

Surplus-Management

Von Markus Rudolf*, St. Gallen

I. Einleitung

Surplus-Management bei Vorsorgeeinrichtungen (z.B. Pensionskassen oder Lebensversicherern) gewinnt in vielen Industrieländern an Bedeutung, weil die private Altersvorsorge einen zunehmenden Stellenwert einnimmt. Die sog. Destinatäre einer Vorsorgeeinrichtung sparen ein Guthaben an, welches nach ihrem Ausscheiden aus dem Berufsleben entweder in Form einer einmaligen Zahlung oder als annuitätische Rente wieder ausgeschüttet wird. Die Differenz zwischen dem gesamten Marktwert der Einlagen (Assets) und dem Barwert der Leistungsverpflichtungen (Liabilities) einer Vorsorgeeinrichtung bezeichnet man als Surplus. Charakteristisch dabei ist, daß sich die Verzinsung der Assets am Wachstum der Liabilities orientieren muß. Die Leistungsverpflichtungen bei Vorsorgeeinrichtungen werden typischerweise vom Lohnwachstum getrieben. Damit liegt für die Assetrendite ein stochastischer Benchmark vor. Im Surplus-Management identifiziert man Anlagestrategien, die die Benchmarkrendite mit möglichst geringer Wahrscheinlichkeit verfehlen.

Zum Surplus-Management hat sich eine umfangreiche Literatur etabliert. Die Grundlage dabei ist das von *Roy* (1952) entwickelte und von *Telser* (1955) weiterentwickelte Safety-First-Kriterium¹, welches die Wahrscheinlichkeit für ein Verfehlen einer vorgegebenen Mindestrendite eines Portfolios optimiert. Man bezeichnet die beiden Kriterien als Roy- bzw. Telser-Kriterium. Ihr Ansatz wurde in einem Artikel von *Leibowitz* und *Henriksson* (1988)² aufgegriffen und auf das Surplus-Management übertragen. Dadurch wurde eine umfangreiche Diskussion in den wissen-

* Ich danke Alex Keel, Eberhart Ketzel, einem anonymen Gutachter und den Herausgebern der Zeitschrift für wertvolle Hinweise und Verbesserungsvorschläge. Der ALMAFIN AG (St. Gallen) verdanke ich Unterstützung in der Entstehungszeit dieser Studie.

¹ Eine Erweiterung dieses Konzeptes zu sog. Downside-Risk-Ansätzen ist von *Harlow* (1991) gut zusammengefaßt.

² Sie verwenden statt dem Ausdruck „Safety-First“ die Bezeichnung „Shortfall-Risk“.

schaftlichen Zeitschriften entfacht. Wichtige Artikel in diesem Zusammenhang sind *Black* (1989), *Ezra* (1991), *Bodie* (1991), *Ambachtsheer* (1994) und *Leibowitz, Kogelman, Bader* (1994). Alle diese Modelle gehen von deterministisch wachsenden Leistungsverpflichtungen aus. Da die Auszahlungsverpflichtungen von Vorsorgeeinrichtungen typischerweise am stochastischen Lohnwachstum orientiert sind, handelt es sich hier um eine realitätsferne Annahme. Hier setzen die Ansätze von *Keel* und *Müller* (1995), von *Leibowitz, Bader* und *Kogelman* (1996) und von *Jaeger* und *Zimmermann* (1997) an. *Keel* und *Müller* (1995) untersuchen die analytischen Eigenschaften von Portfolios, deren Volatilität der Surplusrendite minimiert wird. Dadurch erreichen die Autoren eine einfache Übertragung des Ansatzes von *Markowitz* (1952) und *Roy* (1952) auf den Fall des Asset- und Liability-Management. Im vorliegenden Aufsatz sollen hingegen Portfolios mit minimaler Varianz der Assetrenditen gesucht werden, da die Schwankung des Surplus alleine keine relevante Zielgröße einer Pensionskasse sein kann. Wenn die Leistungsverpflichtungen ungefährdet sind, dann werden die Destinatäre eine höhere Präferenz für eine ansprechende Rendite (bei minimal möglicher Assetvolatilität) als für eine minimale Surplusschwankung haben, weil sie dadurch eine höhere Versorgungsleistung erwarten dürfen. Schließlich beziehen sich die Ansätze von *Leibowitz, Bader* und *Kogelman* (1996) und von *Jaeger* und *Zimmermann* (1997) grundsätzlich auf Portfolios, die nur zwei Anlagen beinhalten. Außerdem lassen sie Anlagerestriktionen außer acht. Obwohl so die Problematik des Surplus-Management gut illustriert wird, ist für den Praxiseinsatz ein umfassenderes Konzept notwendig.

Der vorliegende Artikel erweitert die bestehende Literatur um die Möglichkeit, beliebig viele Anlagen und Anlagerestriktionen bei stochastischer Benchmarkrendite in das Surplus-Management einzubeziehen. Es wird die Wahrscheinlichkeit dafür optimiert, daß die Ausschüttungen an die Destinatäre aus den vorhandenen Anlagen geleistet werden können. Im ersten Abschnitt wird das Safety-First-Konzept auf das Surplus-Management angewendet. Der zweite Abschnitt enthält die Herleitung der Efficient Surplus Frontier, die graphische Darstellung von effizienten Kombinationen aus erwarteter Rendite der Assets und Volatilität des Surplus, sowie des Roy-Kriteriums im Surplus-Management. Im folgenden Abschnitt wird das Telser-Kriterium für den Surplus bestimmt. Der vierte Abschnitt enthält die Bestimmung einer Efficient Shortfall Frontier³ für

³ Die Efficient Shortfall Frontier zeigt den Zusammenhang zwischen Mindestrendite und Shortfall-Wahrscheinlichkeit effizienter Portfolios, vgl. *Jaeger, Rudolf* und *Zimmermann* (1995).

den Surplus, die sog. Efficient Surplus Shortfall Frontier. Daran anschließend wird eine numerische Fallstudie mit und ohne Berücksichtigung gesetzlicher Anlagerestriktionen durchgeführt. Der abschließende Abschnitt enthält Schlußfolgerungen und eine Zusammenfassung der Ergebnisse.

II. Safety First im Surplus-Management

Charakteristisch für Vorsorgeeinrichtungen sind gesetzliche Vorschriften, die durch Beschränkungen in den Anlagermöglichkeiten die Auszahlung der Guthaben der Destinatäre mit hinreichender Konfidenz gewährleisten sollen. Dabei wird vorgeschrieben, daß eine bestimmte Mindestverzinsung des eingelegten Kapitals nur mit einer Höchstwahrscheinlichkeit unterschritten werden darf. *Roy* (1952) und *Markowitz* (1959) haben bereits in den 50er Jahren Ansätze entwickelt, die auf diese Fragestellung zugeschnitten sind, auch wenn die Übertragung ihrer Modelle auf das Surplus-Management erst durch *Leibowitz* und *Henriksson* (1988 und 1989) in die angelsächsische Literatur eingegangen ist.

Im vorliegenden Aufsatz wird die Wahrscheinlichkeit dafür optimiert, eine Mindestrendite zu unterschreiten. Da der Ansatz von *Roy* (1952) auf einer allgemeineren Grundlage als das Konzept von *Leibowitz* und *Henriksson* (1988 und 1989) steht⁴, soll hier zunächst an seinem Ansatz angeknüpft werden. Unter der Rendite des Surplus einer Pensionskasse ver-

steht man gemäß *Sharpe* und *Tint* (1990) den Quotienten $\tilde{r}_s = \frac{\tilde{S}_{t+1} - S_t}{L_t}$

aus der Wertveränderung des Surplus $\tilde{S}_{t+1} - S_t$ innerhalb eines Jahres und dem aktuellen Stand der Liabilities L_t . Ziel des Surplus-Management ist es, die Wahrscheinlichkeit (die Desaster-Wahrscheinlichkeit) dafür zu minimieren, daß die Surplusrendite ein bestimmtes Mindestniveau r^* unterschreitet. Nimmt man an, die erwartete Surplusrendite und die Volatilität der Surplusrendite seien mit μ_s bzw. σ_s bezeichnet, dann gilt für die Desaster-Wahrscheinlichkeit der Surplusrendite nach der Ungleichung von Tschebyscheff (siehe dazu *Roy* 1952):

$$(1) \quad \begin{aligned} P(\tilde{r}_s \leq r^*) &= P(\tilde{r}_s - \mu_s \leq r^* - \mu_s) \\ &= P(|\tilde{r}_s - \mu_s| \geq \mu_s - r^*) \leq \frac{\sigma_s^2}{(\mu_s - r^*)^2} \end{aligned}$$

⁴ *Roy* braucht keine Annahme über die Verteilung der Renditen zu treffen. *Leibowitz* und *Henriksson* (1988 und 1989) hingegen unterstellen normalverteilte Renditen.

Nach dem Ansatz von *Roy* (1952) wird die obere Grenze der Desaster-Wahrscheinlichkeit⁵ $\frac{\sigma_s^2}{(\mu_s - r^*)^2}$ minimiert, oder, äquivalent dazu, der Kehrwert der Obergrenze $-z \equiv \frac{\mu_s - r^*}{\sigma_s}$ maximiert. Dieser letzte Ausdruck entspricht dem negativen Argument einer Standardnormalverteilung für die Surplusrendite. An diesem Punkt setzen *Leibowitz* und *Henriksson* (1988) ein: Sie unterstellen normalverteilte Surplusrenditen zur Minimierung der Desaster-Wahrscheinlichkeit. Gleichung (1) zeigt aber, daß diese Annahme nicht notwendig ist. Es genügt, für die Surplusrendite eine Wahrscheinlichkeitsverteilung anzunehmen, die sich durch den Erwartungswert und die Standardabweichung charakterisieren läßt, damit die Voraussetzung für die Anwendung der Tschebyscheff-Ungleichung gegeben ist. Insgesamt wird also die Desaster-Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Surplusrendite ein Mindestniveau unterschreitet, minimiert, wenn das Portfolio der Anlagen folgende Optimierungsaufgabe löst:

$$(2) \quad \max_{\omega} (-z) = \max_{\omega} \frac{\mu_s - r^*}{\sigma_s} \Leftrightarrow \min_{\omega} z = \min_{\omega} \frac{r^* - \mu_s}{\sigma_s}$$

In (2) bezeichnet $\omega \in \mathbb{R}^n$ den Vektor der Portfolioanteile, wenn n die Anzahl von Wertpapieren innerhalb des Anlagenportfolios ist. Dieses Optimierungskriterium ist aus der Portfoliotheorie als das *Roy* (1952)-Kriterium oder auch als Safety-First-Kriterium bekannt. Damit die Zielgröße $-z$ positiv ist, muß $r^* < \mu_s$ angenommen werden. Abbildung 1 veranschaulicht diesen Sachverhalt graphisch.

Wenn die Efficient Frontier der n Anlagen gegeben ist, dann identifiziert man das Roy-Portfolio, indem man eine Tangente an die Efficient Frontier legt, die die Ordinate auf der Höhe der Mindestrendite r^* schneidet. Das Tangentialportfolio weist eine minimale Desaster-Wahrscheinlichkeit auf. Man beachte, daß $-z$ die (positive) Steigung der Tangente an die Efficient Frontier ist. Man beachte weiterhin, daß z das Argument einer Standardnormalverteilung sein kann, wenn angenommen wird, daß die Surplusrendite normalverteilt ist. In diesem Fall wird die Tangente nach *Leibowitz* und *Henriksson* (1988) als Shortfall-Linie bezeichnet und die Desaster-Wahrscheinlichkeit als Shortfall Risk.

⁵ Im vorliegenden Artikel wird von Desaster-Wahrscheinlichkeit immer dann gesprochen, wenn der allgemeinere Ansatz von *Roy* (1952) verwendet wird. Der Ausdruck „Shortfall Risk“ wird verwendet, wenn normalverteilte Surplusrenditen entsprechend dem Ansatz von *Leibowitz* und *Henriksson* (1988) unterstellt werden.

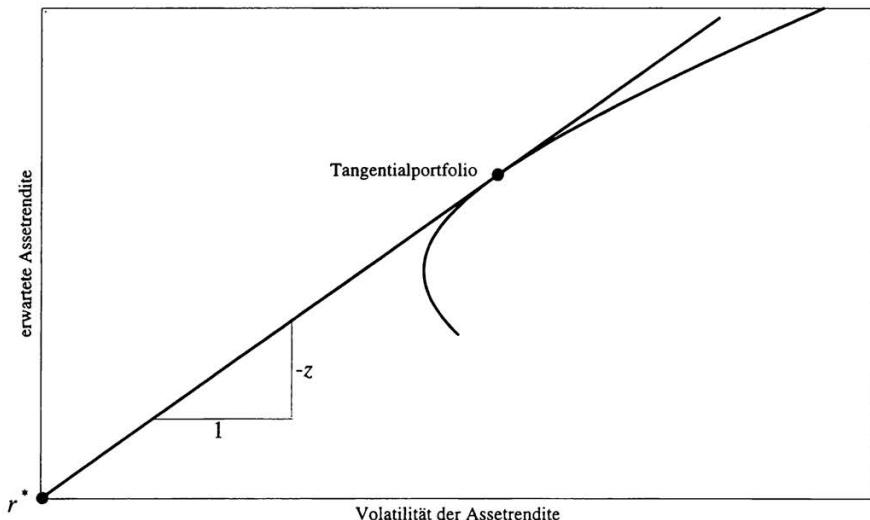


Abbildung 1: Roy-Kriterium: Minimierung der Desaster-Wahrscheinlichkeit

III. Das Roy-Kriterium im Surplus-Management

Ausgehend vom Optimierungsproblem (2) ist es nun möglich, effiziente Anlagemöglichkeiten mit minimaler Desaster-Wahrscheinlichkeit für die Surplusrendite zu identifizieren. Um das Roy-Kriterium auf das Surplus-Management anwenden zu können, ist es zunächst notwendig, die Surplusvolatilität σ_s als Funktion der erwarteten Anlagerendite darzustellen. Dazu ist es notwendig, sich einige bilanztechnische Zusammenhänge des Surplus-Management zu vergegenwärtigen. Unter dem Surplus S einer Vorsorgeeinrichtung versteht man die Differenz zwischen dem Marktwert der Anlagen A und dem Barwert der Verbindlichkeiten L zu einem Zeitpunkt t . Bezeichnet man die Rendite der Assets und der Liabilities mit \tilde{r}_a bzw. \tilde{r}_l , dann kann der Surplus in Periode $t + 1$ durch Gleichung (3) beschrieben werden:

$$(3) \quad \tilde{S}_{t+1} = \tilde{A}_{t+1} - \tilde{L}_{t+1} = A_t(1 + \tilde{r}_a) - L_t(1 + \tilde{r}_l)$$

Subtrahiert man von Gleichung (3) den Surplus der Vorperiode t und teilt man durch die Liabilities in Periode t , dann erhält man die Surplusrendite. Den Quotienten aus den Anlagen und den Liabilities in einer Periode bezeichnet man als den Deckungsgrad F (Funding Ratio) einer

Vorsorgeeinrichtung. In Gleichung (4) sind diese Ausführungen analytisch zusammengefaßt:

$$(4) \quad \tilde{r}_s = F \cdot \tilde{r}_a - \tilde{r}_l$$

Die Surplusrendite in Gleichung (4) ist um so höher, je höher der Dekkungsgrad der Pensionskasse ist, je höher ihre erzielte Anlagerendite ist und je geringer das Wachstum der Verbindlichkeiten ausfällt. Bei einem Deckungsgrad von 1 ergibt sich die Surplusrendite als einfache Differenz zwischen der Rendite der Assets und der Liabilities; je höher der Dekkungsgrad ist, desto größer ist der Einfluß der Assets auf den Surplus, je kleiner er ist, desto größer sind die Auswirkungen der Liabilities auf die Surplusveränderung. Aus (4) leitet sich entsprechend *Jaeger* und *Zimmermann* (1997) die erwartete Surplusrendite und die Surplusvolatilität ab (μ_l und σ_l^2 : erwartete Rendite und Varianz der Liabilities, μ_a und σ_a^2 : erwartete Rendite und Varianz der Assets, σ_{al} : Kovarianz zwischen der Anlagerendite und der Rendite der Auszahlungsverpflichtung):

$$(5) \quad \mu_s = F\mu_a - \mu_l \quad \text{und} \quad \sigma_s^2 = F^2\sigma_a^2 + \sigma_l^2 - 2 \cdot F \cdot \sigma_{al}$$

Es wird angenommen, daß die Vorsorgeeinrichtung bei der Wahl von Anlagemöglichkeiten ausschließlich effiziente Alternativen berücksichtigt. Sie muß deshalb eine Kombination aus Volatilität und erwarteter Anlagerendite wählen, die auf der Efficient Frontier (vgl. Abbildung 1) liegt. Die formale Darstellung der Efficient Frontier ist entsprechend *Roy* (1952), *Merton* (1972) und *Roll* (1977):

$$(6) \quad \sigma_a^2 = \frac{c\mu_a^2 - 2b\mu_a + a}{d}, \quad a \equiv \mu' V^{-1} \mu, \quad b \equiv \mu' V^{-1} e, \quad c \equiv e' V^{-1} \mu, \quad d \equiv ac - b^2 > 0$$

$V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ enthält die Kovarianzen der Renditen der n im Anlageportfolio enthaltenen Anlagerenditen, $e \in \mathbb{R}^n$ ist der n -dimensionale Einsvektor und $\mu \in \mathbb{R}^n$ der Vektor der erwarteten Anlagerenditen. Erweitert man Roys Ansatz, indem man einen stochastischen Benchmark zuläßt, dann muß die Kovarianz zwischen den Anlagen und den Leistungsverpflichtungen σ_{al} berücksichtigt werden. Auch zur Bestimmung dieser Größe wird angenommen, daß ausschließlich in effiziente Anlagen investiert werde. Dazu errechnet man den Vektor effizienter Portfolioanteile ω nach Gleichung (7)⁶:

⁶ Auch hier kann auf *Roy* (1952), *Merton* (1972) und *Roll* (1977) zurückgegriffen werden.

$$(7) \quad \omega = \frac{V^{-1}\mu}{d} (c\mu_a - b) - \frac{V^{-1}e}{d} (b\mu_a - a)$$

Die Kovarianz zwischen dem Anlagenportfolio und den Liabilities ergibt sich, wenn man an den Vektor der Portfolioanteile in (7) den Vektor der Kovarianzen $\bar{\sigma}_{al} \in \mathbb{R}^n$ zwischen den n Anlagemöglichkeiten und den Liabilities von rechts heranmultipliziert. Folglich gilt für die Kovarianz zwischen dem Anlagenportfolio und den Liabilities:

$$(8) \quad \sigma_{al} \equiv \omega' \bar{\sigma}_{al} = \frac{g}{d} (c\mu_a - b) - \frac{f}{d} (b\mu_a - a), \quad g \equiv \bar{\sigma}'_{al} V^{-1} \mu, f \equiv \bar{\sigma}'_{al} V^{-1} e$$

Substituiert man (6) und (8) in (5), dann erhält man die Varianz der Surplusrendite, wenn ausschließlich in effiziente Portfolios investiert wurde.

$$(9) \quad \sigma_s^2 = \frac{C\mu_a^2 - 2B\mu_a + A}{d}$$

$$A \equiv F^2 a + 2Fbg - 2Faf + d\sigma_l^2, \quad B \equiv Bf^2 + Fcg - Fbf, \quad C \equiv F^2 c$$

Offensichtlich ist die formale Darstellung der Surplusvarianz der formalen Darstellung der Efficient Frontier (Gleichung 6) ganz ähnlich. Gleichung (9) soll deshalb als Efficient Surplus Frontier bezeichnet werden. Das Roy-Kriterium des Surplus-Management erfordert es, die Desaster-Wahrscheinlichkeit der Surplusrendite für eine gegebene Mindestrendite des Surplus zu minimieren. In den Ausführungen hier wird allgemein von einer Surplus-Mindestrendite r^* ausgegangen. Man beachte aber, daß eine Minimierung der Desaster-Wahrscheinlichkeit nach Gleichung (2) äquivalent mit der Minimierung des z -Wertes ist. Substituiert man (9) und (5) in (2), dann erhält man eine alternative Darstellung des z -Wertes:

$$(10) \quad z = \frac{\sqrt{d}(r^* - F\mu_a + \mu_l)}{\sqrt{C\mu_a^2 - 2B\mu_a + A}}$$

Differenziert man den Ausdruck (10) nach der Anlagerendite μ_a und setzt die Ableitung auf Null, dann erhält man die erwartete Rendite eines Anlagenportfolios, welches die Mindestrendite r^* mit minimaler Wahrscheinlichkeit verfehlt:

$$(11) \quad \mu_a = \frac{B(r^* + \mu_l) - AF}{C(r^* + \mu_l) - BF}$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gleichung (9) bzw. in Gleichung (7) ein, dann erhält man die Volatilität bzw. die Portfolioanteile des Roy-Portfolios bei einem stochastischen Benchmark:

$$(12) \quad \begin{aligned} \sigma_s &= \sqrt{\frac{C(r^* + \mu_l)^2 - 2B(r^* + \mu_l) + AF}{B - C(r^* + \mu_l)}} \\ \omega &= \frac{V^{-1}\mu - V^{-1}e(r^* + \mu_l)}{B - C(r^* + \mu_l)} \end{aligned}$$

Die Obergrenze der Desaster-Wahrscheinlichkeit erhält man nach Gleichung (1) aus $1/z^2$. Den z -Wert erhält man durch Substitution von (11) und (12) in (2):

$$(13) \quad z = -\sqrt{C(r^* + \mu_l)^2 - 2BF(r^* + \mu_l) + AF^2} \cdot \sqrt{\frac{d}{D}}, \quad D \equiv AC - B^2$$

Durch die Gleichungen (11), (12) und (13) ist die erwartete Assetrendite, die Volatilität der Surplusrendite und die Shortfall-Wahrscheinlichkeit des Roy-Portfolios charakterisiert.

Dieser Abschnitt soll durch eine kurze Betrachtung zur angemessenen Wahl der Surplus-Mindestrendite r^* abgeschlossen werden. Es ist offensichtlich, daß es das Ziel einer Vorsorgeeinrichtung sein muß, in jeder Periode einen Deckungsgrad von mindestens 1 zu erreichen, d.h. einen Surplus von mindestens 0. Durch eine kurze, analytische Betrachtung läßt sich dann eine Bedingung für r^* formulieren:

$$\tilde{S}_{t+1} \geq 0 \Leftrightarrow \tilde{S}_{t+1} - S_t \geq L_t - A_t \Leftrightarrow \tilde{r}_s \geq \frac{L_t - A_t}{L_t} = 1 - F_t = r^*$$

Die Mindestrendite für den Surplus r^* muß also 1 minus dem aktuellen Deckungsgrad sein, wenn die Leistungsfähigkeit der Vorsorgeeinrichtung sichergestellt sein soll. Obwohl die analytischen Darstellungen hier eine allgemeine Surplus-Mindestrendite r^* verwenden, wird in der Fallstudie als Mindestrendite $1 - F$ angenommen.

IV. Das Telser-Kriterium im Surplus-Management

Gesetzliche Restriktionen schreiben oft das Erreichen einer bestimmten Mindestrendite mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit vor. Eine Minimierung der Desaster-Wahrscheinlichkeit ist damit nicht notwendig, es

genügt, eine vorgegebene Desaster-Wahrscheinlichkeit zu erreichen. Portfolios, die solche Restriktionen erfüllen, bezeichnet man nach *Telser* (1955) als Telser-Portfolios. Hier wird allerdings der Telser-Ansatz um einen stochastischen Benchmark erweitert. Verwendet man Gleichung (5), substituiert sie in (2) und stellt die Terme um, dann gilt für die Varianz der Surplusrenditen:

$$(14) \quad \sigma_s^2 = \left(\frac{r^* + \mu_l - F\mu_a}{z} \right)^2$$

Dabei kann nach Gleichung (2) aus der maximalen Desaster-Wahrscheinlichkeit $k \equiv 1/z^2$ der z -Wert in Gleichung (14) als $-z = \sqrt{1/k}$ errechnet werden. Wiederum ist also keine explizite Annahme über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Surplus-Renditen notwendig. Unterstellt man dennoch normalverteilte Surplusrenditen ist der z -Wert als Argument der Standardnormalverteilung zu betrachten. Setzt man Gleichung (14) mit Gleichung (9) gleich und löst nach der erwarteten Anlagerendite μ_a auf, so erhält man zwei effiziente Portfolios, die die Wahrscheinlichkeitsrestriktion erfüllen:

$$(15) \quad \begin{aligned} \mu_a &= \frac{Bz^2 - Fd(r^* + \mu_l)}{Cz^2 - F^2d} \\ &\pm z \frac{\sqrt{-z^2D + d(C(r^* + \mu_l)^2 - 2BF(r^* + \mu_l) + AF^2)}}{Cz^2 - F^2d} \end{aligned}$$

Beide Portfolios erfüllen die Mindestrendite für den Surplus mit gleicher Wahrscheinlichkeit, deshalb ist nur das Portfolio mit der höheren, erwarteten Surplusrendite relevant. Da $r^* < \mu_s$ angenommen wurde, ist der z -Wert nach Gleichung (2) negativ; das Telser-Portfolio erhält man demnach, wenn man den zweiten Term in Gleichung (15) vom ersten subtrahiert. Setzt man den z -Wert nach Gleichung (13) für die minimale Desaster-Wahrscheinlichkeit in den Ausdruck (15) ein, so erhält man als eindeutige, erwartete Surplusrendite (nicht überraschend) die Rendite des Roy-Kriteriums nach Gleichung (11). Keine Lösung erhält man, ebenfalls nicht überraschend, wenn z kleiner ist als der z -Wert des Roy-Portfolios nach Gleichung (13).

V. Die Efficient Shortfall Frontier und die Shortfall Probability Efficient Frontier im Surplus-Management

Die Efficient Shortfall Frontier (vgl. *Jaeger, Rudolf* und *Zimmermann* 1995) ist ein zur Efficient Frontier alternatives Konzept zur Darstellung des Zusammenhangs zwischen Rendite und Risiko von Portfolios. Dabei werden die Mindestrendite und die zugehörige Desaster-Wahrscheinlichkeit von allen Roy-Portfolios auf der Efficient Frontier in einen analytischen Zusammenhang gebracht. Überträgt man dieses Konzept auf das Surplus-Management, dann ist es möglich, eine sog. Efficient Surplus Shortfall Frontier zu bestimmen.

Gleichung (11) lässt sich durch Umstellung der Terme nach der Mindestrendite für den Surplus r^* des Roy-Portfolios auflösen und man erhält:

$$(16) \quad r^* + \mu_l = F \frac{B\mu_a - A}{C\mu_a B}$$

Substituiert man diesen Ausdruck in Gleichung (13) und formt um, so erhält man den z -Wert für die minimale Obergrenze der Desaster-Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der erwarteten Anlagerendite:

$$(17) \quad z = -\sqrt{C\mu_a^2 - 2B\mu_a + A} \cdot \frac{F\sqrt{d}}{C\mu_a - B}$$

Die Obergrenze der Desaster-Wahrscheinlichkeit erhält man durch die bereits bekannte Wahrscheinlichkeits-Abschätzung $k \equiv 1/z^2$, wobei z durch Gleichung (17) eindeutig bestimmt ist. Unterstellt man, wie *Leibowitz* und *Henriksson* (1988), normalverteilte Surplusrenditen, dann ergibt sich die Efficient Surplus Shortfall Frontier. Dazu setzt man den z -Wert aus Gleichung (17) als das Argument der Standardnormalverteilungsfunktion Φ ein.

$$(18) \quad k = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}v^2} dv$$

Ein weiteres Konzept zur Integrierung des Shortfall-Risk-Ansatzes in das Portfoliomanagement ist das Konzept der Shortfall Probability Efficient Frontier (vgl. *Rudolf* 1994). Auch dieses Konzept ist geeignet, auf das Surplus-Management übertragen zu werden. Ebenso wie alle anderen, auf dem Shortfall Risk basierenden Ansätze, erlaubt es, Mindestrenditen vorzugeben und die erreichbare Shortfall-Wahrscheinlichkeit dazu zu

bestimmen. Im Unterschied zur Efficient Shortfall Frontier aber basiert es nicht auf dem Roy-Kriterium, sondern auf dem Telser-Kriterium. Die Shortfall Probability Efficient Frontier bestimmt zu einem gegebenen Niveau der Mindestrendite den Zusammenhang zwischen der Anlagerendite und dem Shortfall Risk. Die Übertragung dieses Ansatzes auf das Surplus-Management ist durch Verwendung von Gleichung (15) sehr einfach. Man gibt sich eine Mindestrendite für den Surplus r^* vor und verschiedene z -Werte zwischen -4 und 0 . Setzt man diese Werte in Gleichung (15) ein, dann erhält man verschiedene Anlagerenditen μ_a . Durch die Punkte-Kombinationen $[\Phi(z), \mu_a]$ ist eine sog. Shortfall Probability Efficient Surplus Frontier gegeben. Im numerischen Beispiel im nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie eine solche Kurve interpretierbar ist.

VI. Ein Anwendungsbeispiel

Es wird exemplarisch eine Vorsorgeeinrichtung unterstellt, welche die Möglichkeit hat, in in- und ausländische Aktien und Bonds zu investieren. Es wird weiterhin angenommen, daß sie Leistungsverpflichtungen zu decken habe, die pro Jahr um 4% bei einer Volatilität von 3% wachsen. *Tabelle 1* faßt die Ausgangsdaten zusammen.

Tabelle 1
**Asset- und Liability-Spektrum einer exemplarischen Vorsorgeeinrichtung,
annualisierte Werte**

	Korrelation					
	erw. Rendite	Volat.	Bonds Inland	Aktien Inland	Bonds Ausland	Aktien Ausland
Liability	4 %	3 %	0.8	0.0	0.2	-0.2
Bonds Inland	5 %	6 %		0.5	0.5	0.0
Aktien Inland	13 %	16 %			0.1	0.3
Bonds Ausland	8 %	8 %				0.5
Aktien Ausland	15 %	22 %				

Die Anlagerestriktionen erfordern ein inländisches Bondinvestment von mindestens 50% des Gesamtvolumens, für die Auslandsinvestitionen sei eine Obergrenze von insgesamt 30% gegeben.

Tabelle 2
Anlagerestriktionen

	Obergrenze	Untergrenze
Bonds Inland	–	50 %
Bonds Ausland	insgesamt	–
Aktien Ausland	30 %	–

Die in Tabelle 2 gegebenen Anlagerestriktionen werden durch die Verwendung des Critical-Line-Algorithmus von *Markowitz* (1956 und 1987) implementiert. Abbildung 2 zeigt die Efficient Frontiers auf, die sich aus den Ausgangsdaten ergeben. Die fettgedruckte Linie zeigt die Efficient Frontier bei Berücksichtigung der Anlagerestriktionen aus Tabelle 2, die andere Efficient Frontier ergibt sich, wenn keine Anlagerestriktionen implementiert werden.

Interessanter aber ist der Verlauf der Efficient Surplus Frontiers in Abbildung 3. Sie sind dargestellt unter der Annahme eines Deckungsgrades von 104 %, d.h. für eine Pensionskasse mit leichter Überdeckung der

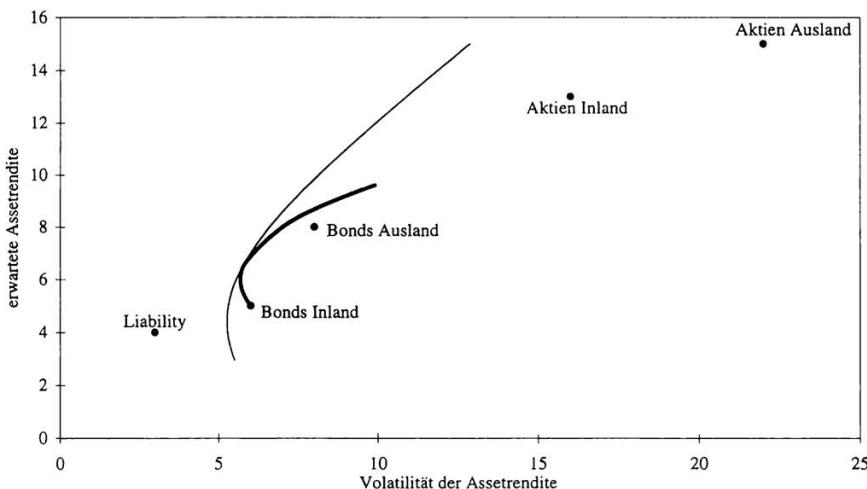


Abbildung 2: Efficient Frontiers mit und ohne Restriktionen

Leistungsverpflichtungen durch die Anlagen. Man erkennt, daß das Niveau der Surplusvolatilität tendenziell unter dem der Assetvolatilität liegt, weil die Volatilität der Verpflichtungsseite nur mit 3 % p.a. angenommen wurde. Wie Gleichung (15) zeigt, existieren grundsätzlich zwei Telser-Portfolios zu jeder Shortfall-Wahrscheinlichkeit. Abbildung 3 zeigt die Lage der beiden Telser-Portfolios für die Fälle mit und ohne Anlagerestriktionen sowie die Roy-Portfolios (mit und ohne Anlagerestriktionen). Dabei wird angenommen, daß die Mindestrendite $r^* = -4\%$ beträgt. Im Rahmen einer Surplus-effizienten Anlagepolitik ist das Telser-Portfolio mit der höheren, erwarteten Rendite zu bevorzugen (das „obere“ Telser-Portfolio). Das Roy-Portfolio im Fall mit Anlagerestriktionen weist eine höhere, erwartete Rendite auf als im Fall ohne Restriktionen. Tabelle 3 allerdings zeigt, daß das Shortfall Risk des Roy-Portfolios bei Anlagerestriktionen mit 8.2 % deutlich über dem ohne Anlagerestriktionen mit 6.7 % liegt. Noch deutlicher ist der Unterschied in der Surplusvolatilität beider Portfolios. Durch die Implementation von Anlagerestriktionen steigt die Surplusvolatilität um 155 Basispunkte von annualisierten 2.98 % auf 4.53 %. Bei einem Deckungsgrad von 104 % müßte zur Realisierung eines Portfolios mit minimalem Shortfall Risk eine substantielle Shortposition in inländischen Aktien und ausländischen Bonds eingegangen werden. Diese Shortpositionen würden ausge-

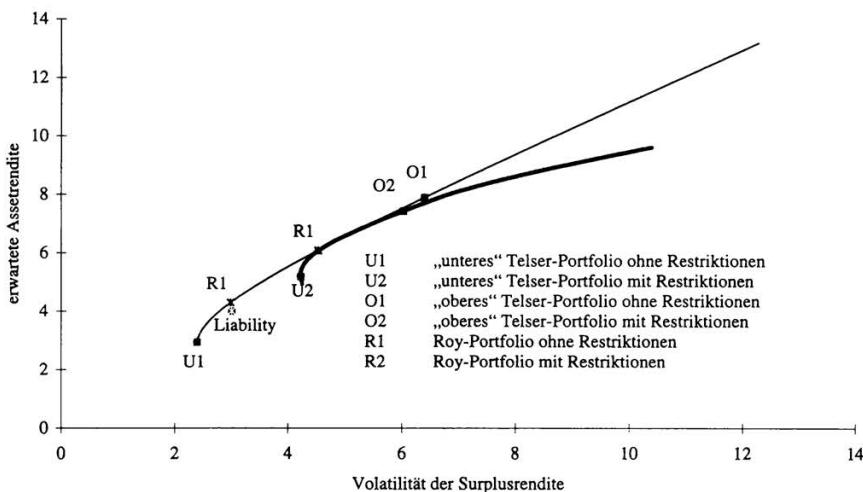


Abbildung 3: Efficient Surplus Frontiers mit und ohne Restriktionen, $F = 104\%$, Roy- und Telser-Portfolios

glichen durch ein extrem starkes Investment von 122 % in inländische Bonds und durch eine Longposition in ausländische Aktien. Berücksichtigt man hingegen die Anlagerestriktionen aus Tabelle 2, so wird bei einem Deckungsgrad von 102 % das maximal mögliche Auslandsengagement eingegangen, wobei ca. 22 % auf Bonds und 8 % auf Aktien entfallen. Die verbleibenden 70 % werden vollständig in inländische Bonds investiert. Erhöht sich der Deckungsgrad auf 104 % und 110 %, so wird das inländische Bondinvestment mit und ohne Restriktionen ausgeweitet. Dies ist dadurch zu erklären, daß die Mindestrendite von -2 % über -4 % auf -10 % absinkt. Deshalb wird die vergleichsweise geringe erwartete Rendite der inländischen Bonds weniger bedeutsam, hingegen gewährleistet die geringe Volatilität ein minimales Shortfall Risk. Für niedrige Deckungsgrade werden also volatilere Investitionsmöglichkeiten berücksichtigt als für hohe⁷. Dies deckt sich mit den Aussagen von *Bodie* (1991) und von *Leibowitz, Kogelman* und *Bader* (1994).

Tabelle 4 verdeutlicht genau das Gegenteil. Hier sind die Telser-Portfolios⁸ aufgeführt, bei denen nicht eine Minimierung des Shortfall Risk im

Tabelle 3
Charakteristiken des Roy-Portfolios

	erwartete Anlage- rendite	Surplus- Volatilität	Shortfall Risk	Portfolioanteile in Prozent			
				Bonds Inland	Aktien Inland	Bonds Ausland	Aktien Ausland
ohne Restriktionen							
$F = 1.02$	8.07	6.48	16.8	29.05	15.38	52.23	3.34
$F = 1.04$	4.29	2.98	6.71	122.04	-27.43	-13.45	18.84
$F = 1.10$	3.43	2.84	0.03	142.67	-36.93	-28.01	22.27
mit Restriktionen							
$F = 1.02$	6.49	4.81	16.85	70.00	0.00	21.62	8.38
$F = 1.04$	6.07	4.53	8.20	76.53	0.00	18.27	5.21
$F = 1.10$	5.70	4.62	0.39	84.20	0.00	12.61	3.19

Quelle: eigene Berechnungen.

⁷ Würde man das Risiko einer Vorsorgeeinrichtung in Form der Kosten einer Putoption auf den Surplus messen, dann steigen wegen der höheren Volatilität des Portfolios die Absicherungskosten mit fallenden Deckungsgraden an.

⁸ Nach Gleichung (15) gibt es zwei Telser-Portfolios, die in Tabelle 4 mit „oberes“ und „unteres“ Telser-Portfolio bezeichnet werden.

Vordergrund steht, sondern lediglich die Sicherstellung eines Shortfall Risk von 10 % bei einer Mindestrendite r^* von $1 - F$. Der Anteil der inländischen Bonds sinkt mit steigendem Deckungsgrad bis auf eine fundamentale Shortposition von -307 % ab, die durch extreme Longpositionen in inländischen Aktien und ausländischen Bonds ausgeglichen wird. Es ist zu beachten, daß bei einem Deckungsgrad von 102 % kein Portfolio mit einem Shortfall Risk von 10 % realisierbar ist, da schon das Roy-Portfolio ein Shortfall Risk von 16.8 % aufweist (siehe Tabelle 3). In diesem Fall hat man also nur ein Telser-Portfolio zu einem Shortfall Risk von 16.8 % und einer Surplus-Mindestrendite von -2 %, welches mit dem Roy-Portfolio identisch ist. Zudem existiert auch bei einem hohen Deckungsgrad von 110 % kein Telser-Portfolio, weil durch die Restriktionen nur relativ konservative Anlagestrategien zugelassen werden. Das höchstmögliche Shortfall Risk wäre in diesem Fall 6.5 %. Bei der Analyse der Roy-Portfolios in Tabelle 3 fällt auf, daß mit steigendem Deckungsgrad sowohl die erwartete Anlagerendite wie auch die Volatilität der Surplusrendite abnimmt. Dies ist auf den vorher bereits angesprochenen Sachverhalt zurückzuführen, daß das Anlageziel r^* zunehmend einfach erreichbar wird. Deshalb wird das Gewicht immer stärker auf die Minimierung des Shortfall Risk und immer weniger auf die Erhöhung der erwarteten Surplusrendite gelegt. Hingegen zeichnet sich das Telser-Kriterium dadurch aus, daß mit steigendem Deckungsgrad die Anlagepolitik spekulativer wird. Denn durch eine Verringerung des Anlageziels r^* wird es immer einfacher, ein Shortfall Risk von 10 % zu realisieren, auch wenn die stärker risikobehafteten Anlagen eine dominantere Rolle im Portfolio spielen. Bei einem Deckungsgrad von 110 % wird der höchstmögliche Anteil ausländischer Aktien mit 30 % voll ausgeschöpft, vergleichsweise konservative inländische Bonds werden nur im Minimalumfang von 50 % berücksichtigt. Für niedrigere Deckungsgrade hingegen werden inländische Bonds im Umfang bis zu 70 % Grenze erworben. Es ist deshalb für eine Vorsorgeeinrichtung entscheidend, ob sie lediglich eine vorgegebene Wahrscheinlichkeit für das Verfehlen der Mindestrendite verkraften kann, oder ob sie diese Wahrscheinlichkeit minimieren möchte. Die beiden Zielstellungen führen zu völlig entgegengesetzten Investitionsstrategien.

Abbildung 4 zeigt den Verlauf der Efficient Surplus Shortfall Frontier für alternative Deckungsgrade. Dabei wird deutlich, wie das Verhältnis zwischen Shortfall Risk und Mindestrendite ist, wenn $r^* = 1 - F$ nicht fix vorgegeben ist. Für sehr niedrige Mindestrenditen gilt, daß je höher der Deckungsgrad ist, desto höher ist das minimale Shortfall Risk des

Tabelle 4
Charakteristiken des Teiser-Portfolios (Shortfall Risk = 10 %)

oberes Portfolio				unteres Portfolio				Portfolioanteile für das obere Portfolio in Prozent			
erwartete Anlagerendite	Surplus- Volatilität	erwartete Anlage- rendite	Surplus- Volatilität	Bonds Inland	Aktien Inland	Bonds Ausland	Aktien Ausland	Bonds Inland	Aktien Inland	Bonds Ausland	Aktien Ausland
ohne Restriktionen											
$F = 1.02^*$	8.07	6.48	8.07	6.48	29.05	15.38	52.23	3.34			
$F = 1.04$	7.88	6.39	2.95	2.39	36.66	11.88	46.85	4.61			
$F = 1.10$	22.04	23.59	-0.15	4.55	-307.27	170.22	289.76	-52.71			
mit Restriktionen											
$F = 1.02^*$	6.49	4.81	6.49	4.81	70.0	0.0	21.62	8.38			
$F = 1.04$	7.42	6.02	5.19	4.22	57.47	12.53	22.66	7.34			
$F = 1.10^{**}$	9.6	10.96	9.6	10.96	50.0	20.0	0.0	30.0			

* Für einen Deckungsgrad von 102 % muß das Roy-Portfolio mit einem Shortfall Risk von 16.8 % bzw. 16.85 % bei Restriktionen eingesetzt werden.

** Für einen Deckungsgrad von 110 % ist das höchstmögliche Shortfall Risk wegen der Anlagerestriktionen 6.5 %. Das angegebene Portfolio bezieht sich deshalb auf ein Portfolio mit einem Shortfall Risk von 6.5 %.

Quelle: eigene Berechnungen.

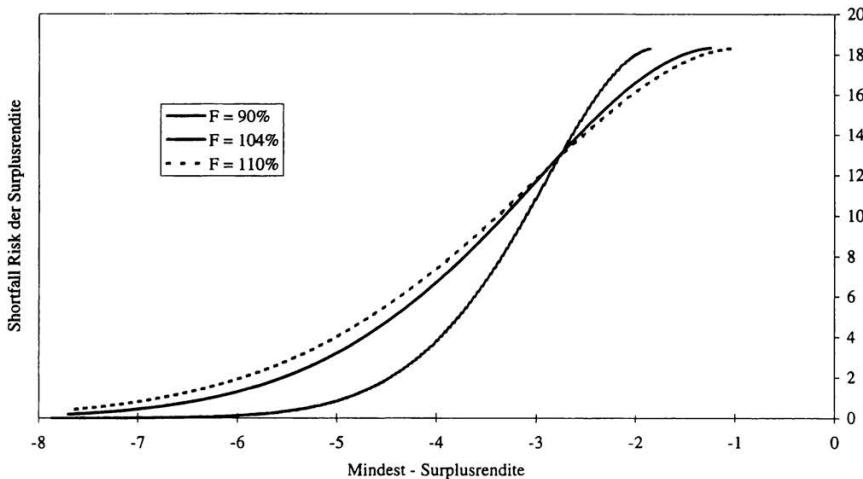


Abbildung 4: Efficient Surplus Shortfall Frontiers
bei alternativen Deckungsgraden

Surplus⁹. Gleichung (5) zeigt, daß die erwartete Surplusrendite (und damit auch die Volatilität der Surplusrendite) mit dem Deckungsgrad steigt. Bei niedrigen Mindestrenditen hat man deshalb bei hohen Dekkungsgraden vergleichsweise hohe Shortfall-Risiken. Bei hohen Mindestrenditen ist das Anlageziel allerdings überhaupt nur noch mit hohen Surplusrenditen erreichbar. Vorsorgeeinrichtungen mit einem hohen Dekkungsgrad F erreichen das mit niedrigeren Anlagerenditen als Vorsorgeeinrichtungen mit niedrigen Deckungsgraden. Deshalb kehrt sich der Zusammenhang zwischen Deckungsgrad und Shortfall Risk in Abbildung 4 für Mindestrenditen oberhalb von etwa -2.7 % um¹⁰. Hohe Mindestrenditen sind nur zum Preis eines sehr hohen Shortfall Risks von über 14 % möglich. In dieser Abbildung steckt deshalb eine unmittelbare Implikation für die Anlagepolitik von Vorsorgeeinrichtungen. Die Verwendung des Roy-Kriteriums führt bei niedrigen Deckungsgraden (= hohen Mindestrenditen) zu relativ spekulativen Anlagepolitiken und so zu hohen Shortfall Risks. Viele Manager von Vorsorgeeinrichtungen realisierten aber genau die durch das Roy-Kriterium nahegelegte Regel:

⁹ Diese eher kontraintuitive Ergebnis wird auch von Wolter (1993) postuliert.

¹⁰ Dieser nicht-lineare und nicht-monotone Zusammenhang zwischen dem Portfolioanteil risikobehafteter Anlagen und dem Deckungsgrad wird von Jaeger und Zimmermann (1997) im 2-Anlagen-Fall auch vertreten.

Nach einem schlechten Jahr investieren sie um so riskanter, um eine Deckung der Leistungsverpflichtungen durch die Anlagen möglichst schnell wieder zu erreichen. Dabei sollten sie sich aber bewußt sein, daß die Gefahr zunimmt, einen ausgeglichenen Surplus zu verfeheln.

Für eine Vorsorgeeinrichtung mit niedrigem Deckungsgrad mag es deshalb oft vorteilhafter sein, sich am Telser-Kriterium zu orientieren. Die Abbildungen 5 und 6 zeigen die Ergebnisse mit und ohne Restriktionen auf. Die Interpretationen sind für beide Fälle weitestgehend identisch. Es wird deutlich, daß zu einem gegebenen Shortfall Risk von z.B. 10 % die Anlagepolitik genau dann spekulativer wird, wenn der Deckungsgrad zunimmt. Auch wenn das Niveau des Shortfall Risk für niedrige Deckungsgrade naheliegenderweise höher ist als für hohe Deckungsgrade, steigt doch für ein gegebenes Shortfall Risk die erwartete Rendite der Assets an. Dies entspricht eher einer sicherheitsorientierten Intuition¹¹, weil hier nur dann riskant investiert wird, wenn man das Geld dazu vorher bereits verdient hat.

VII. Schlußfolgerungen

Der vorliegende Aufsatz zeigt auf, wie eine Vorsorgeeinrichtung, etwa eine Lebensversicherung oder eine Pensionskasse, auf der Basis des Safety-First-Prinzips und des daraus abgeleiteten Shortfall-Risk-Ansatzes zu einer optimalen Allokation ihres Anlagevermögens gelangt. Dabei wird am Surplus einer Vorsorgeeinrichtung angesetzt, der Differenz zwischen dem Marktwert der Anlagen und dem Barwert der Leistungsverpflichtungen. In der angelsächsischen Literatur wurde dieser Ansatz des Surplus-Management exemplarisch für den Fall von nur zwei Anlagekategorien und ohne Berücksichtigung von Anlagerestriktionen in den 80er Jahren entwickelt. Der vorliegende Aufsatz liefert eine Erweiterung für realistische Szenarien, d.h. unter Berücksichtigung von Anlagerestriktionen und im Fall beliebig vieler Anlagemöglichkeiten. Dabei wird ein Modell aufgestellt, welches auf dem Roy-Kriterium und dem Telser-Kriterium des Portfoliomanagements beruht und später im Rahmen einer numerischen Fallstudie analysiert wird. Unter dem Roy-Kriterium versteht man die Minimierung der Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Vorsorgeeinrichtung durch ihre Anlagepolitik eine Unterdeckung der Leistungsverpflichtungen durch die Anlagen verursacht. Das Telser-Krite-

¹¹ Sicherheitsorientierung sollte für Vorsorgeeinrichtungen unbedingt im Vordergrund stehen, da sie Vorsorge für die regelmäßigen Bezüge von Personen leisten, die auf solche Zahlungen angewiesen sind.

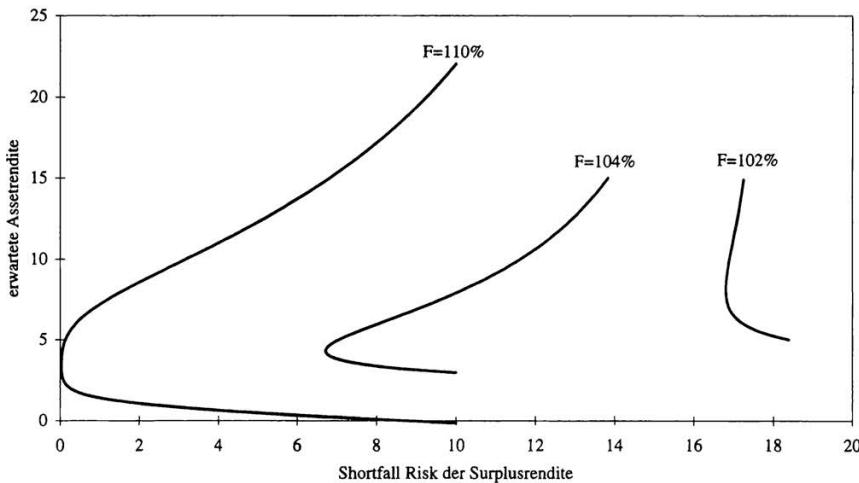


Abbildung 5: Shortfall Probability Efficient Surplus Frontiers bei alternativen Deckungsgraden, ohne Restriktionen

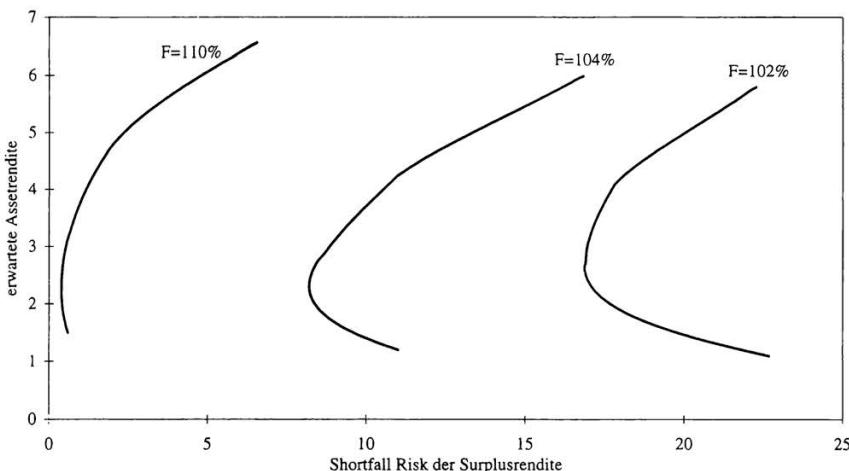


Abbildung 6: Shortfall Probability Efficient Surplus Frontiers bei alternativen Deckungsgraden mit Restriktionen

rium identifiziert solche Portfolios, die mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit eine Unterdeckung verhindern. Die Unterdeckungswahrscheinlichkeit bezeichnet man als Shortfall Risk.

Als Ergebnis des Modells wird eine sog. Efficient Surplus Frontier hergeleitet. Sie zeigt den Zusammenhang zwischen der Surplusvolatilität und der erwarteten Anlagerendite einer Vorsorgeeinrichtung auf. Dabei wird gezeigt, welche Auswirkungen eine bestimmte Anlagepolitik auf die Volatilität des Surplus einer Vorsorgeeinrichtung hat. Analytisch weist die Efficient Surplus Frontier ähnliche Eigenschaften auf wie die klassische Efficient Frontier. Die Surplusvolatilität wiederum wirkt sich direkt auf das Shortfall Risk aus. Deshalb werden die Shortfall-orientierten Konzepte der Efficient Shortfall Frontier und der Shortfall Probability Efficient Frontier aus dem klassischen Portfoliomanagement aufgegriffen und auf den Fall des Surplus-Managements übertragen. Als Ergebnis erhält man die Efficient Surplus Shortfall Frontier und die Shortfall Probability Efficient Surplus Frontier.

Die wichtigsten Resultate aus der Fallstudie legen nahe, daß das Roy-Kriterium zu sehr spekulativen Anlagepolitiken mit entsprechend hohem Shortfall Risk führen kann, wenn bereits eine nur geringfügige Deckung oder sogar eine Unterdeckung existiert. In vielen Fällen ist es deshalb sinnvoller, das Telser-Kriterium für eine effiziente Allokation der Anlagen zu verwenden, weil hier vergleichsweise konservative Anlagestrategien für Vorsorgeeinrichtungen realisiert werden, die bereits eine geringfügige Deckung haben, d.h. die bereits in Schwierigkeiten sind. Dies unterstützt die These von *Ambachtsheer* (1994), der gezeigt hat, daß sich die Investitionsstrategie nachhaltig auf die Performance einer Vorsorgeeinrichtung auswirkt.

Literatur

Ambachtsheer, Keith P. (1994): „The Economics of Pension Fund Management“, *Financial Analysts Journal* 27, November - December, S. 21 - 31. – *Black*, Fisher (1989): „Should You Use Stocks to Hedge Your Pension Liability?“, *Financial Analysts Journal* 22, January - February, S. 10 - 12. – *Bodie*, Zvie (1991): „Shortfall Risk and Pension Fund Asset Management“, *Financial Analysts Journal* 24, May - June, S. 57 - 61. – *Ezra*, Don D. (1991): „Asset Allocation by Surplus Optimization“, *Financial Analysts Journal* 24, January - February, S. 51 - 57. – *Harlow*, W. V. (1991): „Asset Allocation in a Downside-Risk Framework“, *Financial Analysts Journal* 24, September - October, S. 28 - 40. – *Jaeger*, Stefan und *Zimmermann*, Heinz (1997): „On Surplus Shortfall Constraints“, *Journal of Investing*, Winter, S. 64 - 74. – *Jaeger*, Stefan, *Rudolf*, Markus und *Zimmermann*, Heinz (1995):

„Efficient Shortfall Frontier“, Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung 47, Nr. 4, S. 355 - 365. – *Keel, Alex und Müller, Heinz* (1995): „Efficient Portfolios in the Asset Liability Context“, Astin Bulletin 25, No. 1, S. 33 - 48. – *Leibowitz, Martin L. and Henriksson, Roy D.* (1988): „Portfolio Optimization within a Surplus Framework“, Financial Analysts Journal 21, March - April, S. 43 - 51. – *Leibowitz, Martin L. and Henriksson, Roy D.* (1989): „Portfolio Optimization with Shortfall Constraints: A Confidence-Limit Approach to Managing Downside Risk“, Financial Analysts Journal 22, March - April, S. 34 - 41. – *Leibowitz, Martin L., Kogelman, Stanley and Bader, Lawrence N.* (1994): „Funding Ratio Return“, The Journal of Portfolio Management 21, Fall, S. 39 - 47. – *Leibowitz, Martin L., Bader, Lawrence N. und Kogelman, Stanley* (1996): „Return Targets and Shortfall Risks“, Irwin Professional Publishing, Chicago, London, Singapore. – *Markowitz, Harry M.* (1952): „Portfolio Selection“, The Journal of Finance 7 No. 1, S. 77 - 91. – *Markowitz, Harry M.* (1956): „The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints“, Naval Research Logistics Quarterly 3, S. 111 - 133. – *Markowitz, Harry M.* (1959): „Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment“, John Wiley & Sons, Neudruck 1991 von Basil Blackwell, Cambridge MA. – *Markowitz, Harry M.* (1987): „Mean Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets“, Basil Blackwell, Cambridge MA. – *Merton, Robert C.* (1972): „An Analytical Derivation of the Efficient Portfolio Frontier“, Journal of Financial and Quantitative Analysis 7, September, S. 1851 - 1872. – *Roll, Richard* (1977): „A Critique of the Asset Pricing Theory's Test – Part 1: On Past and Potential Testability of the Theory“, Journal of Financial Economics 4, S. 129 - 176. – *Roy, Andrew D.* (1952): „Safety First and the Holding of Assets“, Econometrica 20, S. 431 - 449. – *Rudolf, Markus* (1994): „Efficient Frontier und Shortfall Risk“, Finanzmarkt und Portfolio Management 8, Nr. 1, S. 88 - 101. – *Sharpe, William F. und Tint, Lawrence G.* (1990): „Liabilities – A new approach“, The Journal of Portfolio Management 16, Winter, S. 5 - 10. – *Telser, Lester G.* (1955): „Safety First and Hedging“, Review of Economics and Statistics 23, S. 1 - 16. – *Wolter, H.-J.* (1993): „Shortfall-Risiko und Zeithorizonteffekte“, Finanzmarkt und Portfolio Management 7 Nr. 3, S. 330 - 338

Zusammenfassung

Surplus-Management

Unter Surplus-Management versteht man die Optimierung der Gefahr einer Unterdeckung für eine Vorsorgeeinrichtung. Der vorliegende Artikel erweitert die bestehende Literatur zum Surplus-Management um die Möglichkeit, beliebig viele Anlagen und Anlagerestriktionen bei stochastischer Benchmarkrendite einzubeziehen. Das vorgestellte Modell stützt sich auf die Portfoliotheorie von Markowitz (1952) und berücksichtigt insbesondere das Konzept der Desaster-Wahrscheinlichkeit von Roy (1952). Zur Implementierung von Anlagerestriktionen wird der Critical Line Algorithmus von Markowitz (1956) verwendet. (JEL G11, G23)

Summary**Surplus Management**

Surplus management is interpreted as optimization of the undercoverage risk of prudential institutions. The present contribution adds to the existing literature on surplus management the possibility to include a discretionary number of investments and restrictions thereon with stochastic benchmark yields. The model presented here is based on the portfolio theory of Markowitz (1952) and takes account especially of Roy's concept of disaster probability (1952). Markowitz's critical line algorithm (1956) is used for implementing investment restrictions.

Résumé**Gestion des excédents**

On entend par gestion des excédents l'optimisation du danger de manque de provision pour un institution de prévision. Cet article ajoute à la littérature existante sur la gestion des excédents la possibilité d'inclure un nombre quelconque de placements et de restrictions de placement pour des rendements stochastiques de Benchmark. Le modèle présenté se base sur la théorie de portefeuille de Markowitz (1952) et considère avant tout la notion de probabilité de désastre de Roy (1952). Pour mettre en œuvre les restrictions de placement, l'auteur utilise l'algorithme de la ligne critique («critical line») de Markowitz (1956).