschätzte Gestalt- und Skalenparameter unterschiedlicher Schwellen

Datum	<i>n</i>	<i>u</i>	<i>n_u</i>	$\hat{\beta}$	$\hat{\xi}$	VaR _{99 %}	VaR _{99,9 %}	<i>q_{inv}</i>	<i>d_J</i>
11.9.01	1.000	–1,50 %	157	0,0102	0,0163	4,4 %	6,9 %	0,99981970	22,18
		–2,00 %	102	0,0085	0,1163	4,3 %	7,2 %	0,99964379	11,23
		–2,25 %	80	0,0075	0,2112	4,2 %	7,7 %	0,99943421	7,07
		–2,50 %	59	0,0080	0,2012	4,2 %	7,6 %	0,99947378	7,60
		–3,00 %	35	0,0087	0,1894	4,2 %	7,4 %	0,99953065	8,52
	9.177	–1,00 %	1.199	0,0061	0,1688	3,0 %	5,6 %	0,99985647	27,87
		–1,50 %	580	0,0061	0,2281	2,9 %	5,7 %	0,99980322	20,33
		–2,00 %	272	0,0073	0,2364	2,9 %	5,8 %	0,99978447	18,56
		–2,50 %	153	0,0059	0,4538	2,8 %	5,9 %	0,99965949	11,75
		–3,00 %	76	0,0080	0,4569	2,9 %	5,8 %	0,99966207	11,84
21.1.08	1.000	–1,75 %	41	0,0062	–0,2093	2,5 %	3,4 %	1,0	–
		–2,00 %	25	0,0071	–0,3590	2,6 %	3,4 %	1,0	–
		–2,50 %	10	0,0126	–1,2367	2,5 %	3,5 %	1,0	–
		–3,00 %	3	0,0117	–2,2595	⁵⁶	3,5 %	1,0	–
	10.792	–1,00 %	1.519	0,0067	0,1770	3,3 %	6,3 %	0,99947544	7,63
		–1,50 %	778	0,0069	0,2306	3,2 %	6,5 %	0,99935935	6,24
		–2,00 %	391	0,0087	0,1881	3,3 %	6,5 %	0,99940709	6,74
		–2,50 %	234	0,0082	0,2929	3,2 %	6,6 %	0,99931446	5,83
		–3,00 %	129	0,0117	0,1541	3,2 %	6,5 %	0,99938454	6,50
	1.000	–1,50 %	78	0,0064	0,3488	3,4 %	8,1 %	0,99634240	1,09
		–2,00 %	39	0,0068	0,4951	3,3 %	9,1 %	0,99624086	1,06
		–2,50 %	19	0,0120	0,3428	3,4 %	8,6 %	0,99605556	1,01
		–3,00 %	11	0,0802	–1,8087	3,7 %	7,4 %	0,99210439	0,51
16.10.08	10.982	–1,00 %	1.570	0,0068	0,1870	3,4 %	6,6 %	0,99729528	1,48
		–1,50 %	812	0,0070	0,2474	3,3 %	6,9 %	0,99714562	1,40
		–2,00 %	412	0,0088	0,2045	3,3 %	6,7 %	0,99717591	1,41
		–2,50 %	248	0,0084	0,3098	3,3 %	6,9 %	0,99725951	1,45
		–3,00 %	138	0,0130	0,1144	3,3 %	6,8 %	0,99695387	1,31

⁵⁶ Aufgrund des negativen Gestaltparameters in Verbindung mit der geringen Exzedentenanzahl resultiert ein negativer VaR (–4,35 %), der als Ergebnis angesichts der Ausgangsdaten als nicht sinnvoll auszuschließen ist.

den MSCI Europe eine Eintrittswahrscheinlichkeit von null zugeordnet.⁵⁷ d_J ist entsprechend nicht ermittelbar und strebt gegen unendlich.

Insgesamt ist festzustellen, dass die Schwellenbestimmung weniger ein Problem für Konfidenzniveaus von 99 % als für extrem hohe Konfidenzniveaus darstellt. So wird in Tabelle 2 für das Konfidenzniveau von 99,9 % – unabhängig vom gewählten Index – bereits eine deutliche Varianz des Risikoausweises bei unterschiedlicher Schwellenwahl sichtbar. Aber gerade für jene seltenen Ereignisse soll die Extremwerttheorie eingesetzt werden. Seitens zahlreicher Autoren besteht in diesem Zusammenhang der bereits erwähnte Vorschlag, die Ergebnisse mehrerer Schwellen zu mitteln, um somit zu einem valideren Schätzer zu gelangen.⁵⁸ Das entsprechende Vorgehen wird im folgenden Vergleich mit Ergebnissen anderer Schätzmethoden Anwendung finden.

Des Weiteren besteht in den gravierenden Unterschieden des Risikoausweises bei unterschiedlicher Datenhistorie ein Problem der extremwerttheoretischen Risikomessung. Insbesondere sind hier die deutlichen Unterschiede im Risikoausweis bei einem Konfidenzniveau von 99,9 % für eine Datenhistorie von 1.000 Handelstagen gegenüber der gesamten Datenbasis am 21.1.08 (in Form des deutlich tieferen Risikoausweises) und am 16.10.08 (in Form des deutlich höheren Risikoausweises) zu beachten.

3. Vergleich der Ergebnisse mit alternativen Risikomessverfahren

Ungeachtet der Ergebnisschwankung der vorgestellten extremwerttheoretischen Risikomessung bei alternativen Schwellen stellt sich die Frage, wie gut die Ergebnisse im vorliegenden Beispiel gegenüber alternativen Ansätzen abschneiden. Hierfür wurden der $\text{VaR}_{99\%}$, der $\text{VaR}_{99,9\%}$, das rückgerechnete Konfidenzniveau q_{inv} sowie die Zeitspanne in Jahren, in welcher ein Ereignis der zugrunde gelegten Risikohöhe im Erwartungswert einmal eintritt oder überschritten wird (d_J)⁵⁹, den Ergebnissen alternativer Ansätze gegenübergestellt. Als alternative Ansätze

⁵⁷ Das Ergebnis für einen Schwellenwert von $-3,0\%$ für den MSCI kann dabei vernachlässigt werden, da hier die durchgeführte Verteilungsbestimmung auf Basis von nur drei Exzedenten nicht sinnvoll erscheint.

⁵⁸ Vgl. bspw. das Vorgehen von McNeil (1997); K llezi/Gilli (2000).

⁵⁹ Für kleine Werte wurde d_J in Tage (T) umgerechnet. Zugrunde gelegt wurden 250 Handelstage pro Jahr. Die Ermittlung erfolgte dabei auf Basis des ungerundeten d_J . Für Fälle, in denen das Modell bereits bei einem tieferen Kursrückgang zu einem Konfidenzniveau von 100 % gelangt, wurde kein Wert angegeben.

haben dabei die VaR-Ermittlung auf Basis der Standardnormalverteilung,⁶⁰ die historische Simulation⁶¹ sowie das GARCH-Modell mit normalverteilten sowie mit t -verteilten Innovationen⁶² Anwendung gefunden. Des Weiteren wurde der VaR mittels POT-Methode auf Grundlage der standardisierten Residuen des GARCH-Modells mit student- t -verteilten Innovationen ermittelt. Hierbei stellen die angegebenen Ergebnisse wiederum das arithmetische Mittel über alternative Schwellen dar. Als Schwellenwerte fanden die jeweiligen Werte aus Tabelle 2 und Anhang 8 Anwendung, welche durch die entsprechenden Hill-Plots und Exzessmittelwertfunktionen bestätigt wurden.

Die Risikoermittlung erfolgte vor dem Hintergrund der Ergebnisvergleichbarkeit für alle Modelle auf einer Datenbasis von 1.000 Handelstagen und auf Basis der gesamten verfügbaren Datenhistorie. Die dabei ermittelten Ergebnisse für den DAX sind in Tabelle 3 den Mittelwerten der Ergebnisse, jeweils über alle Schwellen, aus Tabelle 2 gegenübergestellt. Für den MSCI Europe ist die entsprechende Darstellung in Anhang 10 gegeben.

Hinsichtlich der VaR-Ergebnisse fällt auf, dass die POT-Methode und die historische Simulation für das Konfidenzniveau von 99 % sowohl beim DAX als auch beim MSCI Europe zu nahezu identischen Risikoschätzungen kommen. Zwischen den beiden POT-Berechnungen liegen dabei – mit Ausnahme des 21.1.08 mit einer Historie von 1.000 Handelstagen für den DAX – die auf Basis der standardisierten Residuen des GARCH-Modells ermittelten Risikoschätzungen durchgängig höher.

Für die Normalverteilung ist festzustellen, dass die ermittelten Risikoschätzungen für nahezu alle Beobachtungen gegenüber den anderen Methoden deutlich nach unten abweichen. Die breiteren Ränder („fat-tails“) kommen offensichtlich zum Tragen. Besonders deutlich wird diese Abweichung beim Konfidenzniveau von 99,9 %.

Die beiden GARCH-Modelle weisen insbesondere am 16.10.08 gegenüber den anderen Verfahren einen deutlich höheren VaR – sowohl bei einem Konfidenzniveau von 99 % als auch bei 99,9 % – aus. Hier tritt der Umstand, dass GARCH-Modelle Veränderungen der Volatilität im Zeit-

⁶⁰ Vgl. bspw. Jorion (2007), S. 249 ff.; Rau-Bredow (2002), S. 604.

⁶¹ Vgl. bspw. Jorion (2007), S. 262 ff.

⁶² Vgl. Bollerslev (1986) sowie hinsichtlich der Anwendung bspw. Lütkepohl/Krätzig (2004), S. 197 ff. Die Ermittlung der Innovationen erfolgte mittels des Programms eViews unter Annahme eines GARCH(1,1)-Modells. Die geschätzten Parameter sind in Anhang 9 dargestellt.

Tabelle 3

**Gegenüberstellung des VaR auf Basis der POT-Methode mit Ergebnissen
alternativer Risikomessverfahren für den DAX**

Datum/Verlust	11.9.01/−8,8 %		21.1.08/−7,4 %		16.10.08/−5,0 %	
Handelstage	1.000	9.177	1.000	10.792	1.000	10.982
VaR _{99%} ^{POT}	4,3 %	2,9 %	2,5 %	3,2 %	3,5 %	3,3 %
VaR _{99%} ^{POT,GARCHt−vert.}	4,5 %	2,9 %	2,3 %	3,3 %	3,7 %	3,4 %
VaR _{99%} ^{Normvert.}	3,8 %	2,5 %	2,2 %	2,7 %	2,8 %	2,8 %
VaR _{99%} ^{GARCHnormvert.}	5,1 %	5,2 %	2,4 %	2,6 %	12,2 %	11,7 %
VaR _{99%} ^{GARCHt−vert.}	5,4 %	5,8 %	2,8 %	2,9 %	15,1 %	12,8 %
VaR _{99%} ^{hist.Simul.}	4,3 %	2,9 %	2,6 %	3,2 %	3,4 %	3,3 %
VaR _{99,9%} ^{POT}	7,3 %	5,8 %	3,4 %	6,5 %	8,3 %	6,8 %
VaR _{99,9%} ^{POT,GARCHt−vert.}	7,5 %	5,8 %	3,6 %	6,5 %	9,1 %	6,8 %
VaR _{99,9%} ^{Normvert.}	5,0 %	3,4 %	2,9 %	3,6 %	3,7 %	3,7 %
VaR _{99,9%} ^{GARCHnormvert.}	6,7 %	7,0 %	3,2 %	3,4 %	16,2 %	15,5 %
VaR _{99,9%} ^{GARCHt−vert.}	7,4 %	8,5 %	4,1 %	4,3 %	24,1 %	18,9 %
VaR _{99,9%} ^{hist.Simul.}	8,4 %	6,4 %	3,5 %	6,5 %	7,4 %	7,0 %
d_J^{POT}	11,32	18,07	–	6,59	0,92	1,41
$d_J^{\text{POT,GARCHt−vert.}}$	10,55	16,68	–	6,67	0,87	1,36
$d_J^{\text{Normvert.}}$	$39,2 \cdot 10^6$	$2,25 \cdot 10^{15}$	$429 \cdot 10^{12}$	$569 \cdot 10^9$	53.307	64.209
$d_J^{\text{GARCHnormvert.}}$	147,69	84,80	$14,8 \cdot 10^9$	$533 \cdot 10^6$	0,02 (5,85 T)	0,03 (6,29 T)
$d_J^{\text{GARCHt−vert.}}$	20,00	5,02	444,93	325,11	0,02 (5,66 T)	0,03 (6,45 T)
$d_J^{\text{hist.Simul.}}$	–	12,24	–	7,19	0,67	1,19

ablauf berücksichtigen, besonders stark zutage. Ursache hierfür ist, dass der 16.10.08 den Tag mit der höchsten impliziten Volatilität des DAX darstellt und dem Datum ein markanter Volatilitätsanstieg vorangegangen war. Tendenziell ergibt sich in diesem Zusammenhang eine Risikoüberschätzung, währenddessen am 21.1.08 bei Berücksichtigung der gesamten Datenhistorie beim DAX eine Risikounterschätzung durch die GARCH-Modelle für den VaR_{99,9%} vorliegt. Dabei kann für den 21.1.08 wiederum festgestellt werden, dass diesem ein Zeitraum mit geringer Volatilität vorausgegangen war.

Beim Vergleich der beiden GARCH-Ansätze ist festzustellen, dass mit t -verteilten Innovationen durchgehend ein höherer VaR geschätzt wird als auf Basis der normalverteilten Innovationen. Ursache hierfür ist, dass die „fat-tails“ der Indexrenditen durch die t -Verteilung teilweise berücksichtigt werden. Am 21.1.08 führte dieser Umstand dazu, dass die eingetretenen Überschreitungen – insbesondere beim MSCI Europe, aber auch beim DAX – mit einer realistischeren Eintrittswahrscheinlichkeit verknüpft waren als beim GARCH-Modell mit normalverteilten Innovationen.

Betrachtet man die erwartete Zeitspanne d_I für den Eintritt der Risikohöhe des jeweiligen Datums, so fällt hinsichtlich der Normalverteilungsannahme die eklatante Unterschätzung dieser Extremrisiken auf. So wurde für den 11.9.01 auf Basis der gesamten Datenhistorie für den DAX geschätzt, dass ein Indexrückgang von 8,8 % nur einmal in 2,25 Billionen Jahren – also praktisch nie – vorkommen könne. Tatsächlich wurde ein Verlust von 8,8 % oder mehr zwischen dem 1.1.65 und dem 10.9.01 dreimal und somit im Schnitt alle 12,24 Jahre erreicht oder überschritten. Dieses Grundmuster der Risikounterschätzung tritt für die Normalverteilungsannahme für alle Zeitpunkte und gewählten Datenhistorien auf.

Dahingegen werden für die GARCH-Ansätze abermals die bereits bei den VaR-Größen festgestellten Risikoüberschätzungen für den 16.10.08 bei beiden Indizes und die Risikounterschätzungen für den 21.1.08 im Fall des DAX deutlich. Für den MSCI Europe ist die mittels GARCH-Modell mit t -verteilten Innovationen geschätzte Eintrittswahrscheinlichkeit des Indexrückgangs vom 21.1.08 hingegen als weitgehend realistisch einzustufen. Besonders offensichtlich wird die Problematik der Ergebnisse bei zugrunde gelegter Datenbasis von 1.000 Handelstagen für den DAX. Hier wurde ein Verlust von 7,4 % oder mehr am 21.1.08 auf Basis normalverteilter Innovationen alle 14,8 Milliarden Jahre und auf Basis t -verteilter Innovationen alle 445 Jahre einmal erwartet. Ein dreiviertel Jahr später, am 16.10.08, wurde jedoch mit den gleichen Modellen errechnet, dass ein Verlust von 5 % oder mehr etwa alle 6 Handelstage einmal eintritt. Gleichzeitig soll der VaR für ein Konfidenzniveau von 99,9 % von 3,2 % auf 16,2 % bei normalverteilten oder sogar von 4,1 % auf 24,1 % bei t -verteilten Innovationen gestiegen sein.

Es wird somit durch die explizite Untersuchung einzelner Handelstage eine Schwäche der GARCH-Ansätze deutlich, die bei den in der Literatur üblichen Zeitreihenvergleichen der Schätzgüte verborgen bleibt. So

würde die massive Risikoüberschätzung am 16.10.08 bei Anwendung der GARCH-Ansätze im Rahmen von Risikolimitsystemen beispielsweise dazu führen, dass Anleger ihr Portfolio weitgehend risikofrei stellen müssten. An einem späteren Aufschwung könnten sie dadurch aber nur unterproportional partizipieren.

Lediglich die POT-Methode ist im vorliegenden Fall für den 16.10.08 in der Lage, Ergebnisse zu liefern, die sich mit der historischen Simulation weitgehend decken. Besonders negativ für die POT-Methode ist in diesem Zusammenhang jedoch, dass für den 21.1.08, bei einer Datenbasis von 1.000 Handelstagen, einem Indexrückgang in der eingetretenen Höhe jeweils eine Wahrscheinlichkeit von null zugeordnet wird. Der grundsätzlich gegenüber der historischen Simulation vorhandene Vorteil, Risiken auch bei geringerer Datenhistorie schätzen zu können, ist somit nicht durchgehend gegeben. Hierfür müssen in jedem Fall genügend Extremereignisse zur Verfügung stehen, was bei einem vorangegangenen ruhigen Börsenumfeld und einer geringen Grundgesamtheit nicht der Fall ist. Es stellt sich somit das Problem, dass das historische Datengerüst, auf dessen Basis die Extremwerttheorie aufgesetzt wird, Extremereignisse widerspiegeln muss, um für hohe Konfidenzniveaus „richtige“ Schätzer zu erhalten.

Der Vergleich der Ergebnisse der parametrischen Schätzer mit der historischen Simulation darf dabei nicht dahingehend gewertet werden, dass die historische Simulation „richtige“ Schätzer generieren würde. Vielmehr ist hier festzuhalten, dass der Schätzer der historischen Simulation maximal bis zu einem Konfidenzniveau geführt werden kann, welches sich mit der verfügbaren Datenhistorie deckt. Bei 1.000 Handelstagen Datenhistorie liegt die Grenze beispielsweise bei 99,99 %, wobei bereits dann die Risikoschätzung nur noch auf einer einzigen Beobachtung beruht und entsprechend stark schwanken kann, wenn die betreffende Beobachtung aus der Datenhistorie ausscheidet.

IV. Fazit

Die Erfassung von Extremrisiken sollte eine der Kernaufgaben von Risikomesssystemen darstellen. Im vorliegenden Beitrag wurde als Verfahren der Extremwerttheorie, das gerade diese Extremrisiken messbar machen soll, die POT-Methode vorgestellt. Wie der Vergleich mit der Normalverteilungsannahme, GARCH-Modellen mit normalverteilten sowie t -verteilten Innovationen und der historischen Simulation für exemplari-

sche Belastungstage anhand des DAX und des MSCI Europe verdeutlicht hat, kann die POT-Methode durchaus valide Risikoschätzer liefern.

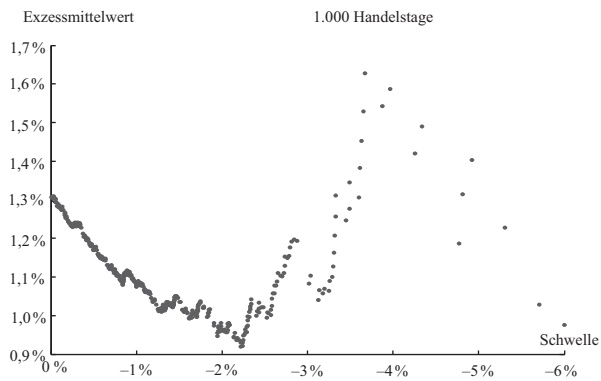
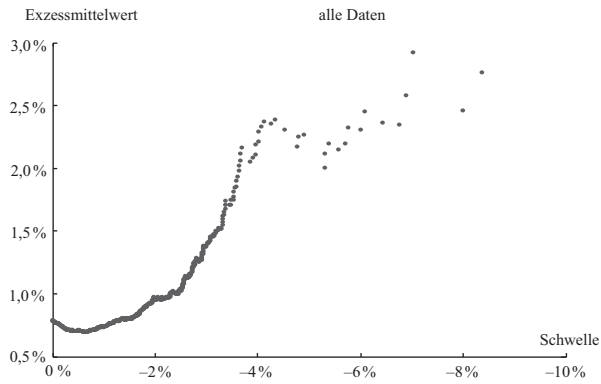
Es wurde dabei aber auch offensichtlich, dass die Mindestschwellen, deren Exzedenten als Basis der Ermittlung der Extremwertverteilung dienen, bei einer geringeren Datengesamtheit höher angesetzt werden müssen als bei einer größeren Datengesamtheit, um stabile Schätzer für den Gestalt- und den Skalenparameter zu erhalten. Ebenso unterscheiden sich die Risikoschätzungen bei hohen Konfidenzniveaus für unterschiedliche Schwellenwerte deutlich. Beide Sachverhalte werden mit der oft Anwendung findenden Verwendung fester Quantilsschwellen – so werden in der Literatur häufig vereinfachend die größten 10 % der Verlustereignisse zur Bestimmung der Extremwertverteilung herangezogen – vernachlässigt. Fehler in der Risikoschätzung, mit allen damit verbundenen negativen Auswirkungen, sind hierdurch möglich. Ebenso scheint ein Backtesting alternativer Verfahren auf Basis derart generierter Ergebnisse problematisch, entspricht aber gängiger Praxis.⁶³

Des Weiteren hat sich gezeigt, dass die Risikoschätzung in erheblichem Maße von der zugrunde gelegten Datenhistorie abhängig ist. Keines der Verfahren ist hierbei in der Lage, bei zuvor wenig volatilen Märkten und einer geringen Datenhistorie (im vorliegenden Fall 1.000 Handelstage) sinnvolle Risikoschätzer für hohe Konfidenzniveaus zu liefern. Durch die im Beitrag erfolgte Untersuchung expliziter Handelstage wurde jedoch sichtbar, dass die extremwerttheoretische Risikoschätzung bei zuvor stark volatilen Werten für hohe Konfidenzniveaus realistischere Schätzer als die GARCH-Ansätze ermitteln kann. Dieser Aspekt wurde auf Basis der in der Literatur üblichen Zeitreihen-Backtestings nicht sichtbar, ist aber insbesondere für die Anwendung von Risikomessmodellen im Rahmen der Risikolimitierung von höchster Bedeutung.

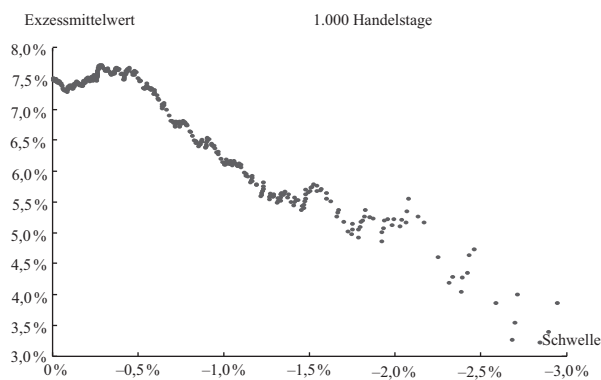
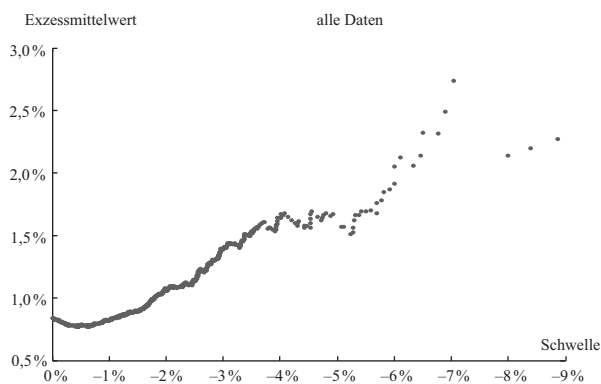
Gegenüber der massiven Schwankung des Risikoausweises durch die beiden GARCH-Modelle mit normalverteilten und *t*-verteilten Innovationen generiert die POT-Methode auf Basis einer hinreichend großen Datengesamtheit offensichtlich validere Schätzer für hohe Konfidenzniveaus (99,9 % und höher). Eine rein GARCH-basierte Risikomessung für hohe Konfidenzniveaus scheint somit problematisch und sollte in jedem Fall durch extremwerttheoretische Modelle ergänzt werden.

⁶³ Vgl. bspw. *Harmantzis/Miao/Chien* (2006), S. 124; *Fernandez* (2003), S. 65; *McNeil/Frey* (2000); *McNeil* (1999), S. 103 ff.

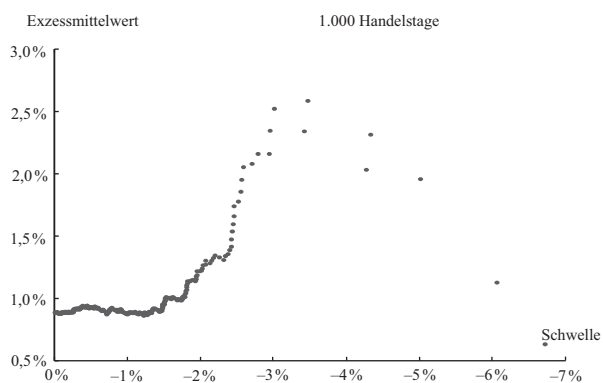
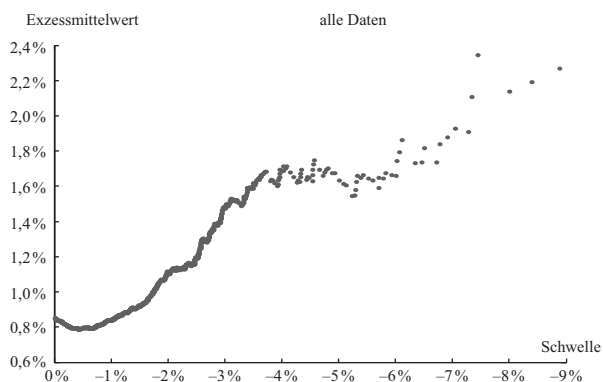
Anhang



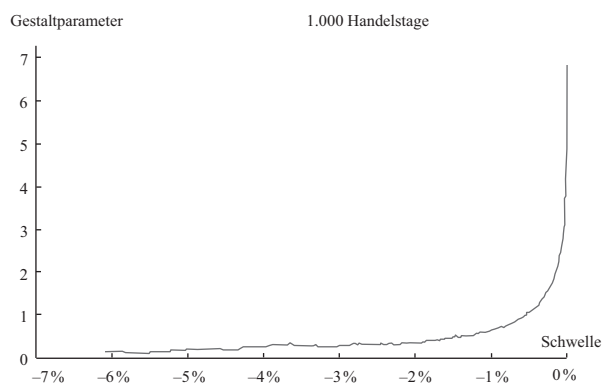
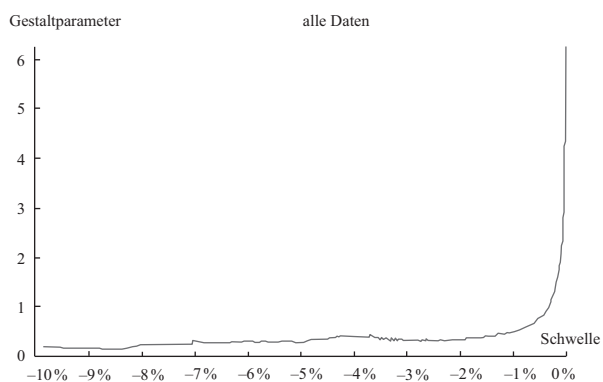
Anhang 1: Exzessmittelwertfunktionen DAX am 11.9.01



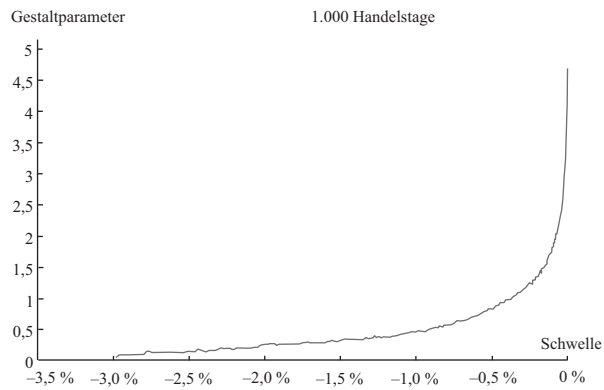
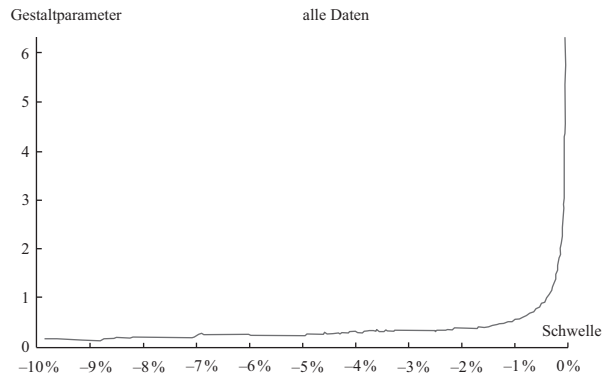
Anhang 2: Exzessmittelwertfunktionen DAX am 21.1.08



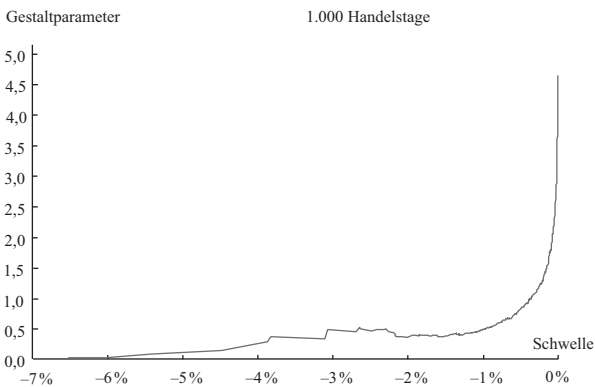
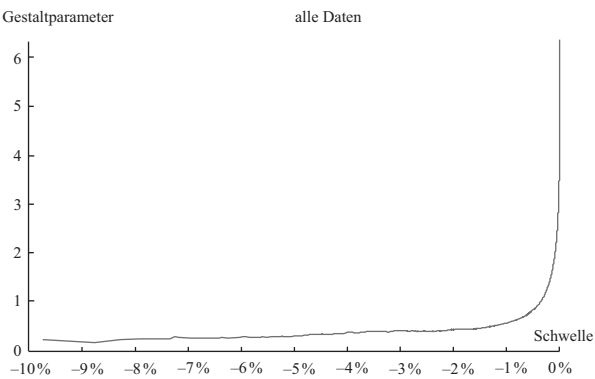
Anhang 3: Exzessmittelwertfunktionen DAX am 16.10.08



Anhang 4: Hill-Plots DAX am 11.9.01



Anhang 5: Hill-Plots DAX am 21.1.08



Anhang 6: Hill-Plots DAX am 16.10.08

Anhang 7

Mindestschwellen gemäß EMF und Hill-Plot für den MSCI Europe

Datum	Mindestschwelle					
	11.9.01		21.1.08		16.10.08	
Datenhistorie	1.000	5.603	1.000	7.234	1.000	7.425
EMF	-1,6 %	-0,5 %	–	-0,5 %	-0,5 %	-0,5 %
Hill-Plott	-1,5 %	-1,0 %	-1,5 %	-1,25 %	-1,5 %	-1,0 %

Anhang 8
Ermittlung des VaR über geschätzte Gestalt- und Skalenparameter unterschiedlicher Schwellen für den MSCI Europe

11.9.01				21.1.08				16.10.08			
n	u	VaR _{99,9} %	d_J	n	u	VaR _{99,9} %	d_J	n	u	VaR _{99,9} %	d_J
1.000	-1,50 %	5,1 %	16,60	1.000	-1,50 %	3,3 %	-	1.000	-1,00 %	7,5 %	1,24
	-2,00 %	4,6 %	354,949		-2,00 %	3,3 %	-		-1,50 %	7,8 %	1,20
	-2,50 %	4,5 %	-		-2,50 %	3,3 %	-		-2,00 %	8,1 %	1,21
	-3,00 %	4,5 %	-		-3,00 %	3,1 %	69,95		-2,50 %	8,3 %	1,19
5.603	-	-	-	7.234	-	-	-	7.425	-3,00 %	7,5 %	0,79
	-1,00 %	4,9 %	10,11		-1,00 %	5,3 %	6,77		-1,00 %	5,8 %	2,89
	-1,50 %	5,2 %	7,52		-1,50 %	5,4 %	6,46		-1,50 %	6,0 %	2,63
	-2,00 %	5,1 %	8,10		-2,00 %	5,3 %	6,72		-2,00 %	6,0 %	2,68
	-2,50 %	5,2 %	8,59		-2,50 %	5,4 %	7,04		-2,50 %	6,0 %	2,50
	-3,00 %	5,1 %	8,96		-3,00 %	5,3 %	7,48		-3,00 %	5,9 %	2,62

Anhang 9
Geschätzte Parameter der GARCH-Modelle

Modell	Index	Datum	<i>n</i>	$\gamma(\cdot 10^{-6})$	α	β	dF	$\alpha + \beta$
GARCHNormvert.	DAX	11.09.01	1.000	9,82 (2,60)	0,1050 (5,31)	0,8586 (29,41)	–	0,9636
			9.177	2,78 (12,16)	0,1233 (31,51)	0,8591 (147,23)	–	0,9824
		21.01.08	1.000	3,78 (2,75)	0,0695 (3,98)	0,8864 (29,77)	–	0,9559
			10.792	2,49 (12,82)	0,1130 (33,38)	0,8717 (177,29)	–	0,9847
		16.10.08	1.000	3,68 (3,32)	0,1285 (6,73)	0,8511 (33,03)	–	0,9796
			10.982	2,50 (12,86)	0,1174 (33,53)	0,8689 (175,28)	–	0,9863
	MSCI Europe	11.09.01	1.000	6,11 (2,66)	0,0883 (3,99)	0,8662 (25,76)	–	0,9545
			5.603	2,29 (13,10)	0,1218 (25,21)	0,8450 (106,19)	–	0,9668
		21.01.08	1.000	2,55 (3,51)	0,1050 (5,30)	0,8538 (31,27)	–	0,9588
			7.234	2,00 (14,66)	0,1176 (27,36)	0,8570 (133,93)	–	0,9746
		16.10.08	1.000	1,43 (2,86)	0,1341 (6,56)	0,8636 (39,08)	–	0,9977
			7.425	1,91 (14,76)	0,1224 (27,64)	0,8567 (137,02)	–	0,9791

(Fortsetzung nächste Seite)

Anhang 9 (Fortsetzung)

Modell	Index	Datum	n	$\gamma(\cdot 10^{-6})$	α	β	dF	$\alpha + \beta$
GARCHt-vert.	DAX	11.09.01	1.000	9,56 (2,30)	0,1022 (4,43)	0,8623 (26,15)	24,26 (1,51)	0,9645
			9.177	1,87 (6,50)	0,0979 (13,45)	0,8872 (113,67)	11,51 (18,81)	0,9851
		21.01.08	1.000	2,98 (2,04)	0,0742 (3,47)	0,8930 (28,23)	9,31 (3,23)	0,9672
			10.792	1,65 (6,80)	0,0930 (14,80)	0,8950 (134,52)	11,70 (19,34)	0,9880
		16.10.08	1.000	2,51 (1,94)	0,1111 (4,56)	0,8779 (30,61)	6,81 (5,16)	0,9890
			10.982	1,66 (6,74)	0,0957 (15,15)	0,8933 (134,31)	11,32 (19,54)	0,9890
	MSCI Europe	11.09.01	1.000	5,94 (2,40)	0,0878 (3,79)	0,8681 (24,39)	44,83 (0,89)	0,9559
			5.603	1,13 (5,42)	0,0950 (10,47)	0,8869 (87,12)	8,30 (16,37)	0,9819
		21.01.08	1.000	2,42 (2,52)	0,1078 (4,09)	0,8542 (24,95)	8,41 (4,29)	0,9620
			7.234	1,02 (5,87)	0,0958 (12,32)	0,8907 (106,19)	8,72 (17,34)	0,9865
		16.10.08	1.000	1,32 (2,00)	0,1280 (4,92)	0,8698 (33,17)	8,17 (4,64)	0,9978
			7.425	9,84 (5,76)	0,0996 (12,78)	0,8896 (108,16)	8,56 (17,47)	0,9892

Hinweise: Klammerangaben sind die jeweiligen Z-Werte; dF = Freiheitsgrade; da für alle Fälle gilt: $\gamma > 0$, $\alpha, \beta > 0$ und $\alpha + \beta > 1$ handelt es sich in allen Fällen um eindeutige streng stationäre Lösungen der GARCH (1,1)-Gleichung (vgl. bspw. Kreiß/Neuhaus (2006), S. 301 ff.).

Anhang 10

Gegenüberstellung des VaR auf Basis der POT-Methode mit Ergebnissen alternativer Risikomessverfahren für den MSCI Europe

Datum/Verlust	11.9.01/−6,4 %		21.1.08/−6,1 %		16.10.08/−5,3 %	
Handelstage	1.000	5.603	1.000	7.234	1.000	7.425
VaR ^{POT} _{99%}	3,5 %	2,3 %	2,6 %	2,7 %	3,6 %	2,8 %
VaR ^{POT,GARCHtvert.} _{99%}	3,6 %	2,3 %	2,6 %	2,8 %	3,7 %	2,9 %
VaR ^{Normvert.} _{99%}	2,8 %	1,9 %	1,8 %	2,1 %	2,7 %	2,2 %
VaR ^{GARCHnormvert.} _{99%}	3,3 %	3,3 %	2,7 %	2,8 %	12,0 %	11,1 %
VaR ^{GARCHt−vert.} _{99%}	3,4 %	3,9 %	3,3 %	3,4 %	14,7 %	13,1 %
VaR ^{hist.Simul.} _{99%}	3,7 %	2,3 %	2,6 %	2,7 %	3,4 %	2,8 %
VaR ^{POT} _{99,9%}	4,7 %	5,1 %	3,3 %	5,3 %	7,8 %	5,9 %
VaR ^{POT,GARCHtvert.} _{99,9%}	4,7 %	5,2 %	3,4 %	5,4 %	8,1 %	6,0 %
VaR ^{Normvert.} _{99,9%}	3,7 %	2,5 %	2,4 %	2,8 %	3,6 %	2,9 %
VaR ^{GARCHnormvert.} _{99,9%}	4,3 %	4,3 %	3,6 %	3,7 %	16,0 %	14,8 %
VaR ^{GARCHt−vert.} _{99,9%}	4,6 %	6,0 %	5,0 %	5,1 %	22,8 %	19,9 %
VaR ^{hist.Simul.} _{99,9%}	4,5 %	5,9 %	3,6 %	5,1 %	8,0 %	6,5 %
d_J^{POT}	−	8,65	−	6,89	1,21	2,66
$d_J^{\text{POT,GARCHtvert.}}$	−	8,11	−	6,45	1,16	2,50
$d_J^{\text{Normvert.}}$	$14,9 \cdot 10^6$	$225 \cdot 10^{12}$	$113 \cdot 10^{12}$	$110 \cdot 10^9$	428.799	$66,2 \cdot 10^6$
$d_J^{\text{GARCHnormvert.}}$	1.542	1.557	62.978	18.154	0,03 (6,54 T)	0,03 (7,42 T)
$d_J^{\text{GARCHt−vert.}}$	213	5,37	15,6	12,6	0,02 (6,12 T)	0,03 (7,11 T)
$d_J^{\text{hist.Simul.}}$	−	5,60	−	7,34	0,67	2,47

Literatur

- Balkema, A./de Haan, L.* (1974): Residual life time at great age, in: *Annals of Probability*, Vol. 2, No. 5, S. 792–804 – *Beirlant, J./Teugels, J./Vynckier, P.* (1996): Practical analysis of extreme values, Leuven – *BIZ* (2000): Stress Testing by Large Financial Institutions: Current Practice and Aggregation Issues, CGFS Publikation Nr. 14, Basel – *Bleymüller, J./Gehlert G./Gülicher, H.* (2008): Statistik für Wirtschaftswissenschaftler, 15. Auflage, München – *Bollerslev, T.* (1986): Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, in: *Journal of Econometrics*, Vol. 31, No. 3, S. 307–327 – *Bordin, E./Klüppelberg, C.* (2008): Extreme Value Theory in Finance, in: *Encyclopedia of Quantitative Risk Analysis and Assessment*, Volume 2, S. 678–685 – *Melnick, E./Everitt, B.* (Hrsg.), S. 678–685 – *Borkovec, M./Klüppelberg, C.* (2000): Extremwerttheorie für Finanzzeitreihen – ein unverzichtbares Werkzeug im Risikomanagement, in: *Handbuch Risikomanagement*, *Rudolph, B./Johanning, L.* (Hrsg.), Bad Soden, S. 219–241 – *Chavez-Demoulin, V.* (2004): Was ist Extremwerttheorie?, in: *Risknews*, 1. Jg., Nr. 5, S. 42–44 – *Cox, D./Isham, V.* (1980): *Point Processes*, London – *Da Silva, A./Mendes, B.* (2003): Value-at-risk and Extreme Returns in Asian Stock Markets, in: *International Journal of Business*, 8 (1), S. 17–40 – *Danielsson, J.* (2008): Blame the models, in: *Journal of Financial Stability*, No. 4, S. 321–328 – *Danielsson, J./Morimoto, Y.* (2000): Forecasting Extreme Financial Risk: A Critical Analysis of Practical Methods for the Japanese Market, in: *Monetary and Economic Studies*, Vol. 18, No. 2, S. 25–48 – *Deutsche Börse* (2007): Leitfaden zu den Volatilitätsindizes der Deutschen Börse, Version 2.4, Frankfurt am Main – *Embrechts, P./Klüppelberg, C./Mikosch, T.* (2003): *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, 4. korrigierter Nachdruck der Ausgabe von 1997, Berlin – *Emmer, S./Klüppelberg, C./Trüstedt, M.* (1998): VaR – ein Maß für das extreme Risiko, in: *Solutions*, Jg. 2, Nr. 1, S. 53–63 – *Fernandez, V.* (2003): Extreme Value Theory and Value at Risk, in: *Revista de Análisis Económico*, Vol. 18, No. 1, S. 57–85 – *Fisher, R./Tippett, L.* (1928): Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample, in: *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 24, S. 180–190 – *Franke, J./Härdle, W./Hafner, C.* (2003): Einführung in die Statistik der Finanzmärkte, 2. Auflage, Berlin – *Gençay, R./Selçuk, F./Ulugülyağci, A.* (2001): EVIM: A Software Package for Extreme Value Analysis in MATLAB, in: *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, Vol. 5, No. 3, S. 213–239 – *Gençay, R./Selçuk, F./Ulugülyağci, A.* (2003): High Volatility, Thick Tails and Extreme Value Theory in Value-at-Risk Estimation, in: *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 33, S. 337–356 – *Gençay, R./Selçuk, F.* (2004): Extreme Value Theory and Value-at-Risk: Relative Performance in Emerging Markets, in: *International Journal of Forecasting*, Vol. 20, No. 2, S. 287–303 – *Harmantzis, F./Miao, L./Chien, Y.* (2006): Empirical Study of Value-at-Risk and Expected Shortfall Models with Heavy Tails, in: *Journal of Risk Finance*, Vol. 7, No. 2, S. 117–135 – *Hosking, J./Wallis, J.* (1987): Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution, in: *Technometrics*, Vol. 29, No. 3, S. 339–349 – *Hosking, J./Wallis, J./Wood, E.* (1985): Estimation of the Generalized Extreme-Value Distribution by the Method of Probability-Weighted Moments, in: *Technometrics*, Vol. 27, No. 3, S. 251–261 – *Jorion, P.* (2007): *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 3. Auflage, New York – *Kellezi, E./Gilli, M.* (2000): *Extreme Value*

Theory for Tail-Related Risk Measures, Workingpaper, 18/2000, Department of Econometrics and FAME, University of Geneva, Genf – *Kreiß, J./Neuhaus, G.* (2006): Einführung in die Zeitreihenanalyse, Berlin – *Lütkepohl, H./Krätzig, M.* (2004): Applied time series econometrics, Cambridge – *Lux, T.* (2000): On moment condition failure in German stock returns: an application of recent advances in extreme value statistics, in: *Empirical Economics*, Vol. 25, S. 641–652 – *McNeil, A.* (1997): Estimating the Tails of Loss Severity Distributions using Extreme Value Theory, in: *ASTIN Bulletin*, Vol. 27, S. 117–137 – *McNeil, A.* (1999): Extreme Value Theory for Risk Managers, in: *Internal Modelling and CAD II*, S. 93–113 – *McNeil, A./Frey, R.* (2000): Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach, in: *Journal of Empirical Finance*, No. 7, S. 271–300 – *Pickands, J.* (1975): Statistical Inference Using Extreme Order Statistics, in: *The Annals of Statistics*, Vol. 3, No. 1, S. 119–131 – *Poisson, S.* (1837): Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités, Paris – *Rau-Bredow, H.* (2002): Value at Risk, Normalverteilungshypothese und Extremwertverhalten, in: *FINANZ BETRIEB*, 10/2002, S. 603–607 – *Smith, R.* (1990): Extreme Value Theory, in: *Handbook of Applicable Mathematics*, *Ledermann, W.* et al. (Hrsg.), Chichester – *Toutenburg, H.* (2005): Induktive Statistik: Eine Einführung mit SPSS für Windows, Berlin – *Wagner, N.* (2005): Aktienmarktrisiko im Wandel der Zeit – Volatilität und unteres Verteilungsende am Beispiel des deutschen Aktienmarktes, in: *Versicherungen im Umbruch*, *Spremann, K.* (Hrsg.). Berlin, S. 251–268.

Zusammenfassung

Anwendung der Extremwerttheorie zur Quantifizierung von Marktpreisrisiken – Test der Relevanz anhand vergangener Extrembelastungen von DAX und MSCI Europe

Ein Verfahren, das gezielt entwickelt wurde, um Risiken mit sehr geringen Eintrittswahrscheinlichkeiten zu quantifizieren, stellt die Extremwerttheorie dar. Die empirische Anwendung der Extremwerttheorie in Form der Peaks-Over-Threshold-(POT-)Methode auf die Kursrückgänge des DAX und des MSCI Europe vom 11.9.01, 21.1.08 und 16.10.08 im vorliegenden Beitrag zeigt, dass die Güte der Risikoeinschätzung stark von den zugrunde liegenden Ausgangsdaten abhängt. Dabei ergeben sich bereits durch unterschiedliche Schwellen in der POT-Methode divergierende Risikohöhen, wie die Untersuchung an den exemplarischen Belastungstagen deutlich macht. Dennoch kann konstatiert werden, dass die POT-Methode die Normalverteilungsannahme und GARCH-Modelle mit normalverteilten und *t*-verteilten Innovationen – besonders bei der Risikoschätzung nach Zeitabschnitten mit volatilen Märkten – in ihrer Güte für die untersuchten Fälle übertrifft. (JEL C14; C16; C53; G11; G15)

Summary

Application of the Extreme Value Theory for the Quantification of Market Price Risks – Empirical Relevance Test Using Extreme Losses of DAX and MSCI Europe

The Extreme Value Theory is an approach designed with the objective to quantify risks which occur with a very low probability. The empirical application of the Extreme Value Theory in terms of the Peaks Over Threshold (POT)-Method to the index declines of the DAX and the MSCI Europe on 11.9.01, 21.1.08 and 16.10.08 in this paper shows that the quality of risk assessment highly depends on the underlying data source. As the analysis shows the resulting risk level during the considered days is clearly linked to the applied threshold. Nevertheless it is shown that the POT-Method beats the assumption of normal distribution and GARCH models with normally distributed and t -distributed innovations – especially after periods of high market volatility – concerning the goodness of risk quantification for the examined events.