

# Zum Problem der Planung von Wertpapierbeständen, insbesondere durch Kreditinstitute und Investmentgesellschaften

Von Hans E. Büschgen, Köln

## I. Problemstellung

Das Problem, in bezug auf Ertrag und Risiko möglichst günstig „gemischte“, „gestreute“ oder — mit einem in jüngerer Zeit mit Vorliebe verwendeten Begriff — „diversifizierte“ Effektenbestände (-portefeuilles, -depots) zusammenzustellen und — vielfach laufend — zu verwalten, stellt sich Kreditinstituten in verschiedenen Bereichen:

1. im Eigengeschäft bzw. Eigenbestand<sup>1</sup>, soweit jene Zielsetzung nicht von anderen — z. B. Einflußgewinnung, Verfolgen bestimmter geschäftspolitischer Ziele — ganz oder wesentlich dominiert wird und insoweit eine Diversifikation gar nicht in Betracht kommt<sup>2</sup>;
2. im Kundenberatungsgeschäft, das unter den herrschenden Wettbewerbsbedingungen im Kreditwesen immer mehr an Bedeutung gewinnt<sup>3</sup>: sei es, daß ein Kreditinstitut
  - a) für Kunden einmalig oder hin und wieder Depots zusammenstellt, sei es, daß es
  - b) Effektddepots für Kunden zusammenstellt und mit ihrer laufenden „Verwaltung“, d. h. „Umschichtung“ mit dem Ziel der Wert-

---

<sup>1</sup> Vgl. dazu R. A. Lyon, *Investment Portfolio Management in the Commercial Bank*, New Brunswick, N. J., 1960; E. W. Reed, *Commercial Bank Management*, New York 1963; H. D. Crosse, *Management Policies for Commercial Banks*, Englewood Cliffs, N. J., 1962; R. J. Robinson, *The Management of Bank Funds*, 2. Aufl., New York 1962; H. C. Sauvain, *Investment Management*, 2. Aufl., Englewood Cliffs, N. J., 1959; M. B. Einstein, *Investing for Banks*, First National Bank of St. Louis, St. Louis, Mo., 1961.

<sup>2</sup> Vgl. auch American Institute of Banking: *Bank Investments*, New York 1963; dass.: *Bank Management*, New York 1960.

<sup>3</sup> Vgl. auch J. B. Cohen — E. D. Zinbarg, *Investment Analysis and Portfolio Management*, Homewood, Ill., 1967, zu Einzelheiten in diesem Dienstleistungsbereich.

steigerung, beauftragt ist — z. B. im Rahmen sog. Vermögensverwaltungsabteilungen in oft sehr hohen Beträgen —, oder daß es

c) ganz allgemein in Beratungsbriefen o. ä. Anlagevorschläge — die ja ex post von den Angesprochenen auch nachprüfbar sind — publiziert;

3. in der Geschäfts- bzw. Anlagepolitik<sup>4</sup> spezialisierter Kreditinstitute, für die Investmentgesellschaften hinsichtlich des „Management“ ihrer Fonds Musterbeispiele sind oder sein sollten<sup>5</sup>.

Die Möglichkeiten, die sich durch den in den letzten Jahren auch bei den deutschen Kreditinstituten erfolgten erheblichen Einsatz von großen elektronischen Datenverarbeitungsanlagen über ihre traditionellen Einsatzbereiche (Rechnungswesen, Belegerstellung, Karteiführung usw.) hinaus in Richtung auf eine „wissenschaftliche Unternehmensführung“ ergeben haben, lassen sich auch auf dem Gebiet der Optimierung von Wertpapierdepots nutzen, ja sie sind für die im folgenden darzustellenden systematischen Planungsmethoden unter wirklichkeitsnahen Bedingungen notwendige Voraussetzung.

Die Kurs-, Preis- bzw. Wertbildung von Effekten, insbesondere Aktien, unterliegt einer Vielzahl heterogener, unter realitätsabbildenden Annahmen niemals exakt prognostizierbarer Einflüsse, zumal die systematische Wertpapieranalyse, will sie Spekulationen vermeiden, „nur“ den sog. inneren Wert eines Wertpapiers möglichst zuverlässig festzustellen bemüht sein kann<sup>6</sup> („Fundamentalanalyse“); die sog. technische Analyse<sup>7</sup> bemüht sich mit Hilfe von „charts“ über jene Analyse der *Unter-*

<sup>4</sup> Vgl. auch D. D. *McFarlane*, Application of the Markowitz Portfolio Selection Model as a Managerial Tool, Diss. Indiana University, 1966.

<sup>5</sup> Vgl. hierzu C. R. *Doane*, Investment Trusts and Funds from the Investors Point of View, Great Barrington, Mass., 1966; J. L. *Treynor*, How to Rate Management of Investment Funds, Harvard Business Review, Vol. 43 (1965), S. 1 ff.

<sup>6</sup> Vgl. z. B. H. E. *Büschgen*, Aktienanalyse und Aktienbewertung nach der Ertragskraft. Die Price-earnings ratio und die Schätzung des Reingewinns aus dem Steuerausweis bei deutschen Aktiengesellschaften, Wiesbaden 1962; ders.: Wertpapieranalyse. Die Beurteilung von Kapitalanlagen in Wertpapieren, Stuttgart 1966; B. *Graham* — D. L. *Dodd*, Security Analysis. Principles and Practice, 4. Aufl., New York 1962; H. *Schlembach*, Die Bewertung von Aktien, München 1968.

<sup>7</sup> Vgl. zu ihr u. a. A. W. *Cohen*, The Chartcraft Method of Point and Figure Trading, New York 1960; G. A. *Drew*, Profiting with Odd-Lot Indices, Boston 1941; ders.: New Methods for Profit in the Stock Market, Boston 1948;

nehmung und des Wertpapiers hinaus um eine Analyse und Prognose „des Marktes“, d. h. voraussichtlicher Kursschwankungsmöglichkeiten und -breiten des einzelnen Wertpapiers —, in Methode und Resultaten wiederum abgelehnt von den mit starken Argumenten arbeitenden Verfechtern der Vorstellung, daß der Kurs eines Titels im Zeitpunkt  $t_2$  keineswegs mit einer irgendwie gearteten Gesetzmäßigkeit aus dem Kurs im vorhergehenden Zeitpunkt  $t_1$  „herauswachse“, mit Ausnahme der aus dem Zufall entstehenden „Gesetzmäßigkeit“ („random walk theory“)<sup>8</sup>.

Die sich der Ergebnisse der Fundamentalanalyse sowie evtl. auch der technischen Analyse bedienende hier zur Erörterung stehende *Portefeuilleanalyse* sieht sich als spezifischem Problem der Reagibilität der Kurse bzw. Werte von Effekten, insbesondere Aktien, gegenüber branchen- und gesamtwirtschaftlichen Entwicklungen ausgesetzt. Wie empirisch beobachtbar, werden von solchen Entwicklungen zumindest — wenngleich mit differierenden time-lags — sehr viele am Markt gehandelte und als Anlageobjekte in Betracht kommende Wertpapiere erfaßt. Aus dieser überwiegend gleichgerichteten Kursbewegung der Wertpapiere — einem oft relativ hohen Grad an Korrelation also — resultiert

R. D. Edwards — J. Magee, *Technical Analysis of Stock Trends*, Springfield, Mass., 1966; O. D. Foster, *Profits from the Stock Market*, New York 1937; J. E. Granville, *A Strategy of Daily Stock Market Timing for Maximum Profit*, Englewood Cliffs, N. J., 1964; R. W. Schabacker, *Technical Analysis and Stock Market Profits*, Springfield, Mass., 1937; H. W. Uttiner, *Die Voraussage der New Yorker Börsenentwicklung durch eine neue statistische Methode*, Winterthur 1964; dazu zahlreiche Zeitschriftenaufsätze.

<sup>8</sup> Vgl. u. a. P. H. Cootner, *Stock Prices. Random vs. Systematic Changes*, *Industrial Management Review*, Vol. III (1962), S. 24 ff., M. F. M. Osborne, *Brownian Motion in the Stock Market*, *Operations Research*, Vol. VII (1959), S. 145 ff.; ders.: *Periodic Structure in the Brownian Motion of Stock Prices*, *Operations Research*, Vol. X (1962), S. 345 ff.; A. Cowles, *A Revision of Previous Conclusions Regarding Stock Price Behavior*, *Econometrica*, Vol. XXXIII (1960), S. 909 ff.; A. B. Moore, *Some Characteristics of Changes in Common Stock Prices*, in: Cootner, P. H. (Hrsg.), *The Random Character of Stock Market Prices*, Cambridge, Mass., 1964, S. 139 ff.; C. W. J. Granger — O. Morgenstern, *Spectral Analysis of New York Stock Market Prices*, *Kyklos*, Vol. XXI (1963), S. 1 ff.; S. S. Alexander, *Price Movements in Speculative Markets. Trends or Random Walks*, *Industrial Management Review*, Vol. II (1961), S. 7 ff.; W. Steiger, *A Test of Nonrandomness in Stock Price Changes*, in: Cootner, P. H. (Hrsg.), a.a.O., S. 253 ff.; A. B. Larson, *Measurement of a Random Process in Future Prices*, *Food Research Institute Studies*, Vol. I (1960), S. 313 ff.; B. Mandelbrot, *The Variation of Certain Speculative Prices*, *Journal of Business*, Vol. XXXVI (1963), S. 394 ff.



ein spezifisches Risiko, mit dem die Wertpapierportfeuilleplanung der Bank fertig zu werden bemüht sein muß. Das Mittel hierzu ist die „Diversifikation“ des Wertpapierbestandes, eine systematische Anlagenstreuung also, da die Realität der Anlageplanung durch ein hohes Maß an Unsicherheit über die — bei der Planung *allein* interessante — *zukünftige* Entwicklung von Branche, Gesamtwirtschaft und Kapitalmarkt bzw. Börse und damit Kursen charakterisiert ist:

1. Würden sich die Kurs- bzw. Ertragsbewegungen aller Wertpapiere vollkommen gleichläufig vollziehen (vollständige positive Korrelation; Korrelationskoeffizient<sup>9</sup> = +1), könnte keinerlei Diversifikation des Effektenbestandes Risikominderung bzw. Ausschaltung des Risikos des Totalverlustes erreichen; unbegrenzt wären auch die Gewinnmöglichkeiten.
2. Gäbe es Wertpapiere, deren Kurs- bzw. Ertragsbewegungen sich vollkommen gegenläufig verhielten (vollständige negative Korrelation; Korrelationskoeffizient<sup>9</sup> = -1), ließe sich durch entsprechende Diversifikation die Ausschaltung jeglichen Kapitalverlusttrisikos erreichen; die Risikotransformation wäre vollkommen<sup>10</sup>. Allerdings wären auch keine Gewinnmöglichkeiten mehr vorhanden<sup>11</sup>.
3. Der realitätsabbildende Fall ist der, daß sich die Kurs- bzw. Wertbewegungen von Wertpapieren in einem gewissen, oft hohen Grad an Gleichläufigkeit bewegen, aber eben doch nicht vollständig positiv korrelieren (Korrelationskoeffizient *zwischen* +1 und -1). Durch Diversifikation läßt sich das Risiko des Gesamtbestandes begrenzen, nicht jedoch ausschalten; Gewinnmöglichkeiten bestehen, sind jedoch begrenzt<sup>12</sup>.

Der letztere Fall stellt offensichtlich ein Optimierungsproblem dar: die Bestimmung optimaler Kombinationen aus erwartetem Ertrag (bzw.

<sup>9</sup> Wenn dieser, wie z. B. der von Pearson, mathematisch so definiert ist, daß er alle Werte von +1 bis -1 annehmen kann.

<sup>10</sup> Vgl. die Darstellung von H. Arnold, Risikotransformation. Finanzierungsinstrumente und Finanzierungsinstitute als Institutionen zur Transformation von Unsicherheitsstrukturen, Diss. Saarbrücken 1965.

<sup>11</sup> Man verdeutliche sich dies z. B. an dem Abschluß eines Termingeschäfts à la hausse und einem in den Bedingungen genau entgegengerichteten à la baisse.

<sup>12</sup> Bei der diversifizierenden Portfeuilleplanung mag z. B. der Fall eintreten, daß ein Wertpapier, das der Investor als *Einzelanlage* nicht erwerben würde, sich zur Aufnahme in das *Portfeuille* durchaus anbietet. Vgl. W. Neuhaus — G. Trabant, Finanzanalyse und Anlageplanung, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Jg. 38 (1968), S. 641 ff.



Gewinn) und möglichem Risiko des Anlagewertes eines Effektenbestandes. Es wäre eine nicht realitätsabbildende Prämisse impliziert<sup>13</sup>, würde ein solches Optimierungsprogramm deterministisch formuliert. Vielmehr erfordert die explizite Berücksichtigung des aus der Unsicherheit der Erwartungen resultierenden Risikos die Verwendung von Methoden, die Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie anbieten. Zwar liegen auch beim stochastischen Modell<sup>14</sup> Mengen von Mitteln und zugeordneten Entscheidungen vor, jedoch ist bei ihm jeder Anlageentscheidung als Auswirkung eine *Wahrscheinlichkeitsverteilung* und nicht mehr ein *eindeutiger* Wert — wie im deterministischen Modell — zugeordnet. Im stochastischen Entscheidungsmodell geht die für letzteres typische Existenz einer eindeutigen Zuordnung zwischen Entscheidung und Zielvariablen — die durch die Zielsetzung vorgegeben sind — verloren; die eindeutige *Maximierung* des deterministischen Falles geht in ein *Optimierungsstreben* des Anlegers über — ein Optimieren von erwartetem Ertrag und Risiko als Ausfluß der Unsicherheit der Erwartungen. Die folgende Darstellung erläutert dies ausführlich; die Problematik der Ermittlung der Eingabedaten der Optimierungsverfahren werden als Objekt der fundamentalen Wertpapieranalyse hier nicht erörtert<sup>15</sup>; sie ist gleichwohl ein Hauptproblem, hängt von ihrer „Güte“ doch (selbstverständlich) die „Qualität“ des „Output“ der Portfeuilleoptimierungsprogramme ab<sup>16</sup>.

## II. Grundlagen der Depotplanungsverfahren<sup>17</sup>

Es kann davon ausgegangen werden, daß Kreditinstitute und andere Anleger versuchen, durch geeignete „Risikokompensation“ das von ihnen

<sup>13</sup> Vgl. hierzu W. Neuhaus, Zur Planung effizienter Wertpapierportefeuilles, Diss. Köln 1968, S. 5 f.

<sup>14</sup> Vgl. hierzu J. Schwarze, Stochastische Ansätze in der Theorie der Unternehmung, Meisenheim am Glan 1967, S. 54 ff.

<sup>15</sup> Vgl. dies vielmehr bei H. E. Büschgen, Wertpapieranalyse, a.a.O.

<sup>16</sup> Vgl. zu den zugrunde liegenden mathematischen Problemen ausführlicher A. D. Martin Jr., Mathematical Programming of Portfolio Selections, Management Science, Vol. I. (1955), S. 152 ff.; N. R. Paine, Mathematical Programming in Portfolio Selection, Diss. University of Texas, 1961; allgemeiner: H. M. Weingartner, Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems, Englewood Cliffs, N. J., 1963; P. Wolfe, The Simplex-Method for Quadratic Programming, Econometrica, Vol. XXXVII (1939), S. 382 ff.

<sup>17</sup> Eine einfache Populärdarstellung der Grundgedanken der Portfolio Selection bringt P.-D. Johns, Survey of Management Techniques in Banking, in:

zu übernehmende (Rest-)Risiko auf ein gewisses, als tragbar betrachtetes Ausmaß einzugrenzen — auf ein Ausmaß, das sich nach dem Grad ihrer individuellen „Risikopräferenz“ — „Risikoneigung“ oder „Risikoaversion“ — richtet. So mag ein Kapitalanleger z. B. bestrebt sein, das Risiko aus seiner Kapitalanlage in bestimmten Aktien metallverarbeitender Unternehmen auf die Weise zu kompensieren, daß er zugleich Anteile an konkurrierenden Unternehmen der Kunststoffbranche kauft. Erwirbt er Aktien der letzteren in einer solchen Höhe, daß ein Ertrags- oder Vermögenswertrückgang aus der Anlage in Metall-Aktien gerade kompensiert wird, so hält er ein *ausgeglichenes* Portefeuille. Wenn der Anlageentscheidungsträger jedoch ein stärkeres Wachstum der Kunststoffbranche erwartet, wird er von der rein kompensatorischen Anlage abweichen und eine Vergrößerung seiner Kapitalanlage in den Kunststoffaktien vornehmen. Dabei kann der Entscheidungsträger eine solche Veränderung der Anteilsprozensätze solange fortsetzen, bis er diejenige Kombination des Gesamtportefeuilles gefunden hat, die ihn Chancen in dem Umfang erwarten läßt, daß die mit ihr verbundenen Risiken ihm gerade noch gedeckt erscheinen.

Während das „Hedging“ im Grenzfall der *gänzlichen Ausschaltung* von Risiken und Chancen — z. B. durch zwei entgegengerichtete Termingeschäfte dient —, besteht „Diversifikation“ in der *Verringerung* der Risiken und Chancen eines Portefeuilles<sup>18</sup>. Erfolgt *ersteres* durch Veränderung der Anteile von auf Grund gleicher Ursachenabhängigkeit positiv und negativ korrelierten Wertpapieren am Gesamtdepot, besteht die *Diversifikation* aus der Kombination *solcher* Einzelwertpapierpositionen, die voneinander *unabhängige* Ertragschancen und Verlustrisiken erwarten lassen.

Wenn ein Anleger derartige Wertpapiere in seinem Depot kombiniert, verringert sich mit zunehmender Anzahl der so verbundenen Einzelwertpapiere die Wahrscheinlichkeit dafür, daß hinsichtlich *sämtlicher* in das Portefeuille einbezogener einzelner Wertpapiere *zugleich* der ungünstigste Fall eintreten wird. M. a. W. ist die Wahrscheinlichkeit des *vollständigen* Verlustes des Gesamtportefeuilles geringer als die Wahrscheinlichkeit von Verlusten bei jedem einbezogenen *einzelnen* Wertpapier. Oder, noch an-

---

Operations Research (hrsg. v. d. American Bankers' Association), New York 1965, S. 56 ff. Ich habe in der August-Ausgabe (Heft 8, 1967 S. 51 ff.) des Wirtschaftsmagazins „Capital“ ebenfalls eine einfache Grundlagendarstellung gegeben.

<sup>18</sup> Vgl. H. Arnold, a.a.O., S. 84 ff.

ders ausgedrückt: Je höher die Anzahl der verschiedenen Wertpapiere in einem Portefeuille ist, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses, das *alle* Einzelpositionen negativ beeinflusst.

Folgendes einfache Beispiel soll das Gesagte verdeutlichen<sup>19</sup>: Es sollen in ein Portefeuille zunächst nur zwei verschiedene Aktienpositionen  $X_i$  und  $X_j$  aufgenommen werden. Man ermittelt, daß für  $X_i$  mit der Wahrscheinlichkeit  $w$  (‰) ein *günstiges* Ergebnis erwartet werden kann. Da die Summe der Wahrscheinlichkeitsprozente 100 ‰ ausmachen muß, ist für  $X_j$  mit der Wahrscheinlichkeit  $(100 - w)$  (‰) ein *ungünstiges* Ergebnis zu erwarten. Die Struktur der mit  $X_i$  in dem Portefeuille vereinigten Aktien  $X_j$  soll die gleichen Wahrscheinlichkeiten aufweisen. Wenn man mit  $g$  die günstigen, mit  $u$  die ungünstigen Ergebnisse bezeichnet, ergeben sich für das Depot folgende *möglichen* Ergebnisse und Wahrscheinlichkeiten des Eintretens dieser Ergebnisse:

Fall	mögliche Resultate	Wahrscheinlichkeiten des Eintretens dieser Resultate
1	$g + g = 2g$	$w^2$
2	$g + u$	$2w(1 - w)$
3	$u + u = 2u$	$(1 - w)^2$

Es sei nunmehr angenommen, daß bei den beiden voneinander unabhängigen Aktienpositionen mit einer Wahrscheinlichkeit von  $w = 0,75 = 75$  ‰ eine Einheit zu gewinnen oder mit einer Wahrscheinlichkeit von  $(1 - w) = 0,25 = 25$  ‰ der achtfache Betrag zu verlieren sei<sup>20</sup>:

<sup>19</sup> Nach ebenda, S. 85 f. Vgl. auch A. G. Hart, Risk, Uncertainty, and the Unprofitability of Compounding Probabilities, in: Readings in the Theory of Income Distribution, London 1950, S. 547 ff.; ders.: Anticipations, Uncertainty, and Dynamic Planing, New York 1951.

<sup>20</sup> Es werden verwendet:

- a) das Multiplikationsgesetz für zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten, wonach für ein Ereignis, dessen Eintreten sich aus dem Eintritt mehrerer Teilergebnisse ergibt, die (zusammengesetzte) Wahrscheinlichkeit seines Eintretens gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Teilergebnisse ist. Zur ebenfalls zu verwendenden Binomial-Verteilung vgl. weiter unten;
- b) das Additionsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wonach für zwei sich



1. Besteht das Depot in Höhe von je der Hälfte aus den beiden Aktienbeständen, so besteht
  - a) die Möglichkeit eines Gewinns in Höhe von 1 mit einer Wahrscheinlichkeit in Höhe von  $0,5625 (= 0,75 \cdot 0,75)$ , also von  $56\frac{1}{4}\%$ ;
  - b) die Möglichkeit eines Verlustes in Höhe von  $3,5^{21)}$  mit einer Wahrscheinlichkeit von  $0,375 [= 2 \cdot 0,75 (1 - 0,75)]$ , also von  $37\frac{1}{2}\%$ ;
  - c) die Möglichkeit eines Totalverlustes in Höhe von 8 mit einer Wahrscheinlichkeit von  $0,0625 [= 1 - 0,75]^2$  also von  $6\frac{1}{4}\%$ .
2. Würde sich nun das Depot bei gleichem Kapitaleinsatz wie beim vorhergehenden Fall aus *drei* verschiedenen Aktienposten in Höhe von je einem Drittel des Gesamtbetrags zusammensetzen, so bestände<sup>22</sup>
  - a) die Möglichkeit eines Gewinns von 1 mit einer Wahrscheinlichkeit von  $0,75^3 = 0,421875$  oder  $42,1875\%$ ;
  - b) die Möglichkeit eines Verlustes von  $2^{23)}$  mit einer Wahrscheinlichkeit von  $0,421875$ , also von  $42,1875\%$ ;
  - c) die Möglichkeit eines Verlustes von  $5^{24)}$  mit einer Wahrscheinlichkeit von  $0,140625$ , also von  $14,0625\%$ ;
  - d) die Möglichkeit eines Totalverlustes von 8 mit einer Wahrscheinlichkeit von  $(1 - 0,75)^3 = 0,25^3 = 0,015625$ , also von  $1,5625\%$ .

Diese Beispiele beleuchten den Diversifikationseffekt; er zeigt sich bei einer Fortsetzung dieser Reihe durch immer stärkere Diversifikation noch klarer. Beispiele und Fortführung der Reihe ergeben<sup>25</sup>, in welchem Verhältnis die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens des ungünstigsten Ereignisses, nämlich des Verlustes des *gesamten* Vermögenswertes bzw. Kapitaleinsatzes, unter den genannten Prämissen sinkt. Allerdings ergibt sich aus den Beispielen unter der Reihenfortführung auch, daß gleichfalls die

---

gegenseitig ausschließende (nicht zusammen eintreffen könnende) Ereignisse  $g$  und  $u$  mit den Wahrscheinlichkeiten  $w_g$  und  $w_u$  die Wahrscheinlichkeit, daß entweder  $g$  oder  $u$  eintritt,  $(w_g + w_u)$  ist.

$$^{21} \quad \frac{g + u}{2} = \frac{1 - 8}{2} = -3,5$$

$$^{22} \quad 3g, 2g + u, g + 2u, 3u.$$

$$^{23} \quad \frac{g + g + u}{3} = \frac{1 + 1 - 8}{3} = -2$$

$$^{24} \quad \frac{g + u + u}{3} = \frac{1 - 8 - 8}{3} = -5$$

<sup>25</sup> Vgl. H. Arnold, a.a.O., S. 86 f.

Wahrscheinlichkeit zum Erzielen eines *Maximalgewinns* zurückgeht. Vielmehr werden *die* Ereignisse eintretenswahrscheinlicher, die *zwischen* den beiden Extremen — Totalverlust und Maximalgewinn — liegen. Diese Tatbestände kennzeichnen zugleich auch den Grundgedanken, der das Prinzip der Investmentfonds ausmacht oder ausmachen sollte: Verminderung des Risikos des Extremverlustes durch Risikostreuung bei Erzielen eines angemessenen Ertrags.

Die Ermittlung des Diversifikationseffekts in Gestalt der (zusammengesetzten) Wahrscheinlichkeiten des Eintreffens der verschiedenen Gewinn- und Verlustkonstellationen, die für den Vermögensverwalter (z.B. Investmentgesellschaft), der nach dem Diversifikationsprinzip vorgeht, zu kennen von besonderer Wichtigkeit ist, kann mit Hilfe der binomialen oder Bernouillischen Verteilung aufgezeigt werden (so in obigen Beispielen). Danach ist die Wahrscheinlichkeit  $W$  dafür, daß zwei unabhängige Ergebnisse  $g$  und  $u$  mit den Wahrscheinlichkeiten  $w$  und  $(1 - w)$  gleichzeitig oder nacheinander eintreten:

$$(II.1) \quad W = w (1 - w)$$

Weiter ist die Wahrscheinlichkeit  $W$  dafür, daß von zwei unabhängigen Ereignissen  $g$  und  $u$  mit den Wahrscheinlichkeiten  $w$  bzw.  $(1 - w)$  das Ereignis  $g$   $n$ -mal und das Ereignis  $u$   $m$ -mal in bestimmter Reihenfolge eintrifft,

$$(II.2) \quad W = w^n (1 - w)^m$$

Ist die Reihenfolge beliebig, wie im hier zur Debatte stehenden Diversifikationsfall, so ist<sup>26</sup>

$$(II.3) \quad W = \frac{(n + m)!}{n! m!} w^n (1 - w)^m$$

Setzt man

$$(II.4) \quad n + m = N$$

so folgt aus (II.3)

$$(II.5) \quad W = \frac{N!}{n! (N - n)!} w^n (1 - w)^{N - n} = \binom{N}{n} w^n (1 - w)^{N - n}$$

Ferner ist noch auf die Beziehungen hinzuweisen, daß, wenn die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses für einen einzelnen Fall (eine einzelne

---

<sup>26</sup>  $n!$  bedeutet das Produkt  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$  (wo  $n$  eine ganze positive Zahl ist).

Aktienposition)  $w$  ist, die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis  $n$ -mal bei  $N$  unabhängigen Fällen (innerhalb des Gesamtportefeuilles) eintritt,

$$(II.6) \quad W = \binom{N}{n} w^n q^{N-n}$$

beträgt, wo  $q = (1 - w)$  (Newtonsche Formel).

Ist die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Ereignisses klein und die Anzahl der Fälle insgesamt groß, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei  $N$  unabhängigen Fällen das betreffende einzelne Ereignis  $n$ -mal eintritt,

$$(II.7) \quad W = \frac{(N \cdot w)^n}{n!} e^{-Nw}$$

(Poissonsche Verteilung)<sup>27</sup>.

Von den  $n$  einander ausschließenden Ereignissen allgemein schließlich mit den Wahrscheinlichkeiten  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$  möge eines eintreten ( $w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n = 1$ ). Wenn der Eintritt des Ereignisses  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) den Ertrag  $R_i$  bringt — der auch gleich Null oder negativ, also ein Verlust sein kann —, so ist

$$(II.8) \quad S_i = R_1 w_1 + R_2 w_2 + \dots + R_n w_n$$

als der mathematische Erwartungswert  $E(R)$  definiert.  $E$  ist hier der Wert, dem der durchschnittliche Gewinn mit steigender Zahl der Fälle bei gleichen Bedingungen zustrebt.

Die systematische Nutzbarmachung der vorstehenden Ausführungen zur Diversifikation eines Wertpapierportefeuilles erfolgt im Rahmen der Theorie und der Praxis der „Portfolio Selection“ in Gestalt eines im Hinblick auf die Rendite und Risiko optimal „gestreuten“ Wertpapierdepots<sup>28</sup>.

Es wird davon ausgegangen, daß der planende Anleger (Kreditinstitut, Investmentfonds) über einen bestimmten in Wertpapieren anzulegenden Kapitalbetrag verfügt. Die Anlage erfolgt nach der Handlungsmaxime des erwerbswirtschaftlichen Prinzips: Erzielung eines möglichst hohen (maximalen) Gewinns aus der Anlage, in welchem Verhältnis aus

<sup>27</sup>  $e$  = Eulersche Zahl = 2,71828... (= Basis der natürlichen Logarithmen).

<sup>28</sup> Vgl. auch P. Massé, Optimal Investment Decisions. Rules of Action and Criteria for Choice, Englewood Cliffs 1962.



Gewinnausschüttungen<sup>29</sup> und/oder Kursgewinnen er auch bestehen mag; entscheidend ist lediglich der von Periode zu Periode steigende Kapitalwert des Effektendepots. Definiert wird daher in den Portfeuilleauswahlmodellen der Ertrag des Depots als

$$(II.9) \quad R_j = P_j(t+1) - P_j(t) + D_j(t)^{30}$$

Kurswert zu Ende der Periode — Kurswert zu Beginn der Periode +  
Gewinn-(etc.)ausschüttungen in der Periode

bzw. die Rendite des Portfeuillees als

$$(II.10) \quad r_j = \frac{P_j(t+1) - P_j(t) + D_j(t)}{P_j(t)}$$

Kurswert zu Ende der Periode — Kurswert zu Beginn  
der Periode + Gewinn-(etc.)ausschüttungen in der Periode  
Kurswert zu Beginn der Periode

Die zu behandelnden Depotselektionsmodelle verwenden letzteren Renditen Ausdruck; dies ist, wenn im folgenden vom Portfeuille-Ertrag gesprochen wird, zu beachten.

Die vorgenannte Maximierungshandlungsweise beschreibt das Anlegerverhalten jedoch noch nicht vollständig. Vielmehr wird der Anleger (das Kreditinstitut) bemüht sein, seinen Anlagebestand vor Verlust- und Kursrisiken möglichst zu schützen, also nicht Ertrag „um jeden Preis“ suchen, sondern im Sinne einer seiner Sicherheitspräferenz bzw. Risikoaversion bzw. Risikopräferenz entsprechenden Strategie handeln, d. h. das Verlust- oder Kursrisiko zu begrenzen suchen. Da jede einzelne Wertpapieranlage mit Gewinnchancen und Verlustrisiken — meist wird von einem Proportionalverhältnis zwischen beiden ausgegangen — behaftet ist, „bündeln“<sup>31</sup> sich diese innerhalb des Gesamtwertpapierbestandes, d. h. auch das Portfeuille läßt sich als eine Kombination aus Gewinnerwartungen und Verlustrisiken definieren. Für das anlageplanende Kreditinstitut stellt sich die Aufgabe, aus allen überhaupt „möglichen“ derartigen Kombinationen von Erträgen und Risiken diejenigen herauszufinden,

<sup>29</sup> Um im folgenden zu vereinfachen, seien für den Fall der Einbeziehung festverzinslicher Wertpapieranlagen hierunter die Zinszahlungen mitverstanden.

<sup>30</sup> Die Bedeutung der Symbole ergibt sich aus der verbalen Form der Gleichung;  $t$  ist die betreffende Periode (z. B. 1 Jahr),  $t+1$  bezieht sich auf das Ende der laufenden Periode  $t$  bzw. den Anfang der nächsten Periode.

<sup>31</sup> Man beachte, daß „bündeln“ *nicht* „addieren“ oder „summieren“ bedeutet.

die bei einem bestimmten (noch gerade) in Kauf genommenen Risikograd ein Maximum an Ertrag bieten, oder diejenigen Ertrag-Risiko-Kombinationen, die bei einem bestimmten (mindestens) geforderten Ertrag ein minimales Risiko beinhalten. Solche Kombinationen sind „optimale“<sup>32</sup> Portefeuilles oder Depots. Alle die *möglichen* Kombinationen, die die vorgenannten Qualifikationen nicht aufweisen, sind „nichtoptimale“<sup>33</sup>. Sie lassen sich durch geeignete weitere *Diversifikationsmaßnahmen* in optimale Kombinationen (Wertpapierportefeuilles) umwandeln. Schematisch werden diese Zusammenhänge in Abb. 1 erläutert<sup>34</sup>.

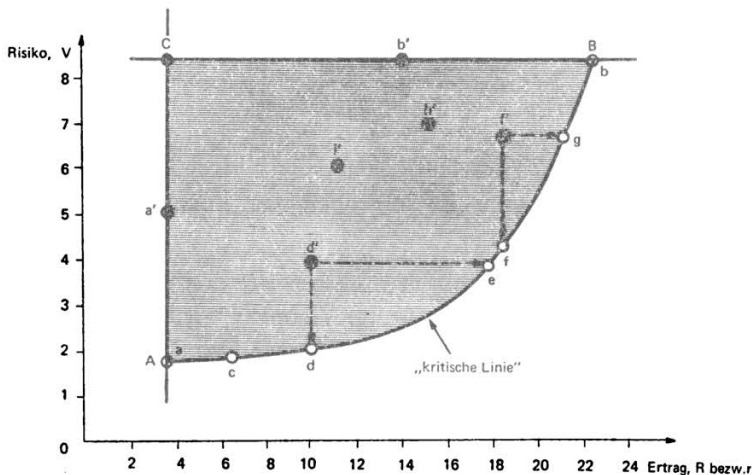


Abbildung 1: Mögliche und optimale Wertpapierportefeuilles

In Abb. 1 umgrenzt die Linienführung *ABCA* den Bereich der auf Grund der verfügbaren Anlagen überhaupt möglichen Ertrag-Risiko-Kombinationen bzw. Wertpapierportefeuilles. Aus der — theoretisch unbegrenzten<sup>35</sup> — Anzahl *möglicher* Portefeuilles sind beispielhaft die

<sup>32</sup> Die angelsächsische Terminologie spricht von „efficient“.

<sup>33</sup> Die angelsächsische Terminologie spricht von „inefficient“.

<sup>34</sup> H. *Stevenson*, Elektronische Datenverarbeitung in Kreditinstituten, Berlin 1968, S. 108.

<sup>35</sup> Praktisch auf Grund der nicht beliebigen Teilbarkeit von Wertpapieranlagen nur begrenzten, jedoch meist recht großen Anzahl.

durch Punkte gekennzeichneten möglichen Kombinationen bestimmter Erträge mit bestimmten Risiken  $a, b, c, d, e, f, g, a', b', d', f', b'$  und  $i'$  herausgehoben worden. Von diesen *möglichen* Portefeuilles bezeichnen die Kombinationen  $a, b, c, d, e, f$  und  $g$  *optimale* Portefeuilles, denn sie erfüllen die oben genannten Kriterien, sind aber andererseits nicht durch weitere Diversifikation „verbesserbar“: Es gibt kein mögliches Portefeuille, das geringeres Risiko als die Kombination  $a$ , und kein mögliches Portefeuille, das höheren Ertrag als die Kombination  $b$  erwarten ließe; weiter gibt es keine möglichen Portefeuilles, die bei der jeweiligen Ertragserwartung niedrigere Risiken bzw. bei den jeweiligen Risiken höhere Erträge als die Kombinationen  $c, d, e, f$  und  $g$  erwarten ließen. Diese und alle weiteren optimalen Portefeuilles liegen auf der Linie  $\overline{AB}$ , die als „kritische Linie“ bezeichnet wird und den geometrischen Ort für alle Ertrag-Risiko-Kombinationen bildet, welche in bezug auf diese beiden Komponenten mögliche *und* optimale Wertpapiermischungen (-portefeuilles, -depots) darstellen. Die durch  $a', b', d', f', b'$  und  $i'$  gekennzeichneten und ebenfalls nur beispielhaft herausgehobenen Kombinationen sind zwar *mögliche*, jedoch *nichtoptimale* Portefeuilles: Sie sind durch weitere Diversifikation — was nicht unbedingt mit rein zahlenmäßig stärkerer Streuung identisch ist — „verbesserbar“, nämlich optimierbar. Dies sei an den Portefeuilles  $d'$  und  $f'$  aufgezeigt: Will man den durch  $d'$  bzw.  $f'$  gekennzeichneten Risikograd (4 bzw. 6,5<sup>36</sup>) in Kauf nehmen, so ist durch geeignete — und *mögliche* — weitere Diversifizierung in den Wertpapieren der Portefeuilles höherer Ertrag (höhere Rendite) erreichbar (statt 10 bei  $d'$  18 bzw. statt 18,25 bei  $f'$  20,5); verfährt man so, ergeben sich die *optimalen* Kombinationen  $e$  bzw.  $g$ . Ist man andererseits mit den Ertragserwartungen (10 bzw. 18) zufrieden, so ist durch geeignete weitere Diversifikationen ein geringerer Risikograd erreichbar (statt 4 bei  $d'$  2 bzw. statt 6,5 bei  $f'$  4,25); verfährt man so, erhält man die *optimalen* Portefeuilles  $d$  bzw.  $f$ . Entsprechend lassen sich alle anderen *möglichen nichtoptimalen* Portefeuilles *optimal* gestalten. Grenzfälle sind die nichtoptimalen Portefeuilles  $a'$  und  $b'$ . Die Kombination  $a'$  liegt auf der Begrenzungslinie  $\overline{AC}$ , die den Ertrag angibt, der auf jeden Fall — ohne Berücksichtigung der Risikohöhe — bei den möglichen Portefeuillekonstellationen erwartet werden kann<sup>37</sup>;  $a'$  ist zwar optimierbar, jedoch nur in der Risikokomponente (auf 15 statt 5, d. h. auf  $a$ ). Entsprechend ist es mit allen anderen auf  $\overline{AC}$  liegenden nichtoptimalen Kombinationen.

<sup>36</sup> Auf den Maßstab des Risikos ist weiter unten einzugehen.

<sup>37</sup> Genau genommen: notwendig erwartet werden *muß*.



Das durch  $b'$  bezeichnete Portefeuille liegt auf der Begrenzungslinie  $\overline{CB}$ , die das erwartete Risiko angibt, das bei den möglichen Portefeuillekonstellationen in keinem Fall überschritten werden kann;  $b'$  ist zwar optimierbar, jedoch nur in der Ertragskomponente (auf 22 statt auf 14, d. h. auf  $b$ ). Entsprechend ist es mit allen anderen auf  $\overline{CB}$  liegenden nicht-optimalen Kombinationen aus Ertrag und Risiko.

Die dritte und letzte Grundannahme der Optimierungsmodelle besteht darin, daß der Anleger eine stetige Anlagepolitik und keine kurzfristige Spekulation verfolgt. Kurzfristige Kursbewegungen werden also nicht laufend ausgenutzt. Im Grunde dienen die Anlageprogramme also den Interessen des nicht spekulativen, u. U. „konservativen“ Investors. Für ein Kreditinstitut und den normalen Investmentfonds dürfte dies in den eingangs gekennzeichneten Bereichen meist eine realitätsabbildende Prämisse sein.

Allgemein ist darauf hinzuweisen, daß die Portefeuilleauswahl-Theorie im Grunde eine spezifische Anwendung der von F. und V. Lutz in ihrer bekannten Arbeit gelegten allgemeinen Grundlagen ist<sup>38</sup>.

### III. Die Analyse- bzw. Eingabedaten

#### 1. Ertragserwartung und Risiko bei der optimalen Portefeuilleplanung

Es gilt zunächst, die Begriffe erwarteter Ertrag und Risiko eines Wertpapierbestandes in operationaler Weise zu quantifizieren<sup>39</sup>.

##### a) Ertragserwartung

Der Ertrag eines Wertpapiers wird als zufällige Variable  $r_i$  definiert, wobei diese eine endliche Anzahl von Werten annehmen kann, d. h.  $r'_{i1}, r'_{i2}, \dots, r'_{in}$ . Da für die Problemstellung nur der *zukünftige, zu erwartende* Ertrag von Interesse ist — Kapitalanlagen erfolgen mit dem Blick auf die Zukunft — und sich ein Erwartungswert allgemein aus der Multiplikation der betreffenden Variablen mit ihrer zugehörigen, d. h. ihr von dem Analytiker nach seiner subjektiven, jedoch bestmöglichen Schätzung

<sup>38</sup> Vgl. F. Lutz — V. Lutz, *The Theory of Investment of the Firm*, Princeton 1951.

<sup>39</sup> Vgl. im folgenden H. M. Markowitz, *Portfolio Selection. Efficient Diversifikation of Investments*, New York—London, S. 70 ff., 80 ff., 90 ff., zu Einzelheiten und Begründungen.

beigelegten „Glaubwürdigkeit“ oder ihrer „Wahrscheinlichkeit“ ergibt, erhält man, wenn man jenen möglichen Werten der Ertragsvariablen ihre geschätzten Wahrscheinlichkeiten  $w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in}$  „beilegt“, den Ertrags-erwartungswert  $E(r_i)$  des  $i$ -ten Wertpapiers:

$$(III.1) \quad E(r_i) = w_{i1} r'_{i1} + w_{i2} r'_{i2} + \dots + w_{in} r'_{in}$$

Für den *gesamten*, aus  $n$  Effekten bestehenden Wertpapierbestand, d. h. für das *Portefeuille*, ergibt sich die Ertragserwartung als gewichtete Summe der Erträge der einbezogenen Einzelwertpapiere, wobei als Gewichte die Anteile der einzelnen Wertpapiere am Gesamtbetrag des Depots dienen<sup>40</sup>. Da  $r_i$  als Zufallsvariable verstanden wird, ist auch der Portefeuilleertrag  $R_p$  eine solche, und sein Erwartungswert  $E(R_p)$  beträgt

$$(III.2) \quad E(R_p) = X_1 E(r_1) + X_2 E(r_2) + \dots + X_n E(r_n) = \sum_{i=1}^n X_i E(r_i)$$

wo  $X_i$  den Anteil des  $i$ -ten Wertpapiers am Gesamtportefeuillebestand bezeichnet.

#### b) (Ertrags-)Risiko

Die Einführung von Wahrscheinlichkeiten („Glaubwürdigkeiten“) bzw. Wahrscheinlichkeitsverteilungen für den Wertpapierertrag trägt dem Tatbestand Rechnung, daß auf Grund der Unsicherheit künftiger Erwartungen der geschätzte Ertrag *eines* Wertpapiers wie eines Wertpapierbestandes eine mit dem Makel der Ungewißheit behaftete Größe ist. Die Quantifizierung von Risiken ist problematischer als die der Erträge. Das Portefeuilleoptimierungsproblem läßt sich mit Hilfe der Varianz am zweckmäßigsten formulieren, wobei die Kovarianz hinzukommt.

(1) *Die Varianz.* Die Varianz<sup>41</sup>  $\sigma_i^2$  als Risikomaß hinsichtlich des Er-

<sup>40</sup> Vgl. auch D. D. Hester — J. F. Zoellner, The Relation between Bank Portfolios and Earnings. An Econometric Analysis, Review of Economics and Statistics, 1966, S. 372 ff.

<sup>41</sup> Die Varianz  $\sigma^2$  als statistisches Streuungsmaß (von Einzelwerten um ihren Mittelwert) ist allgemein definiert, wenn  $n$  Einzelwerte  $a_1, a_2, \dots, a_n$  gegeben sind, als

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2}{n - 1}$$

wobei  $\bar{a}$  das arithmetische Mittel der Werte  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ist. Zieht man die

tragserwartungswertes eines  $i$ -ten Wertpapiers ist definiert als

$$(III.3) \quad \sigma_i^2 = \sigma_{ii}^2 = w_{i1} [r'_{i1} - E(r_i)]^2 + w_{i2} [r'_{i2} - E(r_i)]^2 + \dots + w_{in} [r'_{in} - E(r_i)]^2$$

Die Varianz  $V = \sigma_{Rp}^2$  = das Risiko der Ertragserwartung des *gesamten* Wertpapierbestandes, also des Portefeuilles, läßt sich im Gegensatz zu seiner Ertragserwartung selbst nicht als *lineare* Verbindung der Einzelwertpapier-Varianzen darstellen. Vielmehr ist der erwähnte Tatbestand zu berücksichtigen, daß zwischen den Entwicklungen der meisten Wertpapiererträge im Zeitablauf ein gewisser Grad an Gleichläufigkeit, an positiver Korrelation, existiert, woraus sich ein spezifisches Portefeuille-Risiko ergibt. Man erfaßt es mit Hilfe der Kovarianz.

(2) *Die Kovarianz.* Die Einführung der Kovarianz ist eines der wesentlichsten Elemente der „Portfolio Selection“-Theorie. Die Kovarianz gibt allgemein an, in welchem Grade zwei als zufällige Variablen definierte Größen sich gleichzeitig gleich- oder entgegengerichtet bewegen. Die Kovarianz  $\kappa$  oder  $\sigma_{ij}$  für ein „Wertpapierpaar“, d. h. zwischen den als zufälligen Variablen definierten Wertpapiererträgen  $r_i$  und  $r_j$  (also des  $i$ -ten und des  $j$ -ten Wertpapiers im Gesamtbestand), ist definiert als

$$(III.4) \quad \kappa(r_i r_j) = \sigma_{ij} = E \{ [r_i - E(r_i)] [r_j - E(r_j)] \}$$

Dieser Ausdruck beinhaltet hier folgendes:

(1) Bewegen sich die Erträge des Wertpapiers  $i$  als auch  $j$  gleichzeitig<sup>42</sup> auf- oder abwärts, so ergibt die Kovarianz einen positiven Wert. Sind die Kovarianzen aller in einem Portefeuille zusammengefaßten Effekten hoch positiv, so kommt dem Anleger eine günstige Ertragsentwicklung der Titel voll zugute, wie er aber umgekehrt bei ungünstigen Entwicklungen volles Verlustrisiko zu tragen hat. Ein (optimal) diversifiziertes Portefeuille liegt nicht vor.

(2) Vereinigen sich in einem Portefeuille Wertpapiere, für die der effektiv eintretende Wert der zufälligen Variablen  $r_i$  ohne jeden Einfluß auf den tatsächlichen Wert von  $r_j$  ist, also keinerlei Abhängigkeiten zwischen den Ertragsentwicklungen der beiden durch sie verkörperten Unternehmen bestehen und Marktkursbewegungen keinen Einfluß auf

---

Quadratwurzel der Varianz, so erhält man die Standardabweichung  $\sigma$  als ebenfalls oft benutztes Streuungsmaß.

<sup>42</sup> Nicht unbedingt in gleicher Weise.



die Bewegungsrichtungen der Erträge der Titel nehmen, so fallen tatsächliche und erwartete Erträge zusammen, so daß mit  $[r'_i - E(r_i)] = 0$  auch die Kovarianz Null sein muß. Dieser realitätsfremde Fall ließe also kein derartiges Portefeullerisiko entstehen.

(3) Wenn der Ertrag des Wertpapiers  $i$  positive, der des Titels  $j$  negative Abweichungen von seinem Erwartungswert aufweist, ergibt sich als Beschreibung der gemeinsamen Entwicklungsrichtungen beider Titel eine negative Kovarianz. Dieser Fall impliziert für einen Gesamtwertpapierbestand, der viele solchermaßen charakterisierter Titel kombiniert, daß zwar kein maximaler Ertrag erreichbar, aber unter Berücksichtigung des hier gewährleisteten u. U. recht hohen Maßes an Verlustabsicherung ein unter den genannten Kriterien optimales Portefeulle realisierbar ist.

Unter Berücksichtigung des durch die Kovarianzen gemessenen Portefeullerisikos stellt sich die Varianz (das Gesamtrisiko)  $V$  des Portefeulles auf

$$(III.5) \quad V = X_1 X_2 \sigma_{11} + X_1 X_2 \sigma_{12} + \dots X_1 X_n \sigma_{1n} + X_2 X_1 \sigma_{21} + X_2 X_2 \sigma_{22} + \dots \\ + X_2 X_n \sigma_{2n} + X_i X_1 \sigma_{i1} + X_i X_2 \sigma_{i2} + \dots + X_i X_n \sigma_{in} + X_n X_1 \sigma_{n1} + \dots \\ + X_n X_2 \sigma_{n2} + \dots + X_n X_n \sigma_{nn} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij}$$

und, da  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  ist,

$$(III.6) \quad V = X_1^2 \sigma_{11} + X_2^2 \sigma_{22} + \dots + X_n^2 \sigma_{nn} + 2 X_1 X_2 \sigma_{12} + 2 X_1 X_3 \sigma_{13} + \dots \\ + 2 X_1 X_n \sigma_{1n} + 2 X_2 X_3 \sigma_{23} + \dots + 2 X_2 X_n \sigma_{2n} + \dots \\ + 2 X_{n-1} X_n \sigma_{n-1 n} = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sigma_{ii} + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij}$$

Dies bedeutet, daß das  $i$ -te Wertpapier an Risiko zum Gesamtportefeulle

$$(III.7) \quad X_i^2 \sigma_{ii} + 2 \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij} \quad (i \neq j; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n)$$

beiträgt. Wesentlich ist hierbei der zweite Summand; der Risikobeitrag des  $i$ -ten Titels ist, soweit durch die Varianz gemessen, niedrig, insbesondere, wenn bei einer großen Zahl im Portefeulle kombinierter Wertpapiere der auf den einzelnen Titel entfallende Kapitalbetrag als geringfügig angesehen werden kann<sup>43</sup>.

<sup>43</sup> Vgl. W. Neuhaus, a.a.O., S. 18.

#### IV. Das Optimierungsprogramm

Entsprechend den bisherigen Erkenntnissen stellt sich für das anlageplanende Kreditinstitut die Aufgabe, Wertpapiere mit dem zur Verfügung stehenden Kapitalbetrag zu erwerben, deren gegenseitige Durchschnittskovarianzen möglichst gering sind, so daß durch ihre Kombination bei vorgegebenem (gefordertem) Ertragserwartungswert die Portefeuillevarianz, d. h. das Risiko des Effektenbestandes, minimiert wird. Die Optimierungsaufgabe lautet somit:

$$(IV.1) \quad V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij} \rightarrow \min!$$

d. h. es ist eine quadratische, also nicht lineare Zielfunktion zu minimieren<sup>44</sup>, wobei lineare Nebenbedingungen folgender Art zu berücksichtigen sind:

$$(IV.2) \quad \sum_{i=1}^n X_i E(r_i) = E^*$$

wonach eine bestimmte Mindestertragshöhe  $E^*$  erzielt werden muß; dazu

$$(IV.3) \quad \sum_{i=1}^n X_i = 1$$

wonach der gesamte dafür verfügbare Mittelbetrag anzulegen ist; weiter

$$(IV.4) \quad X_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

wonach keine negativen Portefeuilleanteile vorkommen dürfen, d. h. z. B. Leerverkäufe ausgeschlossen werden, eine übliche, jedoch nicht unbedingt erforderliche Restriktion<sup>45</sup>. Sind schließlich auf Grund gesetzlicher (s. Gesetz über Kapitalanlagegesellschaften, § 7 Abs. 3 S. 1), statutarischer oder geschäftspolitischer Anweisungen Höchstanteile für die

<sup>44</sup> Zum Lösungsalgorithmus solcher Probleme vgl. G. B. Dantzig, *Lineare Programmierung und Erweiterungen*, Berlin—Heidelberg—New York 1966, S. 569 ff., und ders.: *The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints*, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. III (1956), S. 111 ff.

<sup>45</sup> Dieser Gesichtspunkt wird einbezogen bei D. D. Hester, *Efficient Portfolios with Short Sales and Margin Holdings*, in: Hester, D. D. — Tobin, J. (Hrsg.), *Risk Aversion and Portfolio Choice*, New York—London—Sidney 1967, S. 41 ff.

einzelne Effektenanlage zu beachten, kommt als weitere Nebenbedingung für das Programm

$$(IV.5) \quad X_i \leq h$$

in Frage, wobei  $h$  diesen Höchstanteil — in v. H. des Gesamtanlagebetrages — bezeichnet.

Sollen z. B. — um ein vereinfachendes Beispiel anzuführen — nur drei Wertpapiere in einem optimalen Portefeuille vereinigt werden, so läßt sich das Programm so formulieren:

$$V_3 = \sigma_3^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 X_i X_j \sigma_{ij} \rightarrow \min!$$

unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen:

$$E_3 = \sum_{i=1}^3 X_i E(r_i)$$

$$\sum_{i=1}^3 X_i = 1$$

$$X_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Da  $X_3 = 1 - X_1 - X_2$ , stellen sich Ertragserwartung und Varianz (Risiko) des Portefeuilles auf

$$E_3 = E(r_3) + X_1 E(r_1) - X_1 E(r_3) + X_2 E(r_2) - X_2 E(r_3)$$

$$V_3 = \sigma_3^2 = X_1^2 (\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}) + X_2^2 (\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2 X_1 X_2 (\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2 X_1 (\sigma_{13} - \sigma_{33}) + 2 X_2 (\sigma_{23} - \sigma_{33}) + \sigma_{33}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Depotetrags<sup>46</sup> schließt nun *negative* Gewinne (= Verluste) in der Wertpapieranlage nicht aus; solche können unter Umständen in mehreren Perioden auftreten. Unter Verwendung der Produktregel für unabhängige Ereignisse (es bestehe stochastische Unabhängigkeit der einzelnen Perioden) ergibt sich als Wahr-

<sup>46</sup> Vgl. auch A. D. Roy, *Safety First and the Holding of Assets*, *Econometrica*, 1952, S. 431 ff.; R. A. D. Egerton, *The Holding of Assets: "Gambler's Preference" or "Safety First"?*, *Oxford Economic Papers*, Vol. 8 (1956), S. 51 ff.; L. G. Telser, *Safety First and Hedging*, *Review of Economic Studies*, Vol. XXIII (1955/56), S. 1 ff.



scheinlichkeit  $w$  des Auftretens negativer Gewinne in Höhe von  $R_i$  ( $i = 1, 2, \dots, t$ ) in  $t$  aufeinander folgenden Perioden

$$(IV.6) \quad w \left( \sum_{i=1}^m R_i^- \right) = \prod_{i=1}^m w R_i^-$$

Will die anlegende Bank bzw. der Anleger das Auftreten solcher negativen Erträge im Interesse der Erhaltung seiner Effektivsubstanz völlig ausschließen, so ist als zusätzliche, sehr restriktiv wirkende Nebenbedingung

$$(IV.7) \quad w_E(R < 0) = 0$$

zu setzen. Realistischer erscheint indessen eine Anlagenverhaltensweise<sup>47</sup>, die sich mit Maximalgrenzen von Verlustwahrscheinlichkeiten begnügt. In diesem Falle kommen als Nebenbedingungen in Frage entweder

$$(IV.8) \quad E(R|R < 0) > z_1,$$

wonach der Erwartungswert negativer Erträge einen bestimmten festzusetzenden (konstanten) Wert  $z_1$  nicht unterschreiten darf, oder

$$(IV.9) \quad F_R(0) < z_2,$$

( $F_R$  = Verteilungsfunktion der zufälligen Variablen  $R$ ), wonach die Wahrscheinlichkeit des Auftretens negativer Erträge kleiner als der festzusetzende (konstante) Wert  $z_2$  sein muß; oder

$$(IV.10) \quad F_R(z_3) = 0, \quad z_3 < 0,$$

wonach negative Erträge, die niedriger als  $z_3$  sind, unzulässig sind.

Die Portefeuille-Auswahl-Modelle minimieren  $m$ . W. sämtlich das Portefeuille-Risiko für bestimmte Ertragsniveaus; die Programme lassen sich auch auf eine Maximierung des Portefeuille-Ertrags bei bestimmten Risikograden abstellen. Zwar läßt sich Risikoverhalten niemals vollständig objektivieren, doch bedeutet das Verfahren, bei fixem Erwartungswert die Varianz oder die Standardabweichung zu minimieren bzw. bei fester Varianz den maximalen Erwartungswert auszuwählen (optimale Depots), die Definierung eines in begrenztem Umfange „objektiven“ Risikoverhaltens.

<sup>47</sup> Vgl. dies allgemein bei J. Schwarze, a.a.O., S. 66 f.

## V. Grundzüge der Depot-Selektions-Modelle

### 1. Überblick

Um die *Markowitz-Technik* anzuwenden, muß sich der Analytiker Erwartungen über die zukünftige Entwicklung sämtlicher Wertpapiere des zu berücksichtigenden Gesamtbestandes bilden. Diese Erwartungen umfassen nicht nur den erwarteten Ertrag und die Varianz des Ertrags für jedes Wertpapier, sondern außerdem die Kovarianzen zwischen allen „Wertpapierpaar“, d. h. zwischen je zwei Titeln. Dieses Erfordernis wird sich oft als groß herausstellen: so sind z. B. für einen Gesamtbestand von 100 Wertpapieren 5 150 Posten als Eingabedaten erforderlich. Allein die zu ermittelnden und einzugebenden Kovarianzbeziehungen je zweier Wertpapiere betragen

bei 3 Wertpapieren 3,  
 bei 10 Wertpapieren 45,  
 bei 50 Wertpapieren 1225,  
 bei 100 Wertpapieren 4950

und allgemein bei  $n$  Wertpapieren  $\frac{n(n-1)}{2}$  Korrelationen.

Hinzu treten  $n$  Erwartungswerte und  $n$  Varianzen dieser Ertrags-erwartungen, so daß bei  $n$  für das Portefeuille zu berücksichtigenden und zu analysierenden Wertpapieren

$$\frac{n(n-1)}{2} + 2n = \frac{n}{2}(n+3)$$

Daten dem Computer eingegeben werden müssen. Diese Daten müssen fast ausschließlich von dem (den) Wertpapieranalytiker(n) bereitgestellt werden.

Die *Index-Modelle* beinhalten Erweiterungen der Grundkonzeption Markowitz'; sie sind entwickelt worden, um das Datenvorbereitungsproblem zu vereinfachen und die Verwendung geeigneter Rechenalgorithmen zu erlauben, die sich spezielle Eigenschaften der Indexstruktur zunutze machen.

### 2. Das Markowitz-Modell

Dieses Modell<sup>48</sup>, das das im vorstehenden näher diskutierte Standardmodell der Wertpapierbestandsplanung ist, für die Planung eines nach

<sup>48</sup> Vgl. H. M. Markowitz, Portfolio Selection, a.a.O.

Ertrag und Risiko optimal zusammengesetzten Wertpapierbestandes erfordert die folgenden Daten für jede Komponente des Wertpapiergesamtbestandes:

- a) den Erwartungswert des Ertrages  $E(r_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ );
- b) die Varianz des Ertrages  $\sigma_{ii}^2$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ );
- c) die Kovarianz  $\sigma_{ij}$  des Ertrages zwischen  $r_i$  und  $r_j$  für alle Wertpapierpaare des Gesamtportefeuilles ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$ ).

Ertragserwartung und Varianz jedes Wertpapierbestandes können unter Verwendung der Grunddaten — d. h. der  $E(r_i)$ - und  $\sigma_{ij}$ -Werte — und der in den verschiedenen Wertpapieren angelegten Beträge ausgedrückt werden:

$$(V.1) \quad E = E(R_p) = \sum_{i=1}^n E(r_i)$$

$$(V.2) \quad V = \sigma_{R_p}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij}$$

Sind die vorstehenden Daten gegeben, vollzieht der Computer nach ihrer Eingabe Rechenoperationen auf Grund des angeführten Programms, welche als Ergebnis (Ausgabe des Computers) Wertpapierbestände haben, die minimales Risiko für jeden möglichen Ertrag aufweisen, also nach diesen Kriterien optimal zusammengesetzt sind.

Es sei betont, daß in diesem Modell keinerlei vereinfachende Annahmen hinsichtlich der Beziehungen zwischen den Wertpapieren getroffen werden. Wie schon erwähnt, muß der Analytiker daher für  $n$  zu analysierende Wertpapiere  $n$  Ertragserwartungswerte,  $n$  Ertragsvarianzen und  $\frac{n(n-1)}{2}$  Ertragsvarianzen zur Verfügung stellen, die zu insgesamt  $\frac{n}{2}(n+3)$  Computer-Eingabedaten führen.

### 3. Das Ein-Index-Modell

Die praktische Anwendung des Markowitz-Modells läßt sich durch eine Reihe von Annahmen, die die Prognoseaufgabe verringern, vereinfachen. Eine mögliche Annahmereihe stellt das „Ein-Index-Modell“ dar. Dieses Verfahren, das zuerst ebenfalls von Markowitz als Methode zur Vorbereitung der Eingabedaten für sein beschriebenes Modell vorgeschlagen wurde, wurde später von Sharpe in einer Form fortentwickelt,



durch die aus der Struktur der Daten rechentechnische Vorteile zu ziehen sind<sup>49</sup>.

Das wesentliche Charakteristikum des Ein-Index-Modells besteht in der Annahme, daß die verschiedenen, in das Portefeuille einzubeziehenden Wertpapiere nur über ihre allgemeinen Beziehungen zu einem bestimmten Index, der eine Marktentwicklung repräsentiert, zueinander in Beziehung stehen. In diesem Modell wird also der Ertrag aus jedem Wertpapier durch zufällige Größen und einer linearen Beziehung zu dem Marktindexstand determiniert:

$$(V.3) \quad r_i = a_i + b_i I + c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Darin sind  $a_i$  und  $b_i$  Parameter, die für jedes Wertpapier in bezug auf den Index mit Hilfe einer Regressionsanalyse nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden können.  $b_i$ , die Steigung der Regressionsgeraden, beinhaltet die Höhe der Kovarianz des Ertrags mit dem Index (steiler Anstieg = großer  $b_i$ -Wert = hohe Sensitivität von Kurswert und laufenden Wertpapiererträgen gegenüber den allgemeinen Einflußfaktoren, und umgekehrt bei kleinem  $b_i$ -Wert = schwache Steigung der Regressionsgeraden). Abb. 2 verdeutlicht die Zusammenhänge zwischen  $r_i$ ,  $a_i$ ,  $b_i I$  bzw.  $q_i$  für die  $i$ -te Wertpapieranlage<sup>50</sup>.  $c_i$  ist eine zufällige Residualvariable mit dem Erwartungswert Null:  $E(c_i) = 0$ , und der Varianz  $V(c_i) = q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Hier wie in den anderen Modellen kommen in dem Residualelement  $c_i$  stochastische Abweichungen vom allgemeinen Trend zum Ausdruck, damit zugleich auch zusätzliche (zufällige) Chancen und Risiken des Depots<sup>51</sup>. Positive oder negative Werte für die  $c_i$  zeigen an, daß die Erträge der Wertpapiere bzw. daß die verwendeten Klassenindizes (s. u.) nicht in vollständiger Gleichläufigkeit mit dem allgemeinen Kapitalmarktindex stehen; gerade ein  $c_i$  von nicht-Null deutet an, daß per Wertpapierdiversifikation im Rahmen des

<sup>49</sup> Vgl. W. F. Sharpe, A Simplified Model for Portfolio Analysis, Management Science, Vol. IX (1963), S. 277 ff.; außerdem ders.: Mathematical Investment Portfolio Selection: Some Early Results, University of Washington Business Review, 1963, S. 14 ff.; ders. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, Journal of Finance, Vol. XIX (1964), S. 425 ff.; ders., A Linear Programming Algorithm for Mutual Fund Portfolio Selection, Management Science, Vol. XIII (1967), S. 499.

<sup>50</sup> Nach W. F. Sharpe, A Simplified Model for Portfolio Analysis, a.a.O., S. 283.

<sup>51</sup> Vgl. hierzu J. Lintner, Security Prices, Risk, and Maximal Gains from Diversification, Journal of Finance, Vol. XX (1965), S. 587 ff.

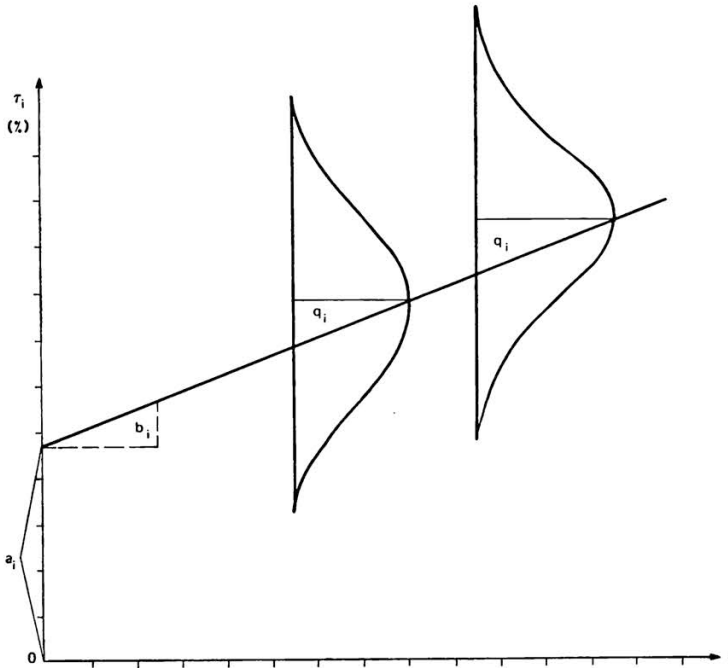


Abbildung 2: Der Wertpapierertrag als Funktion des Kapitalmarkindex

Depots Risikoabsicherung betrieben werden kann.  $I$  bezeichnet den Stand eines bestimmten repräsentativen Index, etwa des Index der Börsenkurse<sup>52</sup>, des Bruttosozialprodukts oder eines solchen speziell konstruierten Index, der enger auf die spezifischen Zwecke der Analyse ausgerichtet ist. Der zukünftige, erwartete Stand des Marktindex wird durch

$$(V.4) \quad I = a_{n+1} + c_{n+1}$$

gegeben, wobei

$$(V.5) \quad E(I) = a_{n+1}$$

$$(V.6) \quad E(c_{n+1}) = 0$$

$$(V.7) \quad V(I) = E(c_i^2) = q_{n+1}$$

<sup>52</sup> Vgl. zu den in Deutschland verfügbaren Kursindizes und ihren verschiedenen Eigenschaften H. E. Büschgen, Wertpapieranalyse, a.a.O., S. 254 ff.

definiert sind. Diese Beziehungen implizieren, daß der tatsächliche Indexstand gegenüber dem prognostizierten divergieren kann; Abweichungen des ersteren von dem Erwartungswert  $a_{n+1}$  in dem untersuchten Zeitraum erfaßt die Größe  $c_{n+1}$  mit einem eigenen Erwartungswert von Null und einer Varianz von  $q_{n+1}$ . Die möglichen Werte von  $I$  sind somit symmetrisch um  $a_{n+1}$  mit der Varianz  $q_{n+1}$  verteilt. Der Anstieg  $b_i$  der Regressionsgraden zeigt die Stärke der Kovarianz des Ertrags mit dem Index.

In dieser Formulierung des Modells werden folgende Annahmen gemacht<sup>53</sup>:

$$(V.8) \quad E(c_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Diese Annahme bedeutet, daß für jedes Wertpapier ein Erwartungswert des mittleren Ertrags während des Zeithorizonts existiert, der gegeben wird durch

$$(V.9) \quad E(r_i) = a_i + b_i E(I) = a_i + b_i a_{n+1}$$

$$(V.10) \quad V(c_i) = E(c_i^2) = q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und

$$(V.11) \quad E(c_{n+1} \cdot c_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Dies impliziert, daß für jeden gegebenen Wert von  $I$  der Ertrag des Wertpapiers  $i$  um  $a_i + b_i I$  verteilt ist.  $q_i$ , die Varianz der restlichen Ertragskomponente  $c_i$ , ist unabhängig von der Höhe von  $I$ . Vereinfachend geht man von einer Normalverteilung der Dichtefunktion aus. Ferner sei

$$(V.12) \quad E(c_i c_j) = 0 \quad i \neq j \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n)$$

Diese Annahme bedeutet, daß die Renditendifferenzen unkorreliert sind. Sie legt m. a. W. fest, daß die Erträge aus je zwei Wertpapieren  $i$  und  $j$  nur durch ihre Beziehung zu dem Marktindex  $I$  miteinander in Beziehung stehen.

Der Beitrag Sharpes besteht in dem Nachweis, daß bei einem Ausgehen von dem vorstehend definierten linearen Verhältnis und der dann erfolgenden Einführung einer neuen Variablen, einem fiktiven  $(n + 1)$ -ten Wertpapier, sich eine besondere Art einer Matrix ergibt.

<sup>53</sup> Vgl. zum folgenden K. J. Cohen — J. A. Pogue, a.a.O., S. 168 f.



Diese nur in der Diagonalen von Null verschiedene Elemente aufweisende Matrix  $M_2$  hat folgendes Bild:

$$(V.13) \quad M_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{nn} & \sigma_{n+1} & \sigma_{n+1} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

Im Gegensatz dazu weist die Matrix  $M_1$  der Markowitz-Formulierung die  $n$  Varianzen  $\sigma_{ii}$  und  $n(n-1)$  Kovarianzen  $\sigma_{ij}$  auf:

$$(V.14) \quad M_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{i1} & \sigma_{i2} & \cdots & \sigma_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

Erstere Matrix, die auch bereits in dem  $n$ -Wertpapier-Modell von Markowitz impliziert ist, enthält Nicht-Null-Elemente also nur entlang den  $(n+1)$  Diagonalen-Positionen des einfachen Index-Modells. In allen anderen Stellen außerhalb der Hauptdiagonalen weist die Matrix Nullelemente auf. Dadurch wird das Ausmaß des erforderlichen Rechenaufwandes zur Ermittlung optimaler Depots erheblich reduziert. Verwendet man einen Rechenalgorithmus, der aus der Diagonalform der Matrix Nutzen zieht, kann die Schar optimaler Wertpapierbestände zu ungefähr 1 % der Rechenkosten der vollständigen Markowitz-Modellformulierung erzielt werden.

Das fiktive  $(n+1)$ -te Wertpapier kann als gewichtete Sensitivität der Wertpapiererträge gegenüber Bewegungen des Marktniveaus  $I$  angesehen werden, da

$$(V.15) \quad X_{n+1} = \sum_{i=1}^n X_i b_i$$

Ertrag und Varianz des Wertpapiergesamtbestandes ergeben sich wie folgt: Zunächst ist der Depottertrag

$$(V.16) \quad R_p = \sum_{i=1}^n X_i E(r_i) = \sum_{i=1}^n X_i (a_i + b_i I + c_i) = \sum_{i=1}^n X_i (a_i + c_i) + \left[ \sum_{i=1}^n X_i b_i \right] I$$

Letzterer Ausdruck zerlegt den Ertragsbeitrag des  $i$ -ten Wertpapiers zum Gesamtertrag in sein kapitalmarktunabhängiges Element  $X_i(a_i + c_i)$

und in das kapitalmarkt**abhängige** Element  $X_i b_i I$ . Ebenso kann der Depotertrag als zusammengesetzt aus einem von allgemeinen Ertrags- und Kursentwicklungen **unabhängigen** und einem von den allgemeinen Kapitalmarktschwankungen **abhängigen** Element angesehen werden<sup>54</sup>. In beide Elemente investiert der Anleger. — Wenn

$$(V.17) \quad X_{n+1} := \sum_{i=1}^n X_i b_i,$$

ergibt sich

$$(V.18) \quad R_p = \sum_{i=1}^n X_i (a_i + c_i) + X_{n+1} (a_{n+1} + c_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n+1} X_i (a_i + c_i)$$

Das Glied  $X_{n+1} (a_{n+1} + c_{n+1})$  gibt gewissermaßen die Kapitalanlage in dem allgemeinen Kapitalmarktindex an (neben die Anlage in  $n$  Basiswertpapiere tretend). Nunmehr ergeben sich Ertragserwartung und Risiko des Portefeuilles folgendermaßen: Der Erwartungswert des Portefeuille-Ertrags ist

$$(V.19) \quad E = E(R_p) = \sum_{i=1}^n X_i E(r_i)$$

Da  $E(c_i) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n+1$ ), ist

$$(V.20) \quad E(r_i) = a_i + b_i \cdot a_{n+1}$$

so daß

$$(V.21) \quad E = E(R_p) = \sum_{i=1}^n X_i (a_i + b_i a_{n+1}) = \sum_{i=1}^n X_i a_i + \left( \sum_{i=1}^n X_i b_i \right) a_{n+1} = \\ = \sum_{i=1}^n X_i a_i + X_{n+1} a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} X_i a_i$$

Für die Varianz des Portefeuilles gilt

$$(V.22) \quad V = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sigma_{ii} + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1 \neq i}^n X_i X_j \sigma_{ij}$$

gemäß dem Markowitzschen Standardmodell. Da nun aber speziell der zweite, besonders viel Rechenaufwand bereitende Summand — der die auf die Kapitalmarktbebewegungen zurückführenden Kovarianzen enthält — im Index-Modell vereinfacht durch das System der  $n$  Regressionslinien dargestellt wird — d. h. die allen einbezogenen Wertpapieren gemeinsame Abhängigkeit vom Stand des Marktindex —, wird in dieser

<sup>54</sup> Vgl. W. F. Sharpe, A Simplified Model for Portfolio Analysis, a.a.O., S. 282.

Formulierung jener Kovarianzsummand durch die Annahme  $\kappa(c_i c_j) = 0$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$ ) beseitigt, d. h., daß zwischen den (zufälligen) Residualgrößen  $c_i$  Abhängigkeiten nicht existieren. Damit wird im Index-Modell das Risiko zu

$$(V.23) \quad V = \sigma_{R_p}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sigma_{ii}$$

Da  $\sigma_{ii} = q_i + b_i^2 q_{n+1}$ , ist weiter

$$(V.24) \quad V = \sigma_{R_p}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 (q_i + b_i^2 q_{n+1}) = \sum_{i=1}^n X_i^2 q_i + \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 b_i^2 \right) q_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 q_i$$

$V$  läßt sich auch so darstellen:

$$(V.25) \quad V = \sigma_{R_p}^2 = E \left( \sum_{i=1}^{n+1} X_i c_i \right)^2 = E \left( \sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 c_i^2 \right)$$

[da  $E(c_i \cdot c_j) = 0; i \neq j, i = 1, 2, \dots, n, n+1$ ]

$$= \sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 q_i \quad [\text{da } E(c_i^2) = q_i]$$

Die implizierte Kovarianz  $\kappa$  zwischen den Erträgen  $r_i$  und  $r_j$  ergibt sich als

$$(V.26) \quad \begin{aligned} \kappa(r_i r_j) &= E \{ [r_i - E(r_i)] [r_j - E(r_j)] \} \\ &= E [(b_i c_{n+1} + c_i) (b_j c_{n+1} + c_j)] \\ &= E(b_i b_j c_{n+1}^2) + E(c_i c_j) \end{aligned}$$

[da  $E(c_{n+1} c_i) = 0; i = 1, 2, \dots, n$ ]

$$= b_i^2 q_{n+1} + q_i$$

wenn  $i = j$ , und

$$(V.27) \quad \kappa(r_i r_j) = b_i b_j q_{n+1}$$

wenn  $i \neq j$  [da  $E(c_i c_j) = 0$ ]

Neben der Verminderung der Rechenzeit besteht die wichtigste Eigenschaft dieses Modells hinsichtlich seiner Anwendung in der Verringerung der dem Computer einzugebenden Wertpapierdaten. Für jedes Wertpapier werden nur drei Schätzprognosen benötigt, nämlich  $a_i$ ,  $b_i$  und  $q_i$ ,



sowie für den Marktindex zwei Prognosewerte, nämlich  $a_{n+1}$  und  $q_{n+1}$ , anstelle der Schätzungen für *jedes* Element der Varianz-Kovarianz-Matrix in der Markowitz-Formulierung. Somit verringert sich die Zahl der Prognosewerte von  $\frac{n}{2}(n+3)$  bei der Markowitz-Formulierung des Optimierungsmodells auf  $3n+2$  bei der Formulierung des einfachen Indexmodells (bei z. B. 100 Wertpapieren auf 302 gegenüber 5150 Prognosewerten).

Das Ein-Index-Modell versteht die Unsicherheit einer Aktienkapitalanlage als aus allgemeinen Kapitalmarktentwicklungen und allgemeinen und besonderen Unternehmensrisiken zusammengesetzt. Aus diesem Grunde reicht die einfache Annahme aus, daß alle Erträge des Gesamtbestandes an Effekten nur über ihre gemeinsame Abhängigkeit zu einem Generalindex in Beziehung stehen. Hand in Hand mit dem Abweichen von jener Exaktheit und Optimalität, die die Markowitz-Formulierung bietet, gehen der erheblich verringerte Rechenaufwand und damit verbundene Kosten sowie, ebenfalls damit in Verbindung stehend, die schnelle Auswertungsmöglichkeit von Informationen und daraufhin eventuell erfolgende Depotumschichtungen.

Das Ein-Index-Modell nach Sharpe liegt dem in der deutschen Programmbibliothek der IBM angebotenen Computer-Programm<sup>55</sup> zugrunde. Das Kölner Wirtschaftsmagazin „Capital“ errechnet seit September 1967 monatlich optimale Wertpapierportefeuilles, die unter Verwendung des vorgenannten Programms ermittelt werden.

#### 4. Die Multi-Index-Modelle

##### a) Überblick

Es stellt sich die Frage<sup>56</sup>, ob die Formulierung des Ein-Index-Modells nicht eine *Übersimplifizierung* ist. Durch die Bindung der Variabilität der Wertpapierrenditen nur an einen einzigen *allgemeinen* Marktindex können einige wesentliche Beziehungen zwischen den Wertpapieren verloren gehen, die ursprünglich in der Markowitz-Formulierung als unabhängig bestimmte Kovarianzen zwischen jedem Wertpapierpaar ausgedrückt sind. Es ist daher möglich, daß das ursprüngliche Ein-Index-

---

<sup>55</sup> Vgl. seine Beschreibung in: Optimale Wertpapiermischungen. Programmbeschreibung, IBM-Form 80 632—0.

<sup>56</sup> Vgl. das Folgende nach K. J. Cohen — J. A. Pogue, a.a.O., S. 170 ff.

Modell eine wirklich optimale Reihe von Wertpapierbeständen *nicht* liefert.

Diese mögliche Unzulänglichkeit könnte besonders dann akut werden, wenn für die Einbeziehung in das gleiche Portefeuille *verschiedene* Klassen bzw. Arten von Wertpapieren in Betracht gezogen werden. Es dürfte keine stets realitätsabbildende Annahme sein, daß ein einziger Index der Marktentwicklung die adäquate Grundlage für Erwartungsbildungen über die zukünftige Entwicklung von Stammaktien, Vorzugsaktien<sup>57</sup>, festverzinslichen Wertpapieren, Wandelobligationen<sup>58</sup> und anderen Arten von Kapitalanlagen oder für die Aktien verschiedenen Branchen angehörender Unternehmen darbieten kann. Aus diesem Grunde hat man weitere Portefeuille-Planungsmodelle entwickelt, die eine mittlere Komplexität gegenüber den beiden bisher erörterten Extremen aufweisen. Sie sollen erlauben, die Kovarianzbeziehungen in einer wirksameren Form als beim Ein-Index-Modell zu erfassen, gleichzeitig aber ebenfalls einen Teil der Rechenersparnisse gegenüber dem ursprünglichen Markowitz-Modell zu erreichen. Die mit diesem Ziel entwickelten sog. Multi-Index-Modelle von Cohen und Pogue<sup>59</sup> werden als „Kovarianz-Variante“ des Multi-Index-Modells und als „Diagonal-Variante“ des Multi-Index-Modells bezeichnet<sup>60</sup>.

Alle Index-Modelle gleichen sich darin, daß sie den Ertrag eines Wertpapiers als lineare Funktion zu einem bestimmten Index in Beziehung setzen. In den Multi-Index-Modellen wird jedoch anstatt eines *allgemeinen* Marktindex eine Reihe von *Klassen-* oder *Branchenindizes* verwendet, die auf klassen- oder branchentypische Faktoren besonders gut reagieren. Man bildet also ein System von Wertpapierklassen, indem die Effekten nach dem Ausmaß des Risikos der hinter ihnen stehenden Unternehmen geordnet werden<sup>61</sup>. Dann werden auch die Erträge zweier Titel, die *derselben* Klasse zugehören, in stärkeren Kovarianzbeziehungen als Titel *verschiedener* Klassen stehen. Derartige branchentypische

<sup>57</sup> Zu den Besonderheiten ihrer Kursbildung vgl. H. E. Büschgen, Wertpapiernalyse, a.a.O., S. 318 ff.

<sup>58</sup> Zu den Besonderheiten ihrer Kursbildung vgl. ebd., S. 326 ff.

<sup>59</sup> Vgl. K. J. Cohen — J. A. Pogue, a.a.O., S. 170 ff.

<sup>60</sup> Cohen und Pogue, a.a.O., S. 170 ff., sprechen von „covariance form“ und „diagonal form“ des Multi-Index-Modells. Vgl. das Folgende nach ebd., S. 170 ff.

<sup>61</sup> Zu den Möglichkeiten und Grenzen solcher Klassenbildung vgl. E. Gutenberg, Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Bd. 3, Die Finanzen, Berlin—Göttingen—New York 1969, S. 207 f.

Einflußfaktoren können auch zur Erklärung dessen herangezogen werden, daß bestimmte Effekten schnell, andere langsamer bzw. mit time-lag auf allgemeine Kapitalmarktveränderungen reagieren. Handelt es sich bei den zu berücksichtigenden Effekten um verschiedene Klassen oder Arten von Wertpapieren, wie z. B. Stammaktien, Vorzugsaktien, Pfandbriefe, Industrieobligationen usw., so kann für jede dieser Klassen ein besonderer, jeweils geeigneter Index definiert werden.

Neben der den Modellen spezifischen Art der Beschreibung *implizierter* Kovarianzbeziehungen werden, um neben den branchen- oder klassen-typischen auch die Einflüsse des allgemeinen Kapitalmarktes einzubeziehen, die Einflüsse des letzteren auf die Entwicklung der Risikoklassen durch *explizite* Einbeziehung der Kovarianzbeziehungen zwischen den Teilindizes erfaßt. M. a. W. wird untersucht, welcher Art die Kovarianz zweier Klassen- oder Branchenindizes ist, wenn am Kapitalmarkt neue Daten für die *allgemeine* Kurs- und Ertragsentwicklung gesetzt werden. Dies erfolgt bei den beiden Varianten unterschiedlich:

a) Die Kovarianz-Variante behält die Art der Formulierung des einfachen Index-Modells für jede Wertpapierklasse bei. Sie trägt jedoch den vollen Kovarianzbeziehungen zwischen den  $m$  Klassenindizes Rechnung, und zwar im wesentlichen in der gleichen Weise wie die Markowitz-Formulierung für die zwischen den einzelnen Wertpapieren.

b) Die Diagonalvariante verwendet eine Index-Hierarchie. Die erste Indexgruppe nimmt direkt Bezug auf die Erträge der Wertpapiere in ihren jeweiligen Klassen der Branchengruppierung, und zwar in der gleichen Weise wie die Kovarianz-Variante. Sodann wird ein zusätzlicher Index als Medium dafür benutzt, die Beziehungen zwischen den verschiedenen Branchen- oder Klassenindizes zum Ausdruck zu bringen. M. a. W. werden hier die Einflüsse der *allgemeinen* Marktfaktoren durch eine Regressionsanalyse der Klassenindizes in Bezug auf den allgemeinen Marktindex erfaßt.

Die Multi-Index-Modelle erfassen — im Gegensatz zum Ein-Index-Modell — die Kapitalanlagerisiken komplexer. Branchenrisiken<sup>62</sup> werden gewissermaßen als „intermediäre Schicht“ zwischen den Risiken des Kapitalmarktes und des Unternehmens herauskristallisiert und branchen-typische Unsicherheiten in den Ertragsentwicklungen explizit erfaßt. Wenn man somit ein Anlageinteresse in Wertpapieren bestimmter Branchen mit der Zielsetzung kombiniert, den Wert des Depots durch oft-

---

<sup>62</sup> Vgl. W. Neuhaus, a.a.O., S. 90, 93 f.



malige Umschichtungen überdurchschnittlich zu erhöhen, so sind die Multi-Index-Modelle die geeigneteren Planungshilfen, es sei denn, es werden keinerlei Vorauswahlen hinsichtlich bestimmter klassen- oder branchenzugehöriger Effekten erforderlich; dann empfiehlt sich das Ein-Index-Modell oder allenfalls die Diagonal-Variante des Multi-Index-Modells, welche mit ersterem größere Ähnlichkeit aufweist. Die Anwendung der Multi-Index-Modelle bedeutet höheren Rechenaufwand, mehr bei der Kovarianz- als bei der Diagonal-Variante.

#### b) Die Kovarianz-Variante des Multi-Index-Modells

Bei diesem Verfahren wird angenommen<sup>63</sup>, daß sich die Gesamtheit der Wertpapiere für das Depot aus Komponenten von  $m$  Klassen oder Branchen zusammensetzt. Wird im einfachen Index-Modell das allgemeine Ertrags- und Kursniveau der Wertpapiergesamtheit mit durch den *allgemeinen* Marktindex gemessen, so werden die Ertrags- und Kursniveaus, die für bestimmte Klassen von Wertpapieren oder Branchen charakteristisch sind, durch *Branchen-* oder *Klassenindizes* abgebildet<sup>64</sup>. Der Ertrag jedes Wertpapiers wird als lineare Funktion des Niveaus des Index der Branchen oder Klassen, zu dem das Wertpapier zu rechnen ist, angenommen:

$$(V.28) \quad r_i = a_i + b_i J_j + c_i \{i | i \in n_j\}$$

wobei  $n_j$  die Reihe der Wertpapiere in Klasse  $j$  bezeichnet ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).  $J_j$  ist der erwartete zukünftige Stand des  $j$ -ten Branchenindex, wobei

$$(V.29) \quad J_j = a_{n+j} + c_{n+j} \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Wie im Ein-Index-Modell werden die folgenden Annahmen gemacht:

$$(V.30) \quad E(c_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(V.31) \quad E(c_i c_{i'}) = q_i, \text{ wenn } i = i' (i = 1, 2, \dots, n)$$

bzw.  $= 0$ , wenn  $i \neq i' (i = 1, 2, \dots, n)$

<sup>63</sup> Vgl. das Folgende bei K. J. Cohen — J. A. Pogue, a.a.O., S. 170 f., 190 f.

<sup>64</sup> So wird z. B. der vom Statistischen Bundesamt laufend veröffentlichte Börsenkursindex (bzw. -durchschnitt) in zahlreiche Wirtschaftszweige unterteilt.

$$(V.32) \quad E(c_{n+j}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$(V.32a) \quad E(c_{n+j}^2) = q_{n+j} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$(V.33) \quad E(c_{n+j}c_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$(V.34) \quad V(c_i) = q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(V.35) \quad I_j = a_{n+j} + c_{n+j} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$(V.36) \quad V(c_{n+j}) = q_{n+j} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

Insoweit sind die Annahmen, die für die Beziehungen *innerhalb* jeder Klasse gelten, ähnlich denen des Ein-Index-Modells. Auch hier wird die *explizite* Kovarianzbeziehung der Markowitz-Fassung zwischen den Wertpapiererträgen durch die Annahme  $(c_i c_j) = 0$  eliminiert ( $i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$ ). Die implizierten Kovarianzbeziehungen bleiben erhalten, indem die  $n_j$  Erträge der zur  $j$ -ten Klasse gehörenden Wertpapiere als mit dem Wert des Branchen- oder Klassenindex variiert angenommen werden, wodurch sie über diesen Index als paarweise untereinander dependent betrachtet werden. Um die Beziehungen zwischen den  $m$  Branchen-Teilbeständen auszudrücken, wird die Kovarianz-Matrix der Branchen-Indizes eingeführt:

$$(V.37) \quad \mathbf{M}_m = \|\sigma_{jj'}\| = \|\kappa J_j J_{j'}\|$$

$$(j = 1, 2, \dots, m; j' = 1, 2, \dots, m)$$

Der erwartete Ertrag und die Varianz eines Wertpapierportefeuilles stellen sich folgendermaßen dar: der Ertrag als

$$(V.38) \quad R_p = \sum_{i=1}^n X_i r_i = \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{\{i/i \in n_j\}} X_i b_i \right] J_j$$

Zerlegt man den in dem zweiten Summenzeichen erfaßten Ausdruck in seine branchen- oder klassenabhängigen und seine branchen- oder klassenunabhängigen Elemente, so ergibt sich

$$(V.39) \quad R_p = \sum_{j=1}^m \sum_{\{i/i \in n_j\}} X_i (a_i + c_i) \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{\{i/i \in n_j\}} X_i b_i \right] J_j$$

$\sum X_i b_i$  stellt die gewichtete durchschnittliche Sensitivität des Ertrags des aus Titeln der Klasse ( $i/i \in n_j$ ) zusammengesetzten Teilbestandes gegenüber Schwankungen des  $j$ -ten Klassenindex dar. Die gesamten Effekten

zerfallen in  $m$  Klassen, so daß  $m$  derartige Variablen solcher Sensitivitäten zu definieren sind:

$$(V.40) \quad X_{n+j} = \sum_{\{i/i \in n_j\}} X_i b_i \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

Damit wird

$$(V.41) \quad R_p = \sum_{j=1}^m \sum_{\{i/i \in n_j\}} X_i (a_i + c_i) + \sum_{j=1}^m X_{n+j} J_j$$

Berücksichtigt man, daß der erste Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung die Summierung über sämtliche  $n$  Wertpapiererträge impliziert, so gilt, da  $J_j = a_{n+j} + c_{n+j}$ ,

$$(V.42) \quad R_p = \sum_{i=1}^n X_i (a_i + c_i) + \sum_{j=1}^m X_{n+j} (a_{n+j} + c_{n+j}) = \sum_{i=1}^{n+m} X_i (a_i + c_i)$$

Weiter ist

$$(V.43) \quad E = E(R_p) = \sum_{i=1}^{n+m} X_i \cdot a_i$$

da  $E(c_i) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m$ ).

Es ist somit der Erwartungswert des Ertrags des Gesamtdepots eine lineare Kombination des konstanten Koeffizienten  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n+m$ ), oder m. a. W. eine lineare Kombination aller von Bewegungen der Klassen- oder Branchenindizes unabhängigen Elemente der  $n$  Wertpapiererträge und aller von Bewegungen des Gesamtmarktindex unabhängigen Elemente der  $m$  Klassen- oder Branchenindizes<sup>65</sup>.

Für die Varianz des Portefeuilles gilt

$$(V.44) \quad V = \sigma_{R_p}^2 = E\left(\sum_{i=1}^{n+m} X_i c_i\right)^2 = E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 c_i^2\right) + E\left(\sum_{j=1}^m \sum_{j'=1}^m X_{n+j} X_{n+j'} c_{n+j} c_{n+j'}\right)$$

da  $E(c_{n+j} c_i) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$ )

$$(V.45) \quad V = \sum_{i=1}^n X_i^2 a_i + \sum_{j=1}^m \sum_{j'=1}^m X_{n+j} X_{n+j'} \sigma_{jj'}$$

<sup>65</sup> Vgl. W. Neuhaus, a.a.O., S. 85.



wobei  $\sigma_{jj}$ , die Kovarianz zwischen den Niveaus der Klassenindizes  $J_j$  und  $J_j$ , ist. Wenn  $j = j'$ , ist  $\sigma_{jj} = q_{n+j}$ .

Die implizierte Kovarianz  $K$  zwischen den Erträgen  $r_i$  und  $r_{i'}$  ist

$$\begin{aligned} (V.46) \quad \kappa(r_i r_{i'}) &= E \{ [r_i - E(r_i)] [r_{i'} - E(r_{i'})] \} \\ &= E [(b_i c_{n+j} + c_i) (b_{i'} c_{n+j'} + c_{i'})] \\ &= E (b_i b_{i'} c_{n+j} c_{n+j'}) + E (c_i c_{i'}) \end{aligned}$$

da  $E(c_{n+j} c_i) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$ )

Es ist also

$$(V.47) \quad \kappa(r_i r_{i'}) = b_i^2 q_{n+j} + q_i$$

wenn  $i = i'$

bzw.

$$(V.48) \quad \kappa(r_i r_{i'}) = b_i b_{i'} \sigma_{jj},$$

wenn  $i \neq i'$ , da  $E(c_i c_{i'}) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

Die quadratische  $m \times m$ -Matrix  $M_3$  der expliziten Kovarianzbeziehungen zwischen den  $m$  Klassenindizes in der Kovarianz-Variante des Multi-Index-Modells ergibt:

$$(V.49) \quad M_3 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \dots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}$$

Es ist zu beachten, daß allein jede Submatrix voll mit Elementen besetzt ist, die die Kovarianzen der Branchenindizes mit dem der allgemeinen Marktentwicklung kennzeichnen.

Die Kovarianzmatrix  $M_{n+m}$  kann in vier Submatrizen aufgeteilt werden, von denen nur zwei Nicht-Null-Elemente aufweisen:  $M_{n+m} = \begin{bmatrix} M_n & 0 \\ 0 & M_m \end{bmatrix}$ . Die erste Submatrix  $M_n$  ist eine Diagonal-Matrix auf Grund der Annahmen des einfachen Index-Modells innerhalb jeder Branche. Die zweite Submatrix  $M_m$  ist nicht vereinfacht, weil keinerlei vereinfachende Annahmen bezüglich der Kovarianzen zwischen den Branchenindizes gemacht werden. Dennoch erspart man sich einen großen Teil der Rechen-

arbeit bei der praktischen Anwendung, da die Zahl der Branchenindizes ( $m$ ) wesentlich geringer als die Zahl der Wertpapiere ( $n$ ) sein wird.

### c) Die Diagonal-Variante des Multi-Index-Modells

Dieses Modell hat die gleiche Grundstruktur wie die Kovarianz-Variante mit der zusätzlichen Annahme, daß jeder der *Branchenindizes* seinerseits in linearer Beziehung zu einem übergeordneten *Marktindex* steht. Dies erfordert die Definierung eines weiteren fiktiven Wertpapiers — des  $(n + m + 1)$ -ten — welches in Beziehung zu der Sensitivität der Branchenindizes gegenüber dem allgemeinen Marktindex steht. Das folgende Modell wurde von Cohen und Pogue entwickelt<sup>66</sup>.

Die zukünftigen, erwarteten Niveaus der Branchenindizes werden als durch

$$(V.50) \quad J_j = a_{n+j} + b_{n+j} I + c_{n+j} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

gegeben angenommen, wobei ähnliche Annahmen wie im Ein-Index-Modell oder wie innerhalb einer Branchengruppe bei der Kovarianz-Variante getroffen werden, nämlich insbesondere

$$(V.51) \quad E(c_{n+j}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$(V.52) \quad E(c_{n+j} c_i) = q_{n+j} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$(V.53) \quad E(c_{n+j} c_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m)$$

$$(V.54) \quad E(c_{n+j} c_{n+j'}) = 0 \quad (j \neq j')$$

Der Stand des allgemeinen Marktindex  $I$  wird wie im Ein-Index-Modell definiert als

$$(V.55) \quad I = a_{n+m+1} + c_{n+m+1}$$

worin  $a_{n+m+1}$  der Erwartungswert von  $I$  und  $c_{n+m+1}$  eine Zufallsvariable mit einem Mittelwert von Null und einer Varianz von  $q_{n+m+1}$  darstellen. Es wird unterstellt, daß  $c_{n+m+1}$  nicht mit irgendeinem der anderen Wertpapiere oder Index-Reste korreliert ist, d. h.

$$(V.56) \quad E(c_{n+m+1} \cdot C_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m)$$

Die in dem Computer-Programm zu verarbeitenden Werte für Ertrag und Varianz eines Wertpapierbestandes ergeben sich wie folgt. Wie in der Kovarianz-Variante des Multi-Index-Modells gilt:

<sup>66</sup> Vgl. K. J. Cohen — J. A. Pogue, a.a.O., S. 171 f., 192 f.

$$(V.57) \quad R_p = \sum_{i=1}^n X_i (a_i + c_i) + \sum_{j=1}^m X_{n+j} J_j$$

Der zweite Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung sei näher betrachtet. Es ergibt sich

$$(V.58) \quad \sum_{i=1}^m X_{n+j} J_j = \sum_{j=1}^m X_{n+j} (a_{n+j} + b_{n+j} I + c_{n+j}) = \\ = \sum_{j=1}^m X_{n+j} (a_{n+j} + c_{n+j}) + \left( \sum_{j=1}^m X_{n+j} b_{n+j} \right) I$$

Es sei

$$(V.59) \quad X_{n+j} J_j = \sum_{j=1}^m X_{n+j} b_{n+j}$$

so daß

$$(V.60) \quad \sum_{j=1}^m X_{n+m+1} = \sum_{j=1}^{m+1} X_{n+j} (a_{n+j} + c_{n+j})$$

Damit wird

$$(V.61) \quad R_p = \sum_{i=1}^n X_i (a_i + c_i) + \sum_{j=1}^{m+1} X_{n+j} (a_{n+j} + c_{n+j}) = \sum_{i=1}^{n+m+1} X_i (a_i + c_i)$$

Der erwartete Portefeuilleertrag ist

$$(V.62) \quad E = E(R_p) = \sum_{i=1}^{n+m+1} X_i a_i$$

da  $E(c_i) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m, n+m+1$ )

und worin ferner

$$(V.63) \quad X_{n+j} = \sum_{\{i|ienj\}} X_i b_i$$

$$(V.64) \quad X_{n+m+1} = \sum_{j=1}^m X_{n+j} b_{n+j}$$

Für die Portefeuille-Varianz gilt:

$$(V.65) \quad V = \sigma_{R_p}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 q_i + \sum_{j=1}^m X_{n+j}^2 q_{n+j} + X_{n+m+1}^2 q_{n+m+1} = \\ = E \left( \sum_{i=1}^{n+m+1} X_i c_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n+m+1} X_i^2 q_i \quad \text{da } E(c_i c_{i'}) = 0, \\ i \neq i' \quad (i = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m, n+m+1)$$



Die Kovarianz-Matrix  $M_{n+m+1}$  ist eine Diagonal-Matrix wie im Ein-Index-Modell. Die Vereinfachung der Diagonal-Variante zeigt sich in dieser Matrix  $M_4$ , die nur in der Hauptdiagonalen von Null verschiedene Elemente aufweist:

$$(V.66) \quad M_4 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & & & \\ & \sigma_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{mm} \\ & & & & \sigma_{m+1,m+1} \end{bmatrix}$$

Sie enthält also die  $m$  Varianzen der Klassenindizes und die  $(m+1)$ -te Varianz  $\sigma_{m+1, m+1}$  des allgemeinen Marktindex  $J$ .

Es handelt sich jedoch nicht um die gleiche Kovarianz-Matrix wie beim Ein-Index-Modell, denn obgleich in gewissem Sinne jedes Wertpapier letztlich auf einen Marktindex bezogen wird, sind die Kovarianz-Matrizen auf Grund der Unterschiede in den Annahmen über die Eigenschaften der restlichen Erträge und Indizes verschieden. Dies zeigt auch ein Vergleich der algebraischen Ausdrücke für die implizierten Korrelationen zwischen den Ertragspaaren in den beiden Modellen. Die implizierte Kovarianz  $K$  zwischen den Erträgen  $r_i$  und  $r_{i'}$  ist nämlich im Falle des Multi-Index-Modells Diagonal-Variante:

$$(V.67) \quad \begin{aligned} \kappa(r_i, r_{i'}) &= E \{ [r_i - E(r_i)] [r_{i'} - E(r_{i'})] \} \\ &= E \{ [b_i (b_{n+j} c_{n+m+1} + c_{n+j}) + c_i] \\ &\quad [b_{i'} (b_{n+j'} c_{n+m+1} + c_{n+j'}) + c_{i'}] \} \\ &= b_i b_{i'} b_{n+j} b_{n+j'} q_{n+m+1} \quad \text{wenn } i \neq i' \text{ und } j \neq j' \end{aligned}$$

bzw.

$$(V.68) \quad \kappa(r_i, r_{i'}) = b_i b_{i'} b_{n+j}^2 q_{n+m+1} + b_i b_{i'} q_{n+j} \quad \text{für } i = i' \text{ und } j = j'$$

bzw.

$$(V.69) \quad \kappa(r_i, r_{i'}) = b_i^2 b_{n+j} q_{n+m+1} + b_i^2 q_{n+j} + q_i \quad \text{für } i \neq i' \text{ und } j = j'$$

## VI. Zusatzanlagen in festverzinslichen Wertpapieren, Kreditaufnahme, induzierte Kursschwankungen

### 1. Festverzinsliche Effekten

Der unsichere Ertrag eines reinen Aktienportefeuilles läßt sich durch Aufnahme festverzinslicher Titel in gewissem Maße stabilisieren. Eine

solche Politik wird z. B. durch einige Investmentfonds verfolgt. Der Einfachheit halber sollen im folgenden festverzinsliche Anlagen als nicht risikobehaftet (im definierten Sinne) angesehen werden<sup>67</sup>.

Wenn  $X_A$  den Anteil des Aktienportefeuilles und  $E(R)_A$  dessen erwarteten Ertrag bezeichnen, gilt für die Ertragserwartung  $E(R)_K$  des Aktien und Festverzinsliche umfassende Depots:

$$(VI.1) \quad E(R) = E(R)_A X_A + (1 - X_A) r_F \quad (0 \leq X_A \leq 1)$$

wo  $r_F$  die (sichere) Verzinsung des festverzinslichen Portefeuilleteils bezeichnet. Das Risiko  $V_K$  des kombinierten Portefeuilles beträgt

$$(VI.2) \quad V_K = X_A^2 V_A + (1 - X_A)^2 V_F + 2 X_A (1 - X_A) \kappa(AF)$$

Darin bezeichnet  $V_K$  die Varianz des kombinierten Portefeuilles,  $V_A$  die des Aktienanteils und  $V_F$  die des Festverzinslichenanteils am Gesamtdepot. Da letztere als Null vorausgesetzt wurde ( $V_F = 0$ ) und auf Grund dessen daher  $K_{AF} = 0$ , wird (VI.2) zu

$$(VI.3) \quad V_K = X_A^2 V_A$$

und, da  $V_A = \sigma_A^2$ ,

$$(VI.4) \quad \sigma_K = X_A \sigma_A$$

so daß sich zeigt, daß das Risiko des mittels festverzinslichen risikoloseren<sup>68</sup> Anlagen ergänzten Aktiendepots in dem Maße sinkt, wie sich der Anteil jener am Gesamtportefeuille erhöht. Gleichzeitig wird dieser Vorteil mit entgehenden höheren Gewinnchancen erkaufte, was durch die limitierte Verzinslichkeit jener risikolosen Anlagen hervorgerufen wird<sup>69</sup>.

## 2. Kreditaufnahme

Umgekehrt läßt sich der Portefeuilleertrag unter Inkaufnahme höheren Risikos durch teilweise Kreditfinanzierung des Depots erhöhen („leverage“-Effekt)<sup>70</sup>. Nimmt man vereinfachend an, daß der Darle-

<sup>67</sup> Vgl. im folgenden W. F. Sharpe, A Simplified Model for Portfolio Analysis, a.a.O., S. 285 ff.

<sup>68</sup> Geldwertrisiken ausgeklammert.

<sup>69</sup> Vgl. weiter auch H. A. Latané, Portfolio Balance. The Demand for Money, Bonds and Stock, Southern Economic Journal, Vol. XXIX (1962), S. 71 ff.

<sup>70</sup> Vgl. dies auch bei W. Neuhaus, a.a.O., S. 103 ff.

henszinssatz  $r_{FK}$  von der Höhe des aufgenommenen Darlehens unabhängig ist<sup>71</sup>, ergibt sich als Ertragserwartung  $E(R)_{FK}$  des (teilweise) kreditfinanzierten Portefeuilles

$$(VI.5) \quad E(R)_{FK} = E(R)_A X_A + (1 - X_A) r_{FK} \quad (1 < X_A < \infty)$$

Der Einfluß der darlehenfinanzierten Aktienkäufe auf den Ertrag des Depots und damit dessen „leverage“-Effekt zeigt sich aus der Ableitung

$$(VI.6) \quad \frac{dE(R)_{FK}}{dX_A} = E(R)_A - r_{FK}$$

Mit zunehmender Fremdfinanzierung eines Portefeuilles muß das Risiko des Depots größer werden<sup>72</sup>:

$$(VI.7) \quad \sigma_{FK} = \varphi(FK, EK)$$

Stellt  $EK$  das verfügbare Eigenkapital,  $FK$  den Betrag des zusätzlich aufgenommenen Fremdkapitals dar, so beträgt der Nettoertrag  $N_p$  des Portefeuilles

$$(VI.8) \quad N_p = EK \cdot E(R)_A + [E(R)_A - r_{FK}] FK$$

oder

$$(VI.9) \quad E(R)_{FK} = E(R)_A + [E(R)_{FK} - r_{FK}]$$

Die durch die Standardabweichung gemessene Risikobelastung des (teilweise) darlehensfinanzierten Portefeuilles<sup>73</sup> läßt sich als lineare Funktion des Risikogrades eines gleich aufgebauten, jedoch nur eigenmittel-finanzierten Depots ausdrücken als

$$(VI.10) \quad \sigma_{FK} = X_A \sigma_A$$

### 3. Induzierte Kursschwankungen

Im allgemeinen wird bei den Modellen zur optimalen Wertpapierbestandsauswahl nicht (explizit) berücksichtigt, daß — zumindest bei Dispositionen von großen, z. B. institutionellen, Anlegern und auf relativ

<sup>71</sup> Vgl. aber auch H. C. *Sawvain*, Changing Interest Rates and the Investment Portfolio, *Journal of Finance*, Vol. XIV (1959), S. 230 ff.

<sup>72</sup> Vgl. dazu auch D. L. *Tuttle* — R. H. *Litzenberger*, Leverage, Diversification, and Capital Market Effects on a Risk-Adjusted Capital Budgeting Framework, *Journal of Finance*, Vol. XXIII (1968), S. 427 ff.

<sup>73</sup> Vgl. W. *Neuhaus*, a.a.O., S. 105.



engen Wertpapiermärkten — Angebot und Nachfrage des Anlegers Einfluß auf die Preise bzw. Kurse der in Betracht kommenden Wertpapiere nehmen<sup>74</sup>. Betrachtet man die Abhängigkeit zwischen dem Kurswert  $K_i$  einer Anlage und der Nachfrage  $X_i$  danach — ersterer ist eine Funktion der letzteren — als stetig, so kann das Verhältnis zwischen  $K_i$  und der Ertragswert  $E_g(r_i)$  dieses ( $i$ -ten) Anlageobjekts in Geldeinheiten pro Stück

$$(VI.11) \quad E_g(r_i) = E(r_i) K_i$$

ausgedrückt werden [ $E(r_i)$  ist wie bisher die Ertragserwartung des  $i$ -ten Anlageobjekts pro Geldeinheit], wobei also

$$(VI.12) \quad K_i = f(X_i)$$

Damit ergibt sich als neue Zielfunktion des Effektenselektionsproblems (bei Nebenbedingungen wie bisher):

$$(VI.13) \quad \sum_{i=1}^n \frac{E_g(r_i) X_i}{f(X_i)} \rightarrow \max.$$

Die explizite Einbeziehung der induzierten Kursveränderungen führt also zu u. U. zu schwierigen Programmierungsproblemen.

## VII. Das Umschichtungsproblem

Die behandelten Depotselektionsmodelle sind im Grunde einperiodiger Art: Sie gehen von der optimalen Zusammenstellung zu Beginn der Periode aus, die ohne Veränderungen bis zum geplanten Endzeitpunkt für die Anlage — Ende der gleichen Periode — beibehalten wird. Dieses Vorgehen läßt das dynamische Element des Anlageproblems außer acht: Preis- bzw. Kursveränderungen am Kapitalmarkt können z. B. bewirken, daß das Anlageziel schon vor Periodenende erreicht wird; in diesem Fall und in anderen Fällen kann das zu Periodenbeginn optimierte Depot nach gewisser Zeit unoptimal geworden sein. Hierauf bezieht sich eine Erweiterung der Grundmodelle durch K. V. Smith<sup>75</sup>. Nimmt man an<sup>76</sup>, daß bei einem in  $n$  Teilperioden unterteilten Gesamtplanungszeit-

<sup>74</sup> Vgl. den folgenden Ansatz nach K. Brockhoff, Zum Problem des optimalen Wertpapierbudgets, Unternehmensforschung, Bd. 11 (1967) S. 167 f.

<sup>75</sup> Vgl. K. V. Smith, A Transition Model for Portfolio Revision, Journal of Finance, Vol. XXII (1967), S. 425 ff.

<sup>76</sup> Vgl. im folgenden W. Neuhaus, a.a.O., S. 119 ff.; der ebenfalls die Darstellung von K. W. Smith, a.a.O., S. 425 ff., verwendet.

raum in regelmäßigen zeitlichen Abständen Depotüberprüfungen vorgenommen werden und daß die Zahl der optimalen Portefeuilles sich bei Depotüberprüfungen nicht ändert, so kann das Zeitschema der Depotrevisionen durch folgende Matrix  $M_\mu$  optimaler Depots  $X_{\delta\mu}$  (wo  $\mu = 1, 2, \dots, m$ ;  $\delta = 0, 1, \dots, n - 1$ ) dargestellt werden:

$$(VII.1) \quad M_\mu = \begin{bmatrix} X_{1,0} & X_{1,1} & \dots & X_{1,\delta} & \dots & X_{1,n-1} \\ X_{2,0} & X_{2,1} & \dots & X_{2,\delta} & \dots & X_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ X_{\mu,0} & X_{\mu,1} & \dots & X_{\mu,\delta} & \dots & X_{\mu,n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ X_{m,0} & X_{m,1} & \dots & X_{m,\delta} & \dots & X_{m,n-1} \end{bmatrix}$$

Für eine große Anzahl von Effekten ist  $m > n - 1$ . In der Depotvektoren-Matrix gibt die  $\delta$ -Spalte an, welche Depots die im Zeitpunkt der Depotüberprüfung geltende kritische Linie (s. Abb. 1) bilden, während die  $\mu$ -Zeile die Veränderungen des  $\mu$ -ten optimalen Depots im Zeitablauf erläutert;  $\mu_1 = 1$  bezieht sich auf das optimale Depot mit höchstem Ertragserwartungswert,  $\mu_m = m$  auf das mit niedrigster Varianz. Um dem Anleger Entscheidungshilfen für eventuell vorteilhafte Umschichtungen bzw. Übergänge von der  $\delta$ -ten kritischen Linie optimaler Depots auf die  $(\delta + 1)$ -te kritische Linie zu vermitteln, müssen den Portefeuilles, die in nebeneinander liegenden Spalten stehen, die entsprechenden Kombinationen von Ertragserwartungen und Risiken zugeordnet werden. [ $V_\delta = V_\delta(E)$ ,  $V_{\delta+1} = V_{\delta+1}(E)$ ]. Letzteres zeigt Abb. 3 für eine anlegende Bank, die in  $\delta$  ein Depot  $X_{\mu\delta}$  erstellt hat, welches

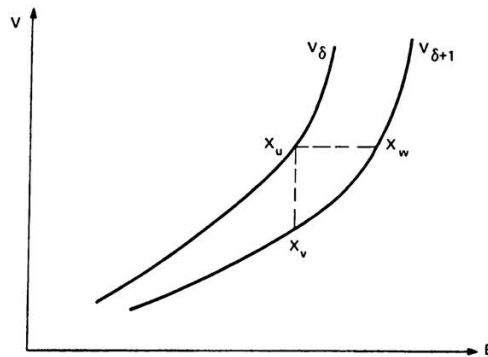


Abbildung 3: Depotumschichtung

inzwischen unoptimal geworden und zu verändern ist. Dies erfolgt durch den Übergang auf Depots, die im Kurvenabschnitt zwischen  $X_{v, \delta+1}$  und  $X_{w, \delta+1}$  liegen. Hierbei wird das einmal in Kauf genommene Risiko beibehalten.

Bei Umschichtungen, die mit Verkäufen der  $j$ -ten Effektenart und der Realisierung eines prozentualen Veräußerungsgewinns  $G_j$  (bezogen auf den Anschaffungspreis  $A_j$  des Wertpapiers) verbunden sind, entsteht ein Kapitalgewinn  $g_j$  in Höhe von

$$(VII.2) \quad g_j = A_j (G_j - 1)$$

Unterliegt die Bank dem konstanten (nicht progressiven, d. h. von der Höhe des Gewinns unabhängigen) Ertragsteuersatz  $t$  vH, so beträgt die steuerliche Belastung ihres Kapitalgewinns

$$(VII.3) \quad A_j (G_j - 1) t$$

und es verbleibt ihr nach Steuern

$$(VII.4) \quad g_{jt} = A_j (G_j - 1) (1 - t)$$

Bei Umschichtungen im Depot entstehen Transaktionskosten wie Maklergebühren, Börsenumsatzsteuer und Spesen sowie für Nichtbank-Anleger Bankprovisionen auf den Verkauf des  $j$ -ten Wertpapiers und der Wiederanlage der Verkaufserlöse in einer Wertpapierart  $j'$ . Erzielt man als Bruttoerlös aus dem Wertpapierverkauf  $A_j G_j$ , so läßt sich nach Berücksichtigung der Besteuerung ein Betrag von

$$(VII.5) \quad A_j (G_j - G_j t + t)$$

wiederanlegen. Mit Smith<sup>77</sup> sollen die Transaktionskosten  $TK_{jj'}$ , durch den (nichtlinearen) Ausdruck

$$(VII.6) \quad TK_{jj'} = \chi (D_{jj'})$$

dargestellt werden.  $D_{jj'}$ , ergibt sich aus dem Verkaufserlös  $A_j G_j$  und den Anschaffungskosten  $A_j (G_j - G_j t + t)$ . Eine Umschichtung bei einem  $n$  Effekten enthaltenden Depot bei gewinnbringendem Verkauf von  $J$  Wertpapierarten ist dann von Vorteil für den Anleger, wenn

$$(VII.7) \quad P_{\delta+1} \tilde{s}_{\delta+2} - \sum_{j=1}^J A_j (G_j - 1) t + \chi (D_{jj'}) \geq 0 \quad (\vartheta = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

<sup>77</sup> Vgl. K. V. Smith, a.a.O., S. 430. Vgl. auch W. F. Beazer, Tax-Law, Lock-ins, and Bank Portfolio Choice, Journal of Finance, Vol. XX (1965), S. 665 ff.

$P_{\delta+1}$  bezeichnet den Anlagewert des umgeschichteten Depots in  $\delta + 1$  und  $\tilde{s}_{\delta+2}$  den Ertragszuwachs, den der Anleger bis zum nächsten Überprüfungszeitpunkt erwartet. Will der Anleger im Zuge von Portfeuilleumschichtungen keine zusätzlichen Mittel zuschießen müssen<sup>78</sup>, sondern sollen sich die Neukäufe aus den Veräußerungserlösen bezahlen, so ist in das Depotselektionsmodell als besondere Nebenbedingung die Aufrechterhaltung des finanziellen Gleichgewichts des Anlegers aufzunehmen:

$$(VII.8) \quad \sum_{j=1}^n B_j X_j^* \leq G_\delta$$

$G_\delta$  stellt den im Umschichtungszeitpunkt zur Verfügung stehenden Nettogeldmittelbetrag,  $B_j$  die aus Kurswerten und Transaktionskosten bestehenden Anschaffungskosten,  $X_j$  die Zahl der neu zu kaufenden Effekten der Art  $j$  dar.

## VIII. Das Auswahlproblem bei der endgültigen Entscheidung

### 1. Normalverteilte Erwartungen

Die Computer-Programme der optimalen Wertpapierbestandsplanung liefern als Ergebnis („Output“) nicht *ein einziges* optimales Portfeuille, sondern vielmehr eine *Vielzahl* solcher optimaler Ertrag-Risiko-Kombinationen; die Ergebnisse der „Portfolio Selection“ enden also zunächst dort, wo dem anlegenden Institut eine Reihe optimaler Depots angeboten wird — optimal in bezug auf die Kombination von Rendite und Risiko. Die dem Anlageentscheidungsträger dann selbst verbleibende Aufgabe ist die Auswahl des ihm „passenden“ Portfeuillees, und er wird dasjenige realisieren, das *dem* Risiko entspricht, das er gerade noch — bei der betreffenden Rendite — in Kauf zu nehmen gewillt ist.

Man verdeutliche sich dies an Abb. 1: Die kritische Linie bezeichnet diese Vielzahl aller möglichen optimalen Kombinationen, die das Programm liefert, beginnend mit der Kombination *a*, die das niedrigste überhaupt mögliche Risiko, verbunden mit der niedrigsten Ertragserwartung, liefert, und endend mit dem optimalen Portfeuillees *b* aus höchstmöglicher Ertragserwartung und höchstem Risiko. Während somit die

<sup>78</sup> Vgl. auch K. J. Cohen — E. J. Elton, Intertemporal Portfolio Analysis Based on Simulation of Joint Returns, Management Science, Vol. XIV (1968), S. 55 ff.



Chancen- und Risikenstruktur des eigentlichen Depotselektionsvorgangs typischerweise quantifiziert und determiniert wird<sup>79</sup>, ist die letztendliche Entscheidungssituation durch eine gewisse Indeterminiertheit charakterisiert: Hat man *alle* optimalen *E-V*-Kombinationen als Resultat vorliegen, so stellt sich für den Anleger, z. B. das Kreditinstitut, die Frage, welche dieser optimalen Portefeuilles denn nun zu präferieren sei<sup>80</sup>, welches also die „individual-optimale“ Kombination sei. Diese Frage läßt sich nicht allgemeingültig beantworten, sondern nur für den Einzelfall eines Anlegers durch diesen selbst, d. h. entsprechend seiner individuellen, objektiven Risikoneigung bzw. Risikoaversion, die ihn ein optimales Portefeuille mit hohem bzw. geringem Risiko, verbunden mit entsprechenden Ertragsniveaus auswählen läßt. Modellmäßig wird von einer Nutzen- oder Präferenzfunktion des vor jener Entscheidung stehenden Kapitalanlegers ausgegangen<sup>81</sup>. Dabei muß wieder angenommen werden, daß der Verkauf solcher Präferenzfunktionen von der subjektiven Einstellung des Entscheidungsträgers abhängt. Läßt sich das Erwartungs-„bündel“ des Anlegers auf zwei Parameter — z. B. Ertragserwartungswert und Varianz — reduzieren<sup>82</sup>, so kann seine Präferenzfunktion durch Indifferenzkurven grafisch im zweidimensionalen Koordinatensystem dargestellt werden (s. Abb. 4–6); käme ein dritter Erwartungsparameter — z. B. ein Schiefemaß der Verteilung seiner Wahrscheinlichkeitserwartungen — hinzu, wäre ein dreidimensionales Koordinatensystem erforderlich.

Man pflegt die Art der Risikoneigung von Kapitalanlegern durch Indifferenzlinien zum Ausdruck zu bringen (s. Abb. 4). Verhält sich ein anlegender Entscheidungsträger tatsächlich hinsichtlich bestimmter Chance-Risiko-Kombinationen indifferent, so zeigt in einem Koordinatensystem, in dem das Risiko auf der Abszisse, die Ertragserwartung auf der Ordinate abgetragen werden — wie in Abb. 4 —, die Neigung der Indifferenzlinien zum Koordinatenursprung die Risikoneigung des Anlegers, nämlich anhand der von ihm geforderten Substitutions(grenz)-

<sup>79</sup> Vgl. W. *Neubaus*, a.a.O., S. 36 f.

<sup>80</sup> Vgl. hierzu D. E. *Farrar*, *The Investment Decision under Uncertainty*, Englewood Cliffs, N. J., 1962, S. 13 ff.; J. *van Horne*, *Capital Budgeting Decisions Involving Combinations of Risky Investments*, *Management Science*, Vol. XIII (1967) S. 48 ff.

<sup>81</sup> So geht man oft von einer Neumann-Morgensternschen Nutzenfunktion aus; vgl. z. B. S. *Royama* — K. *Hamada*, *Substitution and Complementarity in the Choice of Risky Assets*, in: *Risk Aversion and Portfolio Choice*, a.a.O., S. 27 ff.

<sup>82</sup> Vgl. H. *Arnold*, a.a.O., S. 176 ff.

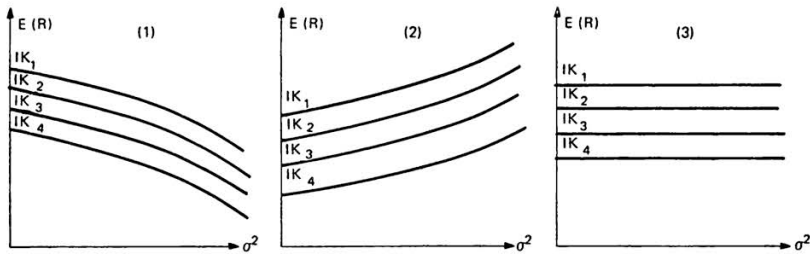


Abbildung 4: Anleger-Indifferenzkonstellationen

rate des Ertrags zum Risiko. Je höher die Substitutionsrate des Gewinns zum Risiko ist, desto risikoempfindlicher ist der Anleger, denn er nimmt ein größeres Risiko nur gegen einen überproportional höheren Zuwachs an Ertragserwartung auf sich. In diesen Fällen verlaufen die Indifferenzkurven zur Abszisse konvex<sup>83</sup>. Anders ausgedrückt: Wenn der Grenznutzen des Ertrags, den der Anleger erwartet, eine *abnehmende* Funktion des erwarteten Ertrags ist, muß die Neigung der Indifferenzlinie positiv sein; ein solcher Anleger ist *risikoscheu*: Er ist nicht gewillt, höheres Risiko auf sich zu nehmen, wenn er nicht auch stärker höheren Ertrag erwarten kann; es handelt sich um einen diversifizierenden Anleger<sup>84</sup>. So deutet in Abb. 4 der Indifferenzlinienverlauf

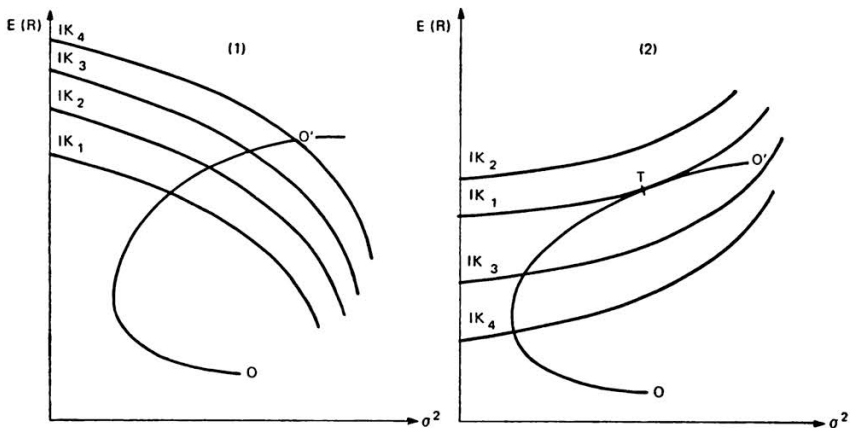


Abbildung 5: Anlageballung und Anlagediversifikation

<sup>83</sup> Zum Beweis dieser Aussage vgl. J. Tobin, Liquidity Preference as Behavior Toward Risk, Review of Economic Studies, Vol. XXV (1957/58), S. 65 ff.

<sup>84</sup> Einzelheiten und weiteres zu solchen Darstellungen vgl. bei J. Tobin, The

hin im Fall

- (1) auf einen risikofreudigen Anleger, denn er zieht eine Anlagenalternative, für die ein niedriger Erwartungswert mit hohen Chancen und Risiken verbunden ist, dem jeweils sicheren Ertrag vor (Risikopräferenz); Beispiel: bewußt spekulative („aggressive“) Investmentfonds;
- (2) auf einen risikoscheuen Anleger, der höheres Risiko nur mit progressiv höherem Ertrag akzeptiert (Risikoaversion); Beispiel: „konservative“ Investmentfonds; und
- (3) den Grenzfall des risikoindifferenten Anlegers (Risikoneutralität).

Die Unterschiede zwischen diesen Fällen sind gradueller Natur: Risikoempfindlichkeit und Höhe der Substitutionsrate von Gewinn und Risiko ändern sich gleichgerichtet; je risikoabgeneigter, desto mehr wird die anlegende Bank zur Diversifikation tendieren. Die Verwendung von Indifferenzkonstellationen stellt eine gute Möglichkeit zur Verdeutlichung der anlagepolitischen Maßnahmen unterschiedlich risikogeneigter Kreditinstitute und anderer Anleger dar. Dies zeigt Abb. 5<sup>85</sup> für zwei Anlageobjekte. Während der risikofreudige Anleger (1) nur *ein* Anlageobjekt auswählen wird, diversifiziert der risikoabgeneigte (2) zwischen den beiden Objekten, indem er seine verfügbaren Mittel entsprechend dem Tangentialpunkt *T* zwischen Opportunitätskurven ( $00'$ ) und höchstem erreichbarem Indifferenzniveau  $IK_1$  aufteilt. Bedient man sich zur ex-post-Deskription<sup>86</sup> des Anlegerverhaltens eines Systems von Indifferenzkurven wie in Abb. 6, so wird der Berührungspunkt zwischen der die erwarteten Risiken (*V*) darstellenden Linie und den Linien der Anlegerindifferenz zwischen *V* und *E* ( $IK_1, IK_2, \dots$ ) für die einzelnen Anleger (Kreditinstitute) unterschiedlich liegen ( $P_1, P_2, \dots$ ). Je höher die Sicherheitspräferenz des anlegenden Entscheidungsträgers ist, desto kleiner ist der Bereich auswählbarer Kombinationen von Ertrag und Risiko zur Aufnahme in das individual-optimale Depot.

Das hierin zum Ausdruck kommende Problem gibt zu dem Versuch Anlaß, ein die Hauptzielfunktion — Minimierung des Portefeuille-Risikos in Gestalt der Varianz — modifizierendes Kriterium einzuführen,

---

Theory of Portfolio Selection, in: F. H. Hahn — F. P. R. Brechling (Hrsg.), *The Theory of Interest Rates*, New York 1965.

<sup>85</sup> Nach M. R. Fisher, *Towards a Theory of Diversification*, Oxford Economic Papers, Vol. XIII (1961), S. 299, 302 ff.; so auch bei H. Arnold, a.a.O., Abb. 55.

<sup>86</sup> Zur ex-ante-Prognose ist ein solches nämlich nicht geeignet, damit nicht als Entscheidungsbasis.



das es gestattet, die Gesamtmenge der optimalen Portefeuilles in Teilmengen zu untergliedern, um dadurch zumindest eine *Erleichterung* der Letztentscheidung im Sinne der Geschäftspolitik des Kreditinstituts bei der Bestimmung des individualoptimalen Depots zu erreichen. Diese Analyse geht auf Ansätze von Roy und Baumol zurück<sup>87</sup>.

Geht man mit Baumol<sup>88</sup> davon aus, daß das Risiko des Anlegers weniger in den — in den Portefeuille-Selektionsmodellen betonten —

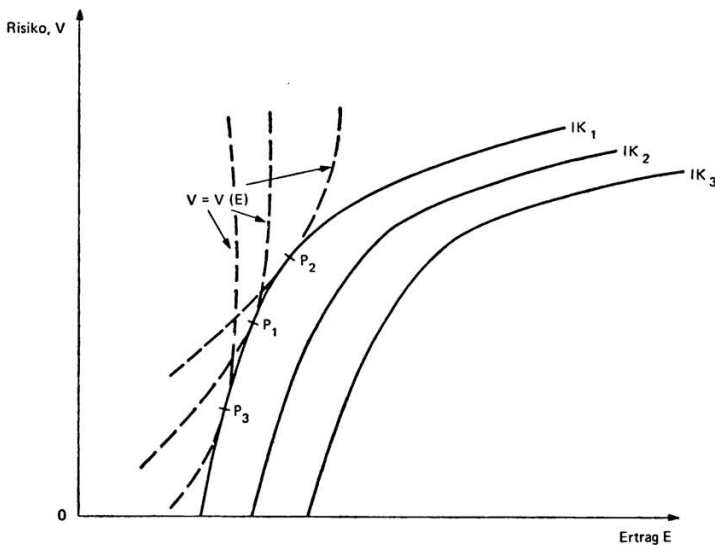


Abbildung 6: Anleger-Indifferenzlinien und Risikoneigung

mehr oder weniger gleichmäßigen Schwankungen des Depotetrags um dessen Erwartungswert als vielmehr in den Risiken zum Ausdruck kommt, daß der effektive Ertrag noch niedriger als der für den ungünstigsten Ereigniseintritt erwartete Ertrag liegen kann, so kann man, wenn  $v$  als Verhaltenskonstante des Anlegers (abhängig von dessen Erwartungsstruktur) definiert wird, eine untere „Konfidenzgrenze“  $KG$  formulieren:

$$(VIII.1) \quad KG = E - v\sigma = v \cdot f(E)$$

<sup>87</sup> Vgl. A. D. Roy, Safety First and the Holding of Assets, *Econometrica*, Vol. XX (1952), S. 431 ff.; W. J. Baumol, An Expected Gain-Confidence Limit Criterion for Portfolio Selection, *Management Science*, Vol. X (1964), S. 174 ff.

<sup>88</sup> Vgl. im folgenden W. J. Baumol, a.a.O., S. 431 ff.



Optimistische Anlegererwartungen bewirken niedrige, pessimistische hohe Werte für  $v$ . Je pessimistischer (risikoscheuer) der Anleger eingestellt ist, desto höhere Werte legt er  $v$  bei, und damit ist die Wahrscheinlichkeit um so geringer, daß die tatsächliche Ertragshöhe noch unter der Konfidenzgrenze liegen wird.

Die folgende Übersicht enthält zwei optimale Portefeuilles  $a$  und  $b$  mit ihren Ertragserwartungswerten und deren Standardabweichungen<sup>89</sup> (1., 2. Zeile), dazu (3., 4. Zeile), die obere und untere Konfidenzgrenze, die nach Meinung des Anlegers nicht über- bzw. unterschritten werden:

	$a$	$b$
(1) $E$	8	15
(2) $\sigma$	2	4
(3) $E + \sigma$	10	19
(4) $E - \sigma$	6	11

Da  $a$  wie  $b$  optimale  $E$ - $V$ -Kombinationen sind, können allein nach dem Erwartungswert-Varianz-Kriterium beim Anleger keinerlei ex-ante-Präferenzen für das eine oder andere bestehen. Das Erwartungswert-Konfidenzgrenze- $(E$ - $G$ -) Kriterium ermöglicht jedoch eine eindeutige Entscheidung:  $b$  ist als individual-optimales Portefeuille gegenüber  $a$  vorzuziehen, da ersteres den höchsten Erwartungswert und eine untere Konfidenzgrenze hat, die noch höher ist als der maximale, für Portefeuille  $a$  mögliche Wert. Dies verdeutlicht auch Abb. 7. Auf der Abszisse sind die Ertragserwartungswerte abgetragen, auf der Ordinate die Ertragserwartungen  $\pm v\sigma$ . Auch hiernach würde der rational handelnde Anleger stets  $b$  vorziehen: Wie Abb. 7 zeigt, hat die Kurve  $E - v\sigma$  ein Maximum  $v$  im Punkt  $P$ . Bis zum Punkt  $P$  ist es auf jeden Fall vorteilhafter, sich für das Depot mit höherem Ertrag zu entscheiden, da hier bei steigenden Chancen das Verlustrisiko durch die Ertragssteigerung noch überkompensiert wird, weil

$$(VIII.2) \quad E_a - v\sigma_a > E_b - v\sigma_b$$

für alle  $D > E_a > E_b$

Wie Abb. 7 zeigt, gilt dies für alle  $v$ ; es ist also gleich, mit welcher Standardabweichung gerechnet wird; stets steigt die Kurve  $E - v\sigma$  bis

<sup>89</sup> Vgl. W. J. Baumol, a.a.O., S. 177.

zu einem Maximum. Ein um so größeres Vielfaches der Standardabweichung gewählt wird, desto näher liegt das Maximum am Koordinatenursprung. Es ist hieraus zu entnehmen, daß ein individual-optimales Depot zwar stets auch allgemein optimal sein muß, daß aber nicht jedes allgemein optimale Depot auch individual-optimal ist. M. a. W.: Ist eine Anzahl verschiedener optimaler Depots mit gleicher erwarteter Ertragsrate gegeben, wird der Anleger dasjenige Portefeuille auswählen, das die geringste Gesamt-Varianz, also das geringste Risiko, aufweist.

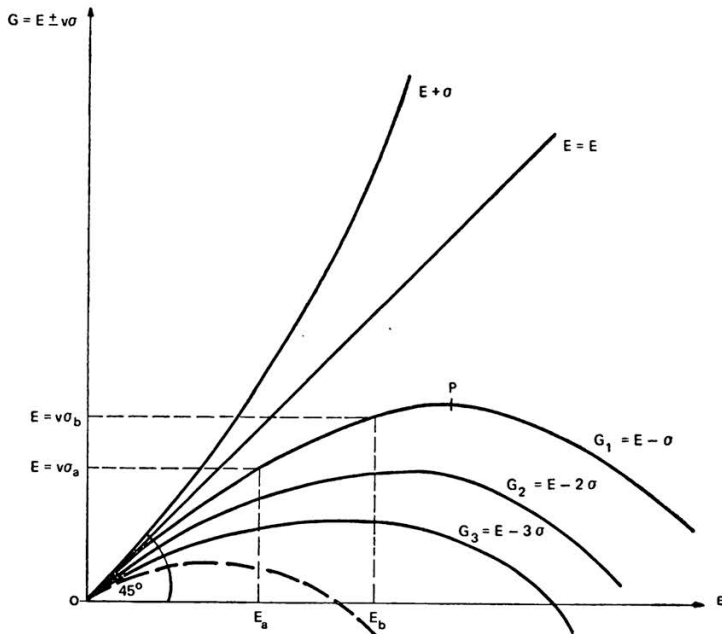


Abbildung 7: Zur Ermittlung individual-optimaler Depots:  
Auswahlkriterien möglicher Depots

In vorstehendem Beispiel erwartet der Anleger Divergenzen von maximal *einer* Standardabweichung ( $v = 1\sigma$ ); ist er noch vorsichtiger (risikoscheuer), wird er u. U. mit zwei oder gar drei Standardabweichungen ( $v = 2\sigma, 3\sigma$ ) rechnen<sup>90</sup>. Unterstellt man eine Verhaltensstruktur, bei der eine *Normalverteilung* der Einzelerwartungen des Anlegers um den

<sup>90</sup> Ob solche Verhaltensweise, etwa  $3\sigma$ , diesem Rahmen überhaupt noch sinnvoll sein können, kann hier nicht weiter diskutiert werden. — Vgl. H. A. Latané, Individual Risk Preference in Portfolio Selection, Journal of Finance, Vol. XV (1960), S. 45 ff.

Mittelwert (Erwartungswert)  $E$  vorliegt, so entfallen die Einzelerwartungen

- mit 68,27%iger Wahrscheinlichkeit in den Bereich  $E \pm 1 \sigma$ ,
- mit 95,45%iger Wahrscheinlichkeit in den Bereich  $E \pm 2 \sigma$ ,
- mit 99,73%iger Wahrscheinlichkeit in den Bereich  $E \pm 3 \sigma$ .

Ein durchschnittlich risikoempfindlicher Anleger wird sich vielleicht mit rd.  $\frac{2}{3}$  Wahrscheinlichkeit zufrieden geben, also mit  $v$  = einer Standardabweichung rechnen. Will man dagegen fast 100%ige Sicherheit haben, müßte man  $v$  = drei Standardabweichungen zugrunde legen; darunter würden aber Praktikabilität und Aussagekraft leiden. Ein Rechnen mit  $v$  = zwei Standardabweichungen ist auch *vorsichtigen* Anlegern zuzumuten. Das IBM-Standardprogramm zur Portfeuille-Auswahl liefert als Rechenergebnis außer dem Ertragserwartungswert die Abweichungswerte  $1 \sigma$ ,  $2 \sigma$  und  $3 \sigma$ .

Anhand von Abb. 7 lassen sich auch die Zusammenhänge zwischen den optimalen Portfeuille (E-V- bzw. E- $\sigma$ -Kombinationen) und den individual-optimalen Portfeuille (E-G-Kombinationen) erläutern<sup>91</sup>. In Abb. 7 ist, ausgehend von bekannter E- $\sigma$ -Optimalgrenze und für vorgegebene Anlegerverhaltenskonstante  $v$  die E-G-Optimalitätsgrenze durch Subtraktion der jeweiligen Standardabweichung vom Erwartungswert des Ertrags ermittelt. Es entsteht die Linie  $G_1$  (bzw.  $G_2, G_3$ ), die erkennen läßt, welche E-V- bzw. E- $\sigma$ -Kombinationen individual-optimale Portfeuille bezeichnen. Entspricht<sup>92</sup> das Maximum der G-Funktion einem Depot  $P$ , das höhere Ertragserwartung und größere Sicherheit — auf Grund der höheren Konfidenzgrenze — als die davor liegenden aufweist, ist eben  $P$  vorzuziehen. Die optimalen Portfeuille, die auf den ansteigenden Teil der G-Linie entfallen, sind nicht individual-optimal. Solche finden sich erst wieder auf dem fallenden Linienteil; hier sind höhere Ertragserwartungen auch mit höherem Risiko verbunden, die der Anleger abwägen muß.

E-V- bzw. E- $\sigma$ -optimale Portfeuille aus diesem Bereich sind dann auch E-G-, d. h. individual-optimal, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist. Es ist

$$(VIII.3) \quad \frac{dG}{dE} = 1 - v \cdot f'(E)$$

<sup>91</sup> Nach W. J. Baumol, a.a.O., S. 177. Vgl. auch M. Friedman — J. L. Savage, The Utility Analysis of Choices Involving Risk, Journal of Political Economy, Vol. LVI (1948), S. 276 ff.

<sup>92</sup> Vgl. hierzu W. Neuhaus, a.a.O., S. 96 f.

Für den vorgenannten Bereich (fallender G-Funktion) gilt

$$(VIII.4) \quad \frac{dG}{dE} < 0$$

bzw.

$$(VIII.5) \quad 1 - v \cdot f'(E) < 0$$

Daraus folgt die Bedingung

$$(VIII.6) \quad f'(E) > \frac{1}{v}$$

Aus der eingeschränkten Zahl der optimalen Portefeuilles gilt es also das individual-optimale Depot auszuwählen. Hier werden sich von Entscheidungsträger zu Entscheidungsträger unterschiedliche Einstellungen zum Risiko und damit zu den alternativen Portefeuilles zeigen. Amerikanische Untersuchungen<sup>93</sup> über z. B. verschiedene Investmentfonds kamen zu dem Ergebnis, daß sich diese durch teilweise sehr unterschiedlich hohe Risikoaversionskoeffizienten auszeichnen. M. a. W.: Der Ansatz der Portefeuilleauswahl-Theorie und andere Ansätze ergeben, daß ein Verhalten der Kapitalanleger durchaus erklärbar und realistisch ist, das zur Diversifikation ihrer Wertpapieranlagen und über dem Weg der Diversifikation zu größeren Sicherheitsäquivalenten führt. Jedoch vermögen die Ansätze die Frage nicht zu beantworten<sup>94</sup>, welche der alternativen Anlagemöglichkeiten der Anlageentscheidungsträger vorzieht, um den Möglichenbereich seiner Risikoneigung voll auszuschöpfen. Im allgemeinen begnügt man sich hinsichtlich der letztlichen Auswahl des zu realisierenden Portefeuilles mit dem Hinweis auf die allein subjektiv bestimmte individuelle Entscheidung<sup>95</sup> des Entscheidungsträgers entsprechend seiner Risikoneigung bzw. Risikoaversion. Der in Frage kommende  $v$ -Wert läßt sich bei Kreditinstituten nur auf Grund geschäftspolitischer Erfahrung und anleger- bzw. institutsindividueller Einschätzung fixieren.

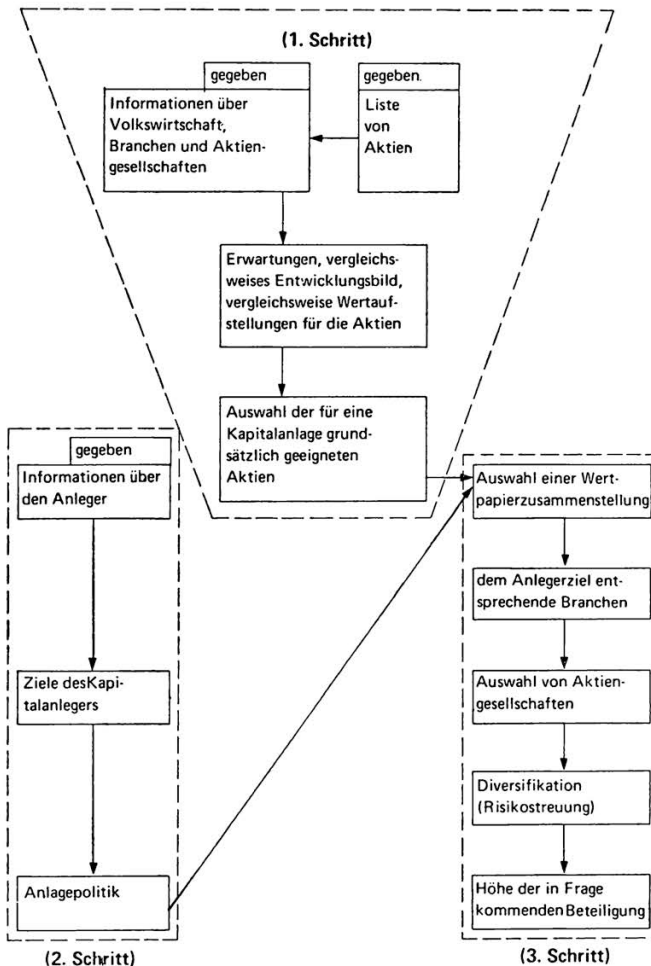
---

<sup>93</sup> Näheres hierzu vgl. D. E. Farrar, a.a.O.

<sup>94</sup> Vgl. H. Arnold, a.a.O., S. 190.

<sup>95</sup> Vgl. so z. B. H. C. Jochs, Lineares Programmieren, 2. Aufl., Tübingen 1965, S. 172.





Nach G. P. E. Clarkson: A Model of Trust Investment Behavior, in: Cohen—Hammer (Hrsg.), Analytical Methods in Banking, Homewood 1966, S. 343.

Abbildung 8: Schema der Ermittlung der individuellen Anlegerpräferenzfunktion und des sich daraus ergebenden Wertpapier-Portefeuilles

Man wird jedoch im allgemeinen annehmen können, daß der Einfluß des Risikos auf die Anlageentscheidung mit wachsendem Risiko zunimmt. Diese Zunahme kann wahrscheinlich meist sogar als *progressiv* angenommen werden, so daß die Standardabweichung exponentiell diesen Risikoeinfluß benennt. Abb. 8 zeigt schematisch die Vorgehensweise des Entscheidungsträgers beim Anlageentscheidungsprozeß im Hinblick auf die

Ermittlung der individuellen Präferenzfunktion des einzelnen Anlegers und der darauf gründenden Politik der optimalen Depot-Auswahl.

## 2. Nicht normalverteilte Erwartungen

Bei der dargestellten multivariablen Entscheidungsfunktion, die für Kapitalanlageentscheidungen unter Unsicherheit charakteristisch ist, sowie im praktischen Beispielfall der Depot-Diversifikation wurde stets von der sog. Gaußschen oder Normalverteilung ausgegangen. Diese beruht auf dem Ausdruck für eine Verteilung einer stetigen Varianten  $R_i$ , deren Häufigkeit durch die Funktion

$$(VIII.7) \quad f(R_i) = \frac{1}{\sigma_{R_i} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{R_i - \bar{R}_i}{\sigma_{R_i}} \right)^2}$$

gegeben wird. Darin ist  $R_i$  der Mittelwert der  $R_i$  (die Ermittlung kann durch lineare Transformation vereinfacht werden);  $\sigma_{R_i}$  ist die Größe einer Abweichung;  $\pi$  ist die sog. Ludolfsche Zahl ( $= 3,14159$ ). Grafisch ist die Fläche unter der durch  $y = f(R_i)$  dargestellten (Gaußschen) Glockenkurve zwischen  $R_i$  und  $(R_i + \Delta R_i)$  die Wahrscheinlichkeit, daß die Abweichung diesem Intervall angehört<sup>96</sup>. Die Normalverteilung<sup>97</sup> ist eine der wichtigsten theoretischen Verteilungen der Statistik.

Aus Abb. 6 ist zu entnehmen, daß sich der Anlageentscheidungsträger hinsichtlich zweier Anlagemöglichkeiten  $P_1$  und  $P_2$ , die auf ein und derselben Indifferenzkurve liegen, auch tatsächlich indifferent verhalten müßte; m. a. W.: Die Entscheidung des Kapitalanlegers zwischen den beiden Vorhaben wäre *indeterminiert*<sup>98</sup>.

Eine solche Annahme ist oft unrealistisch. So kann in Abb. 6 der Anleger z. B. die Ertrags- und Risikokombination  $P_2$  gegenüber  $P_1$  vorziehen, obwohl er hinsichtlich der Anlagen indifferent sein sollte. Entscheidet er sich für Anlage  $P_2$ , kommt darin dennoch eine Neigung zu risikoreicher Anlage zum Ausdruck, soweit sie nicht den Vermögenswert-

<sup>96</sup> Vgl. hierzu F. O. Ringleb, Mathematische Formelsammlung, Berlin 1967, S. 24 f.

<sup>97</sup> Ordinaten und Flächenanteile der Normalverteilung können auch auf Grund von Tabellen ermittelt werden, die in mathematischen und statistischen Formelsammlungen zu finden sind.

<sup>98</sup> Vgl. hierzu H. Albach, Wirtschaftlichkeitsrechnung bei unsicheren Erwartungen, a.a.O., S. 106 f.

bestand des Anlegers überhaupt gefährdet. Man bezeichnet ein derartiges Abweichen von der durch die Indifferenzkurve angegebenen Indeterminiertheit der Entscheidung über die Anlagealternativen als *Asymmetrie* von Entscheidungen. Andere als die oben unterstellten normalverteilten Erwartungsstrukturen der Anleger können zu von der Normalverteilung abweichenden Verteilungen, d. h. zu anderen Verhaltenskonstanten  $v$  führen. Die Grundaussage hinsichtlich der Bedeutung der Konfidenzgrenzen wird dadurch nicht berührt.

Jene Asymmetrie pflegt man quantitativ durch das Maß der „Schiefe“, das die Wahrscheinlichkeitsverteilung aufweist, zu erfassen (Abb. 9). Das Schiefemaß<sup>99</sup> ist also das dritte Element der multivariablen Anlegerentscheidungsfunktion, die, um es zu wiederholen, weitgehend subjektive Eigenschaften aufweist. Mathematisch werden Asymmetrie oder Schiefe von Verteilungen von Wahrscheinlichkeitserwartungen — die Ausführungen sollen sich auf „eingipfelige“ Verteilungen beschränken — sowie relative Konzentration der Verteilung der Erwartungswerte nach der Mitte bzw. zu den Enden (Steilheit bzw. Flachheit) mit Hilfe von sog. Momenten bestimmt. Von der Serie von „Momenten“ interessiert hier das dritte Moment  $\mu_3$  bzw. das dritte absolute Moment  $\alpha_3$ , das als Maßzahl für das Ausmaß der Asymmetrie der Verteilung dient. Es hat den Zahlenwert *Null*, wenn die Verteilung symmetrisch ist (= Normalverteilung); es hat

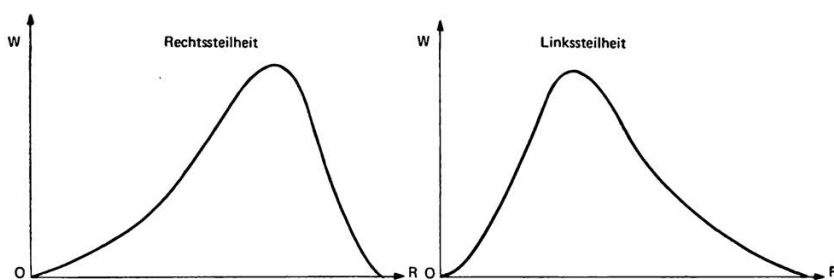


Abbildung 9: Schiefe Verteilungen

einen *positiven* Zahlenwert, wenn die Verteilung positiv geneigt ist, und einen *negativen* Zahlenwert, wenn die Verteilung negativ geneigt ist (s. Abb. 9).

<sup>99</sup> Vgl. hierzu P. Neurath, Statistik für Sozialwissenschaftler, Stuttgart 1966, S. 138 ff.

Das dritte Moment  $\mu_3^{100)}$  ergibt sich als

$$(VIII.8) \quad \mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R}_i)^3}{n}$$

und das dritte absolute Moment  $\alpha_3^{101)}$  als

$$(VIII.9) \quad \alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma_{R_i}^3}$$

Das Ausmaß an Asymmetrie oder Schiefe (der Verteilung) gibt also an, um wieviel eine Verteilung von Wahrscheinlichkeitserwartungen von der Symmetrie (der Normalverteilung) abweicht. Das vierte Moment<sup>102</sup> dient der Ermittlung der relativen Konzentration der Wahrscheinlichkeitserwartungen nach der Mitte bzw. auf die Enden der Verteilung. Es ist

$$(VIII.10) \quad \mu_4 = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R}_i)^4}{n}$$

bzw.

$$(VIII.11) \quad \alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma_{R_i}^4}$$

Das vierte absolute Moment nimmt, wie leicht nachgewiesen werden kann, für die *Normalverteilung* den Zahlenwert drei an. Ist eine Verteilung gegenüber der Normalverteilung weniger zur Mitte und mehr zu den Enden hin verteilt, ist die Kurve der Verteilung also vergleichsweise flacher als die Normalverteilung, nehmen Zähler *und* Nenner des obigen Quotienten zu, jedoch der *Nenner* schneller. Damit wird der Zahlenwert

---

<sup>100</sup> Allgemein ist

$$\mu_j = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R}_i)^j}{n}$$

das j-te Moment einer Reihe von Wahrscheinlichkeitserwartungen  $R_i$ .

<sup>101</sup> Allgemein ist

$$\alpha_j = \frac{\mu_j}{\sigma_{R_i}^j}$$

das j-te absolute Moment.

<sup>102</sup> Vgl. hierzu P. Neurath, a.a.O., S. 141.



niedriger als 3. Wenn die Häufigkeitsverteilung demgegenüber steiler als die Normalverteilung ist, d. h. vergleichsweise *mehr* zur Mitte und *weniger* zu den Enden hin konzentriert ist, nehmen auch hier wieder Zähler und Nenner des Quotienten des vierten absoluten Moments zu, jedoch der Zähler schneller. Dies bedeutet, daß der Zahlenwert größer als 3 wird. Auch das vierte absolute Moment vermag also Anhaltspunkte für Entscheidungen zu geben, indem es die Häufung entweder der günstigen oder ungünstigen Erwartungen angibt (wenn nicht Normalverteilung mit symmetrischer Verteilung der günstigen und ungünstigen Fälle angenommen wird).

### 3. Grenzen der Erfassung des Risikoproblems bei der Kapitalanlage

Das Problem, dem sich eine theoretische Behandlung des Risikoproblems bei Anlageentscheidungen konfrontiert findet<sup>103</sup>, ist durch zwei Faktoren charakterisiert, die zugleich die Grenzen einer modelltechnischen Lösung von Entscheidungsproblemen unter Unsicherheit verdeutlichen. Erstens basieren die Angaben über Höhe und Entwicklung der relevanten Ergebnisgrößen alternativer Anlegerhandlungen auf unvollkommenen Informationen. Solche Größen haben bei Anlageentscheidungen auf längere Sicht also niemals Gewißheitscharakter. Es handelt sich immer um Gewinn- bzw. Verlust*hypothesen*, welchen entsprechend dem jeweils vorhandenen Informationsniveau nur mehr oder minder große *Wahrscheinlichkeit* beigelegt werden kann. Das Anlagerisiko einer Fehldisposition kann letztlich im Grunde nicht dadurch völlig *ausgeschaltet* werden, daß unsichere Gewinn- oder Verlusterwartungen über *subjektive* Wahrscheinlichkeits- oder Glaubwürdigkeitsurteile in quasi-sichere Erwartungen zu transformieren und auf dieser Grundlage Entscheidungskriterien oder -regeln zu formulieren versucht wird.

Die andere Schwierigkeit bei der theoretischen Lösung des Risikoproblems bei Anlegerdispositionen besteht in der nicht möglichen Quantifizierbarkeit der *psychischen* Verhaltenskomponenten der Menschen schlechthin. Man umgeht in den Unsicherheitstheorien dieses Problem in der Weise, indem man den irrationalen Einfluß entweder in der subjektiven Wahrscheinlichkeitsverteilung selbst oder in einer besonderen Verhaltenskonstanten ausdrückt, welche neben diesen persönlichen auch die sachlichen Bestimmungsfaktoren der Risikoneigung im Entscheidungszeitpunkt berücksichtigen soll.

---

<sup>103</sup> Vgl. hierzu K. H. Strackee, a.a.O., S. 193 ff.

Eine solche ziffernmäßige Behandlung des psychischen Faktors ist als Arbeitshypothese für modelltechnische Analysen des Entscheidungsproblems berechtigt, doch muß sie stets dann versagen, wenn im Einzelfall konkrete Aussagen über die Risikopräferenz des Anlegers gefordert werden. Sicher ist die Annahme realistisch, daß der Anleger bei gravierenden Dispositionen hinsichtlich großer Aktienkäufe oder -verkäufe die Gewinnchancen und Verlustrisiken alternativer Handlungsweisen gegeneinander abwägen wird. Ob er jedoch in der Lage ist, den Verlauf einer Entscheidungsgrenze oder darüber hinaus die Gestalt von Indifferenzkurven mit unterschiedlichem Präferenzniveau präzise anzugeben, dürfte zweifelhaft sein, auch, was seinen eventuellen professionellen Berater angeht: Hierbei nehmen weitgehend psychische Wirkungsgrößen Einfluß, die dem Kriterium rationaler Urteilsfindung kaum zugänglich sind. Die Entscheidungskriterien und -regeln der verschiedenen Theorien — auf deren nähere Darstellung bewußt verzichtet wurde — können somit als Erklärung und Deskription der gedanklichen Schritte dienen, die bei Anlageentscheidungsprozessen unter Unsicherheitsbedingungen vorgenommen werden. Sie vermitteln aber keine „Rezeptur“ für *allgemeingültige* Empfehlungen für Anlegerentscheidungen in Unsicherheitssituationen. Bei unsicheren Erwartungen beeinflusst die psychische Einstellung des Anlegers die Erklärungsfunktion einer Anlageentscheidung so stark<sup>104</sup>, daß es nicht gelingt, jene derart zu determinieren, daß sich aus ihr die Art der Anlageentscheidung *zwangsläufig* einstellt.

Wenn man allerdings auch den verschiedenen Lösungsansätzen für die Praxis anlegerpolitischer Entscheidungen keinen unmittelbaren, allgemein und ex ante für *alle* Anleger gültigen Eigenwert beilegen kann, so ist ihre Bedeutung für die gedankliche Analyse des Unsicherheitsproblems bei der Aktien- und Kapitalanlage allgemein nicht zu bestreiten. Daß es trotz der verschiedenen Versuche noch nicht gelungen ist, eine theoretisch allseitig befriedigende Lösung des Unsicherheitsproblems zu finden, die zugleich auch den Erfordernissen der Anlegerpraxis gerecht wird, ist vor allem wohl durch das schwierige und komplexe Untersuchungsobjekt erklärbar.

## IX. Ausblick

Der geschilderte, auf das Wertpapierportefeuille der Banken bezogene Ansatz der „Portfolio-Selection“-Theorie ist in einer weiteren Analyse

<sup>104</sup> Vgl. H. Albach, Wirtschaftlichkeitsrechnung bei unsicheren Erwartungen, a.a.O., S. 127.

zweckmäßig und fruchtbar ausweitbar auf das Problem der unter Rendite, Risiko und Liquidität<sup>105</sup> optimal zu gestaltenden Gesamtbilanz der Bank<sup>106</sup>, in der angelsächsischen Terminologie plastisch als „asset management“ bzw. genauer als „dynamic balance sheet management“ bezeichnet<sup>107</sup>. Diese sehr komplexe Problematik sei einem weiteren Beitrag vorbehalten.

---

<sup>105</sup> Vgl. hierzu P. L. *Cheng*, Optimum Bond Portfolio Selection, Management Science, Vol. VIII (1962), S. 490 ff., sowie ferner auch J. I. *Bogen*, The Changing Composition of Bank Assets, Graduate School of Business Administration, New York University, New York 1961; W. *Lindow*, Bank Capital and Risk Assets, National Banking Review, Vol. I (1963), No. 1; schließlich R. H. *Parks*, Portfolio Operations of Commercial Banks and the Level of Treasury Security Prices, Journal of Finance, Vol. XIV (1959), S. 52 ff.

<sup>106</sup> Vgl. auch D. R. *Hodgman*, Commercial Bank Loan and Investment Policy, Champaign, Ill., 1963; R. J. *Robinson*, The Management of Bank Funds, 2. Aufl., New York 1962. Vgl. auch Federal Reserve Bank of Kansas City: Bank Reactions to Security Losses, Monthly Review, June 1960; dies.: Commercial Bank Investments in Recession and Expansion, Monthly Review, March 1959.

<sup>107</sup> Von den verschiedenen Ansätzen in der Literatur vgl. z. B. K. J. *Cohen*, — E. J. *Elton*, Intertemporal Portfolio Analysis Based on Simulation of Joint Returns, Management Science, Vol. XIV (1968), S. 5 ff.; K. J. *Cohen* — F. S. *Hammer*, Linear Programming and Optimal Bank Asset Management Decisions, Journal of Finance, Vol. XXII (1967), S. 147 ff.; R. C. *Porter*, A Model of Bank Portfolio Selection, Yale Economic Essays, Vol. I (1961), S. 323 ff.; D. *Chambers* — A. *Charnes*, Inter-Temporal Analysis and Optimization of Bank Portfolios, Management Science, Vol. VII (1961), S. 393 ff.; H. A. *Latané*, Portfolio Balance. The Demand for Money, Bonds and Stock, Southern Economic Journal, Vol. XXIX (1962), S. 71 ff.; G. R. *Morrison*, Portfolio Behavior of Banks, Diss. Chicago, 1962; S. *Tilles*, Strategies for Allocating Funds, Harvard Business Review 1966, S. 72 ff.