

Optimale Transaktions- Vorsichts- und Spekulationskasse

Diskussion einiger Lösungsansätze

Von Manfred Matusza, Tübingen

Die Forschungstätigkeit auf dem Gebiet der Geldtheorie hat sich seit Mitte der fünfziger Jahre erheblich intensiviert, wobei im Mittelpunkt die Theorie der Geldnachfrage steht¹. Geldnachfrage ist identisch mit Kassenhaltung². Wenn berücksichtigt wird, daß die Kassenhaltung opportunity costs in Form von Zinsverlusten bringt, andererseits aber auch Vorteile hat (schnellere und bequemere Zahlungsmöglichkeiten usw.), so wird die Frage nach der optimalen Kassenhaltung relevant.

Denkbar ist die Berechnung einer optimalen Gesamtkasse nach neoquantitätstheoretischer Argumentation. Dieser Ansatz zeigt zwar einige Größen auf, von denen die Kassenhaltung abhängig sein kann, er ist aber recht unklar und, wie an anderer Stelle gezeigt wurde³, für die Berechnung einer optimalen Gesamtkasse nicht geeignet. Sinnvoller erscheint es daher, den (neo-)keynesianischen Weg von getrennten Kassenhaltungsentscheidungen einzuschlagen.

¹ Woll, A., Die Theorie der Geldnachfrage. Analytische Ansätze und statistische Ergebnisse für die BRD, in: Zeitschrift für die ges. Staatswiss., Band 125 (1969), S. 56 - 81, hier: S. 56. Vgl. auch derselbe, Einige geldpolitische Aspekte in der monetären Theorie der Gegenwart, in: Geldtheorie und Geldpolitik, Schmölders Festschrift, Berlin 1968, S. 65 - 75, hier: S. 65 und die Übersichtsartikel von Johnson, H. G., Monetary Theory and Policy, in: H. G. Johnson (ed.), Essays in Monetary Economics, London 1967, S. 15 - 72, ders., Recent Developments in Monetary Theory, in: H. G. Johnson (ed.), S. 73 - 103 und ders., Recent Developments in Monetary Theory — A Commentary, in: D. R. Croome and H. G. Johnson (eds.), Money in Britain 1959 - 1969, Oxford 1970, S. 83 - 114.

² Lutz, F. A., Die Nachfrage nach Geld, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Band 172 (1960), S. 93 - 125, hier: S. 93.

³ Matusza, M., Entscheidungstheoretische Grundprobleme optimaler Kassenhaltung, Tübinger Diss. 1974, S. 80 ff.

I. Die optimale Transaktionskasse

1. Die optimale Transaktionskasse als Lagerhaltungsproblem

Die optimale Transaktionskasse kann analog des Lagerhaltungsproblems gelöst werden⁴. Der Lagerbestand L_t ergibt sich aus:

$$(1) \quad L_t = L_0 + \Delta Z_{0 \rightarrow t} - \Delta A_{0 \rightarrow t}$$

L_0 ist der Anfangsbestand in $t = 0$ und $\Delta Z_{0 \rightarrow t}$ ($\Delta A_{0 \rightarrow t}$) der Lagerzugang (Lagerabgang) von $t = 0$ bis t . Damit ergibt sich sofort die Analogie zur Transaktionskasse, es gilt:

$$(2) \quad K_t = K_0 + \Delta Z_{0 \rightarrow t} - \Delta A_{0 \rightarrow t}$$

Die Lösung des Lagerhaltungsproblems besteht darin, den Lagerbestand zu bestimmen, der die Kosten minimiert⁵. Als Kostenbestandteile gehen in die Kostenfunktion die Beschaffungskosten (bzw. Fertigungskosten) und die Lagerhaltungskosten ein. Beim Kassenhaltungsproblem entsprechen den Beschaffungskosten die Umwandlungs- bzw. Transaktionskosten von Geld in Wertpapiere und umgekehrt. Es wird also davon ausgegangen, daß zum Periodenbeginn ein bestimmter Geldbetrag zur Verfügung steht, von dem ein Teil in Wertpapiere umgewandelt wird. Diese Umwandlung wird im Laufe der Transaktionsperiode rückgängig gemacht, da Zahlungen geleistet werden müssen. Den Lagerhaltungskosten entspricht beim Kassenhaltungsproblem der Zins der Wertpapiere, i , verstanden als opportunity costs. Das Problem besteht in der Minimierung der Kosten⁶ der Kassenhaltung unter der strengen Nebenbedingung, daß die notwendigen Zahlungen stets geleistet werden.

2. Das Baumol-Tobin-Modell

Es soll vorausgesetzt werden, daß vollkommene Information in bezug auf das Einzahlungs-Auszahlungs-Muster, den Zinsertrag und die

⁴ Baumol, W. J., The Transactions Demand for Cash: An Inventory Theoretic Approach, in: The Quarterly Journal of Economics, Band 66 (1952), S. 545 - 556, Tobin, J., The Interest-Elasticity of Transactions Demand for Cash, in: The Review of Economics and Statistics, Band 38 (1956), S. 241 - 247.

⁵ Naddor, E., Inventory Systems, New York-London-Sydney 1966, S. 8.

⁶ Baumol geht von der Kostenminimierung der Kassenhaltung, Tobin von der Ertragsmaximierung der Wertpapierhaltung aus. Die Maximierung des Zinsertrages der Wertpapierhaltung ist aber identisch mit der Minimierung des Zinsentganges durch Kassenhaltung. Wir gehen von der Kostenminimierung aus, weil damit der direkte Bezug zum Lagerhaltungsproblem gewahrt bleibt.

Transaktionskosten besteht. Für das einfachste Einzahlungs-Auszahlungs-Muster (zum Periodenbeginn wird der Geldbetrag T DM empfangen, der mit stets gleicher Auszahlungsgeschwindigkeit bis zum Periodenende ausgegeben wird) ergibt sich folgende Lösung:

Das Wirtschaftssubjekt überlegt sich in $t = 0$, welchen DM-Betrag es in Kasse halten und welchen es in Wertpapiere umwandeln wird. Wenn angenommen wird, es wandelt in $t = 0$ den DM-Betrag $B - C$ in Wertpapiere um, dann hält es den DM-Betrag $[T - (B - C)]$ bis $t^* + \frac{1-t^*}{n}$ in Kasse. Von $t^* + \frac{1-t^*}{n}$ an folgen dann $n - 1$ Rückumwandlungen von Wertpapieren in Kasse. t^* und n sollen nun so bestimmt werden, daß die Kassenhaltungskosten minimal sind.

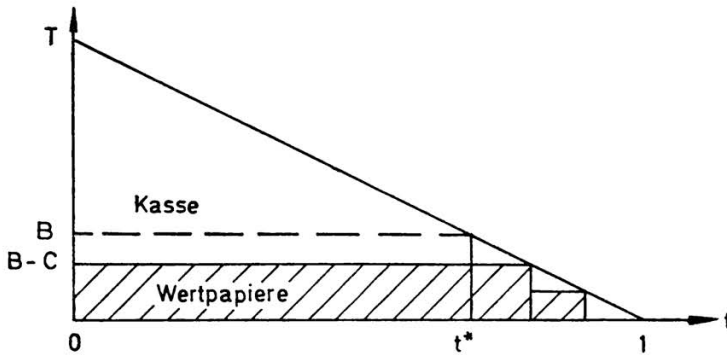


Abbildung 1

Die opportunity costs $_{op}K$ (in Abb. 1: durchschnittliche Kassenhaltung \times Wertpapierzins i) sind:

$$(3) \quad _{op}K = \frac{T(1-t^*)t^* \cdot i}{n} + \frac{T(1-t^*)^2 i}{2n} + \frac{Tt^{*2} \cdot i}{2} = \frac{T(1-t^{*2})i}{2n} + \frac{Tt^{*2} \cdot i}{2}$$

Bestehen die Transaktionskosten K_T Kasse \rightarrow Wertpapiere \rightarrow Kasse aus einem zur Zahl der Transaktionen proportionalen Kostenbestandteil a und einem zum umgewandelten DM-Betrag proportionalen Kostenbestandteil b , so folgt:

$$(4) \quad K_T = na + 2b \left[T(1-t^*) - \frac{T(1-t^*)}{n} \right] = na + \frac{2bT(n-1)(1-t^*)}{n}$$

Bei jeder umgewandelten DM müssen die Transaktionskosten $2b$ berücksichtigt werden, wobei vorausgesetzt ist, daß die Umwandlung Kasse \rightarrow Wertpapiere (in $t = 0$) soviel kostet wie die einzelnen Rückumwandlungen während der Periode.

Für die Gesamtkosten K folgt dann aus (3) und (4):

$$(5) \quad K = {}_{op}K + K_T = \frac{T(1-t^*)}{2n} [(1+t^*) \cdot i + 4b(n-1)] + \frac{Tt^{*2} \cdot i}{2} + na$$

$$(6) \quad \text{Für} \quad \frac{\partial K}{\partial t^*} = 0 \text{ folgt: } t_{opt}^* = \frac{2b}{i} \quad \text{und}$$

$$(7) \quad \text{für} \quad \frac{\partial K}{\partial n} = 0 \text{ folgt: } n_{opt} = \left(1 - \frac{2b}{i}\right) \sqrt{\frac{Ti}{2a}}^7$$

(6) und (7) in (5) eingesetzt ergibt:

$$(8) \quad K_{\min} = \sqrt{2Tia} \left(1 - \frac{2b}{i}\right) + 2Tb \left(1 - \frac{b}{i}\right)$$

Das Wirtschaftssubjekt wird diesen Transaktionsvorschlag allerdings nur dann befolgen, wenn er billiger ist als der Fall ohne Transaktionen Kasse \rightarrow Wertpapiere \rightarrow Kasse. Es entstehen dann nur opportunity costs in Höhe von:

$$(9) \quad K_0 = \frac{Ti}{2}$$

Das Wirtschaftssubjekt wird die optimalen Transaktionen also nur dann durchführen, wenn gilt: $K_{\min} < K_0$ bzw. wenn (8) und (9) in die Ungleichung eingesetzt werden:

$$(10) \quad a < \frac{Ti}{8} \left(1 - \frac{2b}{i}\right)^2$$

Bei gegebenem Transaktionsvolumen T und gegebenen Transaktionskosten a und b muß der Zinssatz erst eine bestimmte kritische Schwelle erreichen, damit die Transaktionen vorgenommen werden.

Die optimale durchschnittliche Transaktionskasse ergibt sich aus Abb. 1 als nicht-schraffierte Fläche, es gilt also:

$$(11) \quad \bar{C}_{opt} = \frac{T(1-t_{opt}^{*2})}{2n_{opt}} + \frac{Tt_{opt}^{*2}}{2}$$

⁷ Die zweite Ableitung ist größer als Null für $2b < i$, es handelt sich also um ein Minimum.

Werden (6) und (7) in (11) eingesetzt, folgt:

$$(12) \quad \bar{C}_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{aT}{2i}} \left(1 + \frac{2b}{i} \right) + \frac{2b^2 T}{i^2}$$

Je höher der Zinssatz ist, um so geringer ist \bar{C}_{opt} ⁹. Diese Zinselastizität der Transaktionskasse gilt aber nur dann, wenn *ceteris paribus* der Zinssatz eine bestimmte kritische Schwelle überschreitet (vgl. (10)). Ist der Zinssatz kleiner, so ist die durchschnittliche optimale Transaktionskasse: $\bar{C} = \frac{T}{2}$.

Dieser Ansatz ist von *Whalen* erweitert worden¹⁰. Es kann für das Wirtschaftssubjekt vorteilhafter sein, wenn zum Periodenbeginn ein bestimmter Teil des Transaktionsbetrages in langfristige Wertpapiere umgewandelt wird, während der Transaktionsperiode ein Kredit aufgenommen und dieser am Periodenende (= neuer Periodenanfang) durch den neuen Transaktionsbetrag beglichen wird. Der in langfristigen Wertpapieren angelegte Teil des Transaktionsbetrages ist um so größer, je größer der Zins der langfristigen Wertpapiere und je niedriger der Kreditzins ist.

Weitere Modifikationen sind denkbar, die insbesondere realistischere Annahmen über das Einnahmen-Ausgaben-Muster machen. Hier kann die Lagerhaltungstheorie wertvolle Hilfe leisten.

⁹ Diese Formel ist identisch mit der von *Whalen*, vgl. *Whalen*, E. L., A Cross-Section Study of Business Demand for Cash, in: *The Journal of Finance*, Band 20 (1965), S. 423 ff., hier: S. 443.

⁹ So schreibt E. *Schneider*: „Es ist möglich, daß die Nachfrage nach Transaktionskasse bei hohen Zinssätzen nicht mehr vollkommen zinsunelastisch ist, sondern mit steigendem Zinssatz abnimmt.“ *Schneider*, E., Einführung in die Wirtschaftstheorie, III. Teil, Tübingen 1964, S. 85, Fn. 1. *Hansen* hat schon früher auf eine mögliche Zinsabhängigkeit der Transaktionskasse hingewiesen, vgl. *Hansen*, A. H., *Monetary Theory and Fiscal Policy*, New York 1949, S. 66 f. Neben dem Zinssatz spielen aber auch das Transaktionsvolumen und die Transaktionskosten Kasse → Wertpapiere → Kasse eine Rolle.

¹⁰ Vgl. *Whalen*, E. L., An Extension of the *Baumol-Tobin* Approach to the Transactions Demand for Cash, in: *The Journal of Finance*, Band 23 (1968), S. 113 - 134.

II. Die optimale Vorsichtskasse

1. Kritische Diskussion der Modelle von Patinkin und Whalen

Der Zweck der Vorsichtskasse liegt nach Keynes darin, „to provide for contingencies requiring sudden expenditure and for unforeseen opportunities of advantageous purchases ...“¹¹. In beiden Fällen gibt es also Geldauszahlungen, die nicht mit Sicherheit bekannt sind. Don Patinkin berücksichtigt auch unsichere Geldeinzahlungen. Er entwickelt ein stochastisches Liquiditätsmodell, in dem ein Zahlungsprozeß untersucht wird, bei dem die Ein- und Auszahlungen E und A einem bestimmten Zufallsmechanismus unterliegen¹². Dieser Zufallsmechanismus wird in analoger Anwendung des Ruinproblems entwickelt¹³. Für die Vorsichtskasse ist dabei das Maximum der Summe der Auszahlungen minus der Summe der Einzahlungen maßgebend, das sich zu irgend einem Zeitpunkt während der Periode ergibt. Es wird die Vorsichtskasse gehalten, bei der die Wahrscheinlichkeit eines Illiquiditätsfalles ein bestimmtes Maß nicht überschreitet.

Diese Zielfunktion ist aber nicht ausreichend. Das Wirtschaftssubjekt wird einem Illiquiditätsfall nicht unbedingt aus dem Wege gehen. Sind die Kosten für die Beseitigung der Illiquidität durch Kreditaufnahme grundsätzlich geringer als die Kosten der Vorsichtskasse, so wird keine Vorsichtskasse gehalten, sondern die Vorsichtskasse in Wertpapiere transformiert. Aber auch wenn ein Illiquiditätsfall aus irgendwelchen Gründen verhindert werden soll, bietet die Vorsichtskasse nicht den einzigen Schutz gegen ihn. Denkbar ist die Einholung zusätzlicher Informationen über das Einnahmen-Ausgaben-Muster. Die Kosten der zusätzlichen Informationen konkurrieren dann mit den Kosten der Vorsichtskasse. Nicht die Vorsichtskasse ist also optimal, bei der die Wahrscheinlichkeit eines Illiquiditätsfalles ein bestimmtes Maß nicht überschreitet, sondern diejenige, die die Kosten der Vorsichtskasse minimiert. In dieser Kostenfunktion müssen die Kosten eines möglichen Illiquiditätsfalles eingeschlossen sein.

¹¹ Keynes, J. M.: The General Theory of Employment, Interest, and Money, London 1936, S. 196.

¹² Vgl. Patinkin, Don, Money, Interest, and Prices. An Integration of Monetary and Value Theory, Evanston 1956, S. 82 ff.

¹³ Vgl. dazu insbesondere die mathematische Ableitung von A. Dvoretzky in Patinkin, Don, Money . . . , S. 450 ff.

Einen ähnlichen Weg geht *Whalen*¹⁴. Nach seinem Modell tritt ein Illiquiditätsfall dann ein, wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung N , definiert als Differenz zwischen der Summe der erwarteten Auszahlungen und Einzahlungen einer Periode kleiner als die Vorsichtskasse \bar{C}_V ist. Wird angenommen, daß N symmetrisch um $E(N) = 0$ mit der Varianz V verteilt ist, dann gilt auf Grund der Tschebyscheffschen Ungleichung:

$$P(N > k \sqrt{V}) \leq \frac{1}{2k^2}.$$

Das Wirtschaftssubjekt wählt nun $k \sqrt{V}$ als Vorsichtskasse, es gilt dann:

$$(13) \quad k = \frac{\bar{C}_V}{\sqrt{V}} \quad \text{bzw.} \quad P(N > \bar{C}_V) = \frac{V}{2\bar{C}_V^2}$$

für den ungünstigsten Fall.

Die erwarteten Kosten eines Illiquiditätsfalles sind:

$$(14) \quad K_I = a \cdot P = \frac{aV}{2\bar{C}_V^2}$$

Die opportunity costs betragen:

$$(15) \quad {}_{op}K = \bar{C}_V \cdot i$$

Die Gesamtkosten der Vorsichtskasse sind dann:

$$(16) \quad K = \frac{aV}{2\bar{C}_V^2} + \bar{C}_V i$$

Daraus folgt: $\frac{dK}{d\bar{C}_V} = 0 = i - \frac{aV}{\bar{C}_V^3}$ bzw.

$$(17) \quad \bar{C}_{V \text{ opt}} = \sqrt[3]{\frac{a \cdot V}{i}}$$

Mit steigendem Illiquiditätsrisiko und -kosten steigt \bar{C}_V , mit steigenden Zinsen einer alternativen Wertpapiervanlage sinkt \bar{C}_V .

Nun genügt es allerdings nicht, einen Illiquiditätsfall dann anzunehmen, wenn $N > \bar{C}_V$ ist. Auch für $N \leq \bar{C}_V$ können bei entsprechender

¹⁴ Vgl. *Whalen*, E. L., A Rationalization of the Precautionary Demand for Cash, in: *The Quarterly Journal of Economics*, Band 80 (1966), S. 314 - 324.

Wahl der Einzahlungs-Auszahlungs-Muster Illiquiditätsfälle während der Transaktionsperiode auftreten¹⁵. Die Berechnung der optimalen Vorsichtskasse ist also ohne Hypothesen über das Einzahlungs-Auszahlungs-Muster gar nicht möglich. Auch genügt es nicht, lediglich Illiquiditätskosten und opportunity costs zu berücksichtigen. Es fehlen die Kosten der Umwandlungen Kasse \rightarrow Wertpapiere \rightarrow Kasse, für deren Berechnung aber ebenfalls von Hypothesen über Einzahlungs-Auszahlungs-Muster ausgegangen werden muß. Diese Mängel überwindet *Sprenkle*.

2. Das Modell von Sprenkle

Sprenkle¹⁶ geht zunächst von zwei möglichen Auszahlungsendpunkten α und β aus. Wird α (β) gewählt und α (β) tritt auch tatsächlich ein, folgt für $b = 0$ und $\alpha, \beta \neq 1$, vgl. (7):

$$n_{\alpha \text{ opt}} = \sqrt{\frac{Ti \alpha}{2a}} \quad \left(n_{\beta \text{ opt}} = \sqrt{\frac{Ti \beta}{2a}} \right).$$

Wird α gewählt, β tritt aber ein, so ergeben sich die Kosten (vgl. Abb. 2):

$$(18) \quad K = \frac{Ti \beta}{2n_{\alpha}^2} + \frac{Ti \beta}{2n} \left(\frac{n_{\alpha} - 1}{n_{\alpha}} \right)^2 + (n + 1)a$$

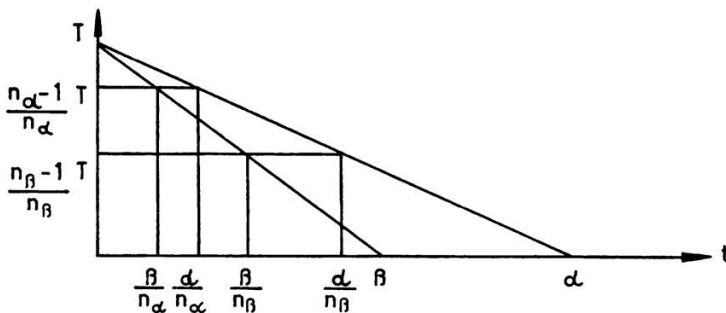


Abbildung 2

¹⁵ Zu einem Beispiel vgl. *Otruba, H.*, Zur mikroökonomischen Geldnachfrage-theorie, in: Zeitschrift für Nationalökonomie, Band 30 (1970), S. 309 - 326, hier: S. 313.

¹⁶ Vgl. *Sprenkle, C.*, Is the Precautionary Demand for Money Negative?, in: The Journal of Finance, Band 22 (1967), S. 77 - 82.

Die minimalen Gesamtkosten folgen für:

$$(19) \quad n_{\text{opt}} = \frac{n_{\alpha} - 1}{n_{\alpha}} \sqrt{\frac{T i \beta}{2 a}}$$

(19) in (18) eingesetzt ergibt:

$$(20) \quad K_{\min} = \sqrt{2 T i a \beta} + a \left(1 - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right)^2$$

Die Zusatzkosten des falsch gewählten Auszahlungsendpunktes sind, wie sich aus (20) ergibt:

$$a \left(1 - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right)^2.$$

In der Regel wird das Wirtschaftssubjekt sich aber im Zeitpunkt $t = 0$ nicht zwei möglichen Auszahlungsendpunkten, sondern einer Verteilungsfunktion von Auszahlungsendpunkten gegenübersehen. Der Auszahlungsendpunkt Θ tritt mit der Wahrscheinlichkeit $f(\Theta)$ ein. Das Wirtschaftssubjekt wählt dann den Auszahlungsendpunkt Θ_0 , der die erwarteten Zusatzkosten $E(\Delta K)$ minimiert, es folgt:

$$(21) \quad E(\Delta K) = \int_0^{\infty} a \left(1 - \sqrt{\frac{\Theta}{\Theta_0}} \right)^2 f(\Theta) d\Theta = a \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\Theta_0}} E(\sqrt{\Theta}) + \frac{E(\Theta)}{\Theta_0} \right]$$

Die minimalen Zusatzkosten ergeben sich für:

$$(22) \quad \Theta_{0 \text{ opt}} = \left[\frac{E \Theta}{E \sqrt{\Theta}} \right]^2$$

Die erwartete durchschnittliche Kassenhaltung bei unvollkommener Information in bezug auf den Auszahlungsendpunkt ist:

$$(23) \quad E(\bar{C}_R) = \int_0^{\infty} \left[\sqrt{\frac{T a}{2 i}} \sqrt{\Theta} + \frac{a}{i} \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} - \sqrt{\frac{\Theta}{\Theta_0}} \right) \right] f(\Theta) d\Theta \quad 17$$

¹⁷ Die durchschnittliche Teilkasse von $t = 0$ bis $t = \Theta/n_{\Theta_0}$ ist:

$$\bar{C}_1 = \frac{a}{i} \cdot \frac{\Theta}{\Theta_0}, \text{ die von } t = \Theta/n_{\Theta_0} \text{ bis } t = \Theta \text{ ist: } \bar{C}_2 = \sqrt{\frac{T a \Theta}{2 i}} - \frac{a}{i} \sqrt{\frac{\Theta}{\Theta_0}},$$

die gesamte durchschnittliche Kasse ist: $\bar{C} = \bar{C}_1 + \bar{C}_2$. Der Erwartungswert der durchschnittlichen Kasse ergibt sich als Integral der mit den Wahrscheinlichkeiten gewichteten möglichen durchschnittlichen Kassen. Angenommen ist also eine stetige Verteilungsfunktion in bezug auf die Auszahlungsendpunkte.

Die optimale erwartete durchschnittliche Kasse ergibt sich, wenn (22) in (23) eingesetzt wird, also:

$$(24) \quad E(\bar{C}_{R \text{ opt}}) = \sqrt{\frac{Ta}{2i}} E(\sqrt{\theta})$$

Wenn Θ ein (unverzerrter) Schätzwert für den tatsächlichen Auszahlungsendpunkt γ ist, so folgt: $E(\Theta) = \gamma$. Für den einzelnen Schätzwert folgt aber:

$$\Theta = \gamma + \varepsilon^{18} \text{ bzw. } E(\sqrt{\Theta}) = E(\sqrt{\gamma + \varepsilon}) = \sqrt{\gamma} E\left(1 + \frac{\varepsilon}{2\gamma} - \frac{1}{8} \frac{\varepsilon^2}{\gamma^2} \pm \dots\right).$$

Da aber $E(\varepsilon) = E(\Theta) - \gamma = 0$ ist, bleibt bis zu Fehlern 2. Ordnung übrig:

$$(25) \quad E(\sqrt{\Theta}) = \sqrt{\gamma} \left(1 - \frac{V}{8\gamma^2}\right) \\ \text{für } V = E(\varepsilon^2) = E(\Theta - \gamma)^2.$$

(25) in (24) eingesetzt ergibt:

$$(26) \quad E(\bar{C}_{R \text{ opt}}) = \sqrt{\frac{Ta\gamma}{2i}} \left(1 - \frac{V}{8\gamma^2}\right)$$

Die durchschnittliche Vorsichtskasse definiert *Resek*¹⁹ als Differenz zwischen der erwarteten durchschnittlichen Kasse bei unvollkommener und der bei vollkommener Information, also:

$$(27) \quad \bar{C}_V = E(\bar{C}_R) - \bar{C}_S$$

Werden (26) und (12) für $b = 0$ und $\gamma \neq 1$ in (27) eingesetzt folgt:

$$(28) \quad \bar{C}_V = - \sqrt{\frac{Ta\gamma}{2i}} \frac{V}{8\gamma^2}$$

Die Vorsichtskasse ist also negativ. Je größer das Risiko V der falschen Wahl des Auszahlungsendpunktes ist, um so negativer ist die Vorsichtskasse. Das ist überraschend, denn erwartet werden müßte, daß die Vorsichtskasse um so größer ist, je größer das Risiko ist. *Sprenkles* Annahmen müssen also kritisch geprüft werden.

¹⁸ Vgl. *Sukhatme*, P. V., *Sampling Theory of Surveys With Applications*, New Dehli-Ames (Iowa) 1963, S. 140 ff.

¹⁹ Vgl. *Resek*, R. W., *Uncertainty and the Precautionary Demand for Money*, in: *The Journal of Finance*, Band 22 (1967), S. 657 - 662.

Sprenkle geht von einer Entscheidungssituation in $t = 0$ aus. Gesucht wird aus einer Verteilungsfunktion von Auszahlungsgeschwindigkeiten die Auszahlungsgeschwindigkeit, die die Kosten minimiert. Unvollkommene Information aber hat das Wirtschaftssubjekt nach dem Modell nur bis $t = \frac{\gamma}{n_{\Theta_0}}$, bis zu dem Zeitpunkt also, bei dem die Kasse leer ist. Das Wirtschaftssubjekt kennt jetzt die tatsächliche Auszahlungsgeschwindigkeit ($= \frac{T}{\gamma}$) mit Sicherheit, sie bleibt so lange gleich, bis der Transaktionsbetrag T verbraucht ist. (22) und (25) in (21) eingesetzt ergibt für die erwarteten minimalen Zusatzkosten:

$$(29) \quad E(\Delta K_{\min}) = a \left[1 - \left(1 - \frac{V}{8\gamma^2} \right)^2 \right]$$

Sprenkle geht also von einem vorgegebenen Risiko V aus. In der verwendeten Kostenfunktion sind die Kosten der Kassenhaltung und die Kosten der Umwandlungen Kasse \rightarrow Wertpapiere \rightarrow Kasse enthalten, nicht jedoch die Kosten, die bei der Gewinnung zusätzlicher Informationen auffallen. Oder: Die im *Sprenkle*-Modell angenommenen Informationskosten sind 0. In diesem Fall ist aber die Risikosituation nicht optimal, das Wirtschaftssubjekt wird die Sicherheitssituation wählen [$V = E(\Delta K_{\min}) = 0$], d. h. $\Theta_0 = \gamma$. Die optimale durchschnittliche Kasse bei unvollkommener Information entspricht also derjenigen bei vollkommener Information. Die negative Vorsichtskasse im *Sprenkle*-Modell ist also nicht optimal.

Aber auch eine positive Vorsichtskasse als Schutz vor einem Zahlungsverzug ist ebenfalls nicht optimal, da sie Kosten verursacht, die Informationsgewinnung im Modell aber nicht. Da es aber nicht realistisch ist, eine kostenlose Informationsgewinnung vorauszusetzen, müssen die Informationskosten eingeführt werden, die es u. U. ratsam erscheinen lassen, eine positive optimale Vorsichtskasse zu halten.

Im *Sprenkle*-Modell unberücksichtigt sind ebenfalls die Illiquiditätskosten, die dann anfallen, wenn der Transaktionsbetrag vor dem Ende der Transaktionsperiode verbraucht ist.

Im folgenden Modell werden Informations- und Illiquiditätskosten berücksichtigt.

3. Die optimale Vorsichtskasse unter Berücksichtigung von Informations- und Illiquiditätskosten

Es wird angenommen, das Wirtschaftssubjekt gehe auf Grund seiner unvollkommenen Information vom Auszahlungsendpunkt $\gamma + k \sqrt{V}$ aus. Dieser Auszahlungsendpunkt hat Zusatzkosten von $\Delta K = a \left(1 - \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + k \sqrt{V}}}\right)^2$ zur Folge²⁰. Bei kostenloser Informationsgewinnung wird der Zustand vollkommener Information realisiert, d. h. $V = \Delta K = 0$. Die Informationsgewinnung soll aber nicht kostenlos sein. Außerdem wird angenommen, das Wirtschaftssubjekt erwarte zum Auszahlungsendpunkt $\gamma + k \sqrt{V}$ wieder Einzahlungen in Höhe von T DM in einer Summe. Da der gewählte Auszahlungsendpunkt $\gamma + k \sqrt{V}$ größer ist als der tatsächliche, entsteht bei γ ein Illiquiditätsfall. Das Wirtschaftssubjekt muß sich jetzt bis zum Zeitpunkt $\gamma + k \sqrt{V}$ Geld beschaffen, die konstanten Illiquiditätskosten seien c .

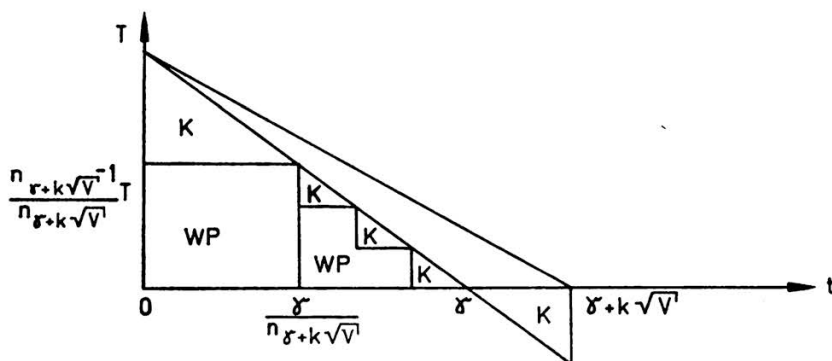


Abbildung 3

Die von $t = \gamma$ bis $t = \gamma + k \sqrt{V}$ durchschnittlich ausgegebene Kasse ist:

$$(30) \quad \bar{C} = \frac{k^2 TV}{2\gamma}$$

Die Illiquiditätskosten betragen also:

$$(31) \quad K_I = \bar{C} \cdot c = \frac{k^2 TcV}{2\gamma}$$

²⁰ Vgl. (20). Statt α wird γ und statt β wird $\gamma + k \sqrt{V}$ gesetzt.

Die gesamten Zusatzkosten sind also:

$$(32) \quad \Delta K = a \left(1 - \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + k \sqrt{V}}} \right)^2 + \frac{k^2 T c V}{2 \gamma}$$

Diese Kosten lassen sich verringern, wenn das Risiko V durch Gewinnung zusätzlicher Informationen über das Auszahlungsmuster vermindert wird. Werden die Kostenersparnis und die Informationskosten mit $E(\sqrt{V})$ bzw. mit $I(\sqrt{V})$ bezeichnet, so folgt für die Nettokostenersparnis:

$$(33) \quad G(\sqrt{V}) = E(\sqrt{V}) - I(\sqrt{V})$$

Die maximale Nettokostenersparnis liegt bei:

$$(34) \quad \frac{dG}{d\sqrt{V}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dE}{d\sqrt{V}} = \frac{dI}{d\sqrt{V}}$$

Die durchschnittliche Vorsichtskasse wird in Anlehnung an *Resek* definiert als:

$$(35) \quad \bar{C}_V = \bar{C}_R - \bar{C}_S + \bar{C}$$

\bar{C} ergibt sich aus (30). *Resek* berücksichtigt lediglich die Differenz $\bar{C}_R - \bar{C}_S$ ²¹, es muß aber noch der Kassenbestand berücksichtigt werden, der bis zu dem geplanten Periodenende $t = \gamma + k \sqrt{V}$ nötig ist. Daraus folgt:

$$(36) \quad \bar{C}_V = \frac{a}{i} \left(\frac{\gamma}{\gamma + k \sqrt{V}} - \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + k \sqrt{V}}} \right) + \frac{k^2 T V}{2 \gamma}$$
²²

Der erste Summand (\bar{C}_{V_1}) ist negativ. Der zweite Summand (\bar{C}_{V_2}) ist eine Parabel. \bar{C}_V ergibt sich durch Subtraktion des ersten vom zweiten Summanden.

Mit steigendem Risiko \sqrt{V} steigt also die Vorsichtskasse an. Zusätzliche Informationsgewinnung bedeutet Verringerung des Risikos und damit geringere Vorsichtskasse. Die Vorsichtskasse wird so lange verringert, bis die Grenzkostenersparnis der verringerten Kassenhaltung gleich ist den Grenzkosten der Informationsgewinnung (vgl. (34)). Mit

²¹ Vgl. (27). *Resek* geht von erwarteten Größen aus. Wir gehen dagegen davon aus, daß das Wirtschaftssubjekt sich auf Grund seines Informationsstandes für den Auszahlungsendpunkt $\gamma + k \sqrt{V}$ entschieden hat, er ist also vorgegeben.

²² Vgl. S. 8, Fn 17. Zu c_s vgl. (12) für $b = 0$ und den Auszahlungsendpunkt γ .

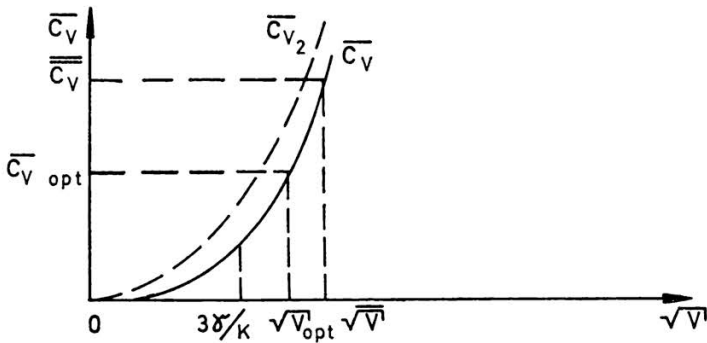


Abbildung 4

der optimalen Vorsichtskasse ergibt sich ein optimales Risiko bei optimaler Information. Ist die Informationsgewinnung mit hohen Kosten verbunden, so ist die Absicherung gegen das Risiko der Illiquidität kostengünstiger durch eine entsprechend hohe Vorsichtskasse möglich.

III. Die optimale Spekulationskasse

1. Das Keynes-Modell

Nach *Keynes*²³ stehe ein Wirtschaftssubjekt vor der Entscheidung, einen bestimmten Betrag an Spekulationskasse während einer Periode zu halten oder ein Wertpapier zu kaufen.

Das Wertpapier wird mit einem Nominalzins i_0 verzinst, der am Periodenende erwartete Realzins sei i_1 , der erwartete Kurs K_1 , es gilt also: $i_1 = i_0/K_1$. Der Kaufpreis (Kurs) am Periodenanfang sei $K_0 = 1$. Das Wertpapier wird am Periodenende verkauft, der Gewinn ist also:

$$(37) \quad g = K_1 - K_0 = \frac{i_0}{i_1} - 1$$

Neben diesem Gewinn (bzw. Verlust für $K_1 < 1$) muß für die Entscheidung Kauf des Wertpapiers oder Halten von Spekulationskasse noch die Verzinsung i_0 berücksichtigt werden. Es ergeben sich drei Möglichkeiten:

²³ Es wird hier der Interpretation von *Tobin* gefolgt, dessen Modell die „essential ... original Keynesian explanation“ ist, vergl. *Tobin*, J., Liquidity Preference as Behavior Towards Risk, in: *The Review of Economic Studies*, Band 25 (1957/58), S. 65 - 86, hier: S. 70.

- (a) $i_0 + g > 0$: Das Wertpapier wird gekauft, die Spekulationskasse ist null.
- (b) $i_0 + g < 0$: Das Wertpapier wird nicht gekauft, es wird Spekulationskasse gehalten.
- (c) $i_0 + g = 0$: Das Wirtschaftssubjekt ist indifferent.

Aus (c) kann der „kritische“ Nominalzins i_{0k} berechnet werden, es gilt:

$$(38) \quad i_{0k} = 1 - \frac{i_{0k}}{i_1} = \frac{i_1}{1 + i_1}$$

Ist $i_0 > i_{0k}$, gilt (a), und ist $i_0 < i_{0k}$, gilt (b). Nach (c) besteht dann Indifferenz, wenn die Verzinsung gleich dem Verlust ist, d. h. $i_{0k} = 1 - K_1$ bzw. $K_1 = 1 - i_{0k}$.

In diesem Modell werden Transaktionskosten vernachlässigt. Der Kauf und Verkauf des Wertpapiers ist aber mit Transaktionskosten verbunden, die allerdings ohne Schwierigkeiten durch einen höheren Kauf- und niedrigeren Verkaufspreis berücksichtigt werden können.

Das Entscheidungsmodell muß aber grundsätzlich modifiziert werden, wenn neben der Spekulationskasse mehrere Wertpapiere, deren Erträge nicht mit Sicherheit bekannt sind, als Komponenten des Portfolios in Frage kommen.

Das Ziel besteht nun in der Berechnung effizienter Portfolios²⁴, wobei die Spekulationskasse ein Teil des Portfolios ist. Ein Portfolio ist dann effizient, wenn ein bestimmter erwarteter Gesamtertrag mit minimalem Risiko, d. h. minimaler Streuung (Varianz) der erwarteten Einzelerträge erreicht wird. Unterstellt ist dabei risikoscheues Verhalten. Um effiziente Portfolios bestimmen zu können, müssen zunächst Iso-Ertrags- und Iso-Varianzkurven bestimmt werden.

2. Iso-Ertrags- und Iso-Varianzkurven

Der erwartete Ertrag eines Portfolios mit N Wertpapieren ist:

$$(39) \quad E = \sum_{i=1}^N X_i \cdot \mu_i$$

²⁴ Der Begründer der Portfolio-Selection ist *Markowitz*. Unsere Analyse stützt sich zunächst auf *Markowitz*, H. M.: Portfolio-Selektion. Efficient Diversification of Investments, New York-London 1959, S. 129 ff. *Markowitz* berücksichtigt aber nicht die Kassenhaltung. Eine umfassendere Literaturübersicht zur Theorie der Portfolio-Selection gibt *Sohn*, G., Liquidität, Unsicherheit und Geldnachfrage, Frankfurt/M. 1971, S. 80, Fn 2.

X_i ist dabei der Anteil des im i -ten Wertpapier investierten Geldbetrages, wobei gilt:

$$\sum_{i=1}^N X_i = 1$$

ist die Mathematische Erwartung des in y_i mit den möglichen Realisationen $y_{i1}, \dots, y_{ij}, \dots, y_{in}$ investierten Geldbetrages. Es gilt also:

$$\mu_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \cdot y_{ij} \quad \text{für} \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1.$$

Bei konstanten Werten von μ_i gilt:

$$(40) \quad E = E(X_1, \dots, X_i, \dots, X_N)$$

Man erhält im $(N - 1)$ — dimensionalen Raum Iso-Ertragskurven. Bestimmte Kombinationen von $X_1, \dots, X_i, \dots, X_N$ repräsentieren dann gleichen erwarteten Ertrag.

Für den Drei-Wertpapier-Fall²⁵ folgt:

$$(41) \quad E = GX_1 + HX_2 + I \quad \text{bzw.} \quad X_1 = -\frac{H}{G}X_2 + \frac{E-I}{G}$$

für $G = \mu_1 - \mu_3, H = \mu_2 - \mu_3$ und $I = \mu_3$.

Die Iso-Ertragskurven stellen im X_1/X_2 -Koordinatensystem eine Schar paralleler Geraden dar. Wenn das dritte Wertpapier als Kasse mit einem sicheren Ertrag von Null interpretiert wird, folgt aus (41):

$$(42) \quad X_1 = -\frac{\mu_2}{\mu_1}X_2 + \frac{E}{\mu_1}$$

Die Varianz des i -ten Wertpapiers ist $\sigma_i^2 = \sigma_{ii} = E(y_i - \mu_i)^2$.

Die Kovarianz des i -ten mit dem j -ten Wertpapier ist $\sigma_{ij} = E[(y_i - \mu_i)(y_j - \mu_j)]$.

Für den Drei-Wertpapier-Fall ergibt sich für

$$V = X_1^2 \sigma_{11} + X_2^2 \sigma_{22} + (1 - X_1 - X_2)^2 \sigma_{33} + 2 X_1 X_2 \sigma_{12} \\ + 2 X_1 (1 - X_1 - X_2) \sigma_{13} + 2 X_2 (1 - X_1 - X_2) \sigma_{23} \quad ^{26}$$

²⁵ Dieser Fall kann allgemeiner formuliert werden, indem statt drei Wertpapiere drei Teil-Portfolios genommen werden, wobei jedes Teil-Portfolio aus mehreren Wertpapieren zusammengesetzt ist. μ_i ($i = 1, 2, 3$) stellt dann den erwarteten Ertrag des i -ten Teil-Portfolios dar und X_i ($i = 1, 2, 3$) den Anteil des i -ten Teil-Portfolios am Gesamtportfolio. Da μ_i konstant bleibt, dürfen sich die Zusammensetzung und die erwarteten Erträge der in den Teil-Portfolios zusammengefaßten Wertpapiere nicht ändern.

Daraus folgt:

$$(43) \quad AX_2^2 + BX_1X_2 + CX_1^2 + DX_2 + \tilde{E}X_1 + F - V = 0$$

$$\text{für: } A = \sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}$$

$$B = 2(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33})$$

$$C = \sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}$$

$$D = 2(\sigma_{23} - \sigma_{33})$$

$$\tilde{E} = 2(\sigma_{13} - \sigma_{33})$$

$$F = \sigma_{33}$$

Gleichung (43) stellt die allgemeine quadratische Form der Kegelschnitte dar. Das gemischte Glied BX_1X_2 ($B \neq 0$) zeigt an, daß die Hauptachsen des Kegelschnittes gedreht sind. Für $B^2 - 4AC < 0$ ergeben sich für verschiedene Werte von V konzentrische Iso-Varianz-ellipsen.

Wenn das dritte Wertpapier als Kasse mit einem risikolosen Ertrag von Null interpretiert wird, folgt: $\mu_3 = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$ bzw. $A = \sigma_{22}$; $B = 2\sigma_{12} = 2\rho\sigma_1\sigma_2$; $C = \sigma_{11}$ und $D = \tilde{E} = F = 0$. ρ ist die Korrelation zwischen den erwarteten Erträgen der Wertpapiere 1 und 2.

3. Effiziente Portfolios

a) Darstellung

Berechnet man die minimale Varianz für alle möglichen erwarteten Erträge, erhält man die Menge aller möglichen effizienten Portfolios. Wenn das dritte Wertpapier Kasse ist und wenn gilt: $\mu_1, \mu_2 > 0$ und $\mu_1 > \mu_2$, folgt:

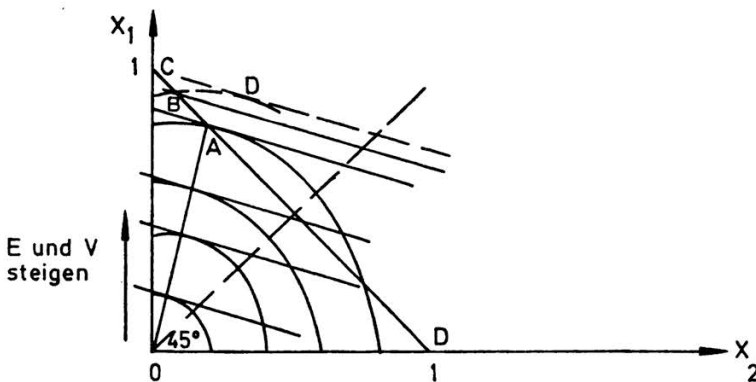


Abbildung 5

²⁶ Zur Ableitung dieses Ausdrucks siehe Markowitz, H. M., S. 72 ff. (insbesondere S. 94) und S. 154 ff.

Die Verbindungslinie der effizienten Portfolios wird von *Markowitz* als „critical line“ bezeichnet. Sie besteht aus der Strecke \overline{OA} und \overline{AC} . Auf \overline{OA} werden X_1 und X_2 zu Lasten von X_3 vergrößert, erhalten werden effiziente Portfolios mit steigendem E und V . In A ist $X_3 = 0$. Da $X_3 < 0$ ausgeschlossen ist, kann ein höherer erwarteter Ertrag bei höherer Varianz nur durch gleichgroße Substitution von X_2 durch X_1 auf dem Geradenabschnitt \overline{AC} erzielt werden. Die zulässigen effizienten Portfolios auf dem Geradenabschnitt \overline{AC} haben dann bei gleichem V einen niedrigeren erwarteten Ertrag E als wenn $X_3 < 0$ zugelassen wäre. So ist etwa das Portfolio D nur für $X_3 < 0$ realisierbar. Wird das ausgeschlossen, kann das Portfolio B realisiert werden, das bei gleicher Varianz V einen niedrigeren erwarteten Ertrag aufweist.

Die effizienten Portfolios stellen nun die Alternativen dar, von denen das Wirtschaftssubjekt eine auswählt. Das Auswahlkriterium ist seine Nutzenfunktion $U = U(E, V)$. Die Bestimmung des optimalen Portfolios wird erheblich erleichtert, wenn die kritische Linie im V/E -Koordinatensystem formuliert wird. Dazu wird eine Iso-Ertragsgerade mit einer Iso-Varianzellipse zum Schnitt gebracht. Es werden dann in der Regel zwei Schnittpunkte erhalten. Ein effizientes Portfolio ist dann gegeben, wenn die Iso-Ertragsgerade Tangente an der Iso-Varianzellipse ist, wenn also die Tangentenbedingung erfüllt ist.

Wenn (41) in (43) eingesetzt wird, so folgt für den Fall, daß das dritte Wertpapier Kasse ist, nach einigen Umformungen die Parabel:

$$(44) \quad V = \frac{\sigma_{11} \sigma_{22} (1 - \varrho^2)}{\sigma_{11} \mu_2^2 + \sigma_{22} \mu_1^2 - 2 \varrho \sigma_1 \sigma_2 \mu_1 \mu_2} E^2$$

Der Scheitel der Parabel liegt im Koordinatenursprung. Für die Koordinaten des Tangentenpunktes bzw. für die Wertpapieranteile folgt:

$$(45) \quad X_1 = \frac{\sigma_2 (\sigma_2 \mu_1 - \varrho \sigma_1 \mu_2) E}{\sigma_{11} \mu_2^2 + \sigma_{22} \mu_1^2 - 2 \varrho \sigma_1 \sigma_2 \mu_1 \mu_2} \quad \text{bzw.}$$

$$(46) \quad X_2 = \frac{\sigma_1 (\sigma_1 \mu_2 - \varrho \sigma_2 \mu_1) E}{\sigma_{11} \mu_2^2 + \sigma_{22} \mu_1^2 - 2 \varrho \sigma_1 \sigma_2 \mu_1 \mu_2}$$

b) Änderungen der erwarteten Erträge

Vereinfachend wird nun gesetzt: $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma^2$ und $\mu_1 = m \mu$, wobei gilt: $\mu_2 = \mu = \text{konstant}$. Aus (44), (45) und (46) folgt dann:

$$(47) \quad V = \frac{\sigma^4 (1 - \varrho^2)}{\sigma^2 \mu^2 + \sigma^2 m^2 \mu^2 - 2 \varrho \sigma^2 m \mu^2} E^2 = \frac{\sigma^2 (1 - \varrho^2)}{\mu^2 (1 + m^2 - 2 \varrho m)} E^2$$

mit den Wertpapieranteilen:

$$(48) \quad X_1 = \frac{\sigma^2 (m \mu - \varrho \mu)}{\sigma^2 \mu^2 (1 + m^2 - 2 \varrho m)} E = \frac{(m - \varrho) E}{\mu (1 + m^2 - 2 \varrho m)} \quad \text{bzw.}$$

$$(49) \quad X_2 = \frac{\sigma^2 (\mu - \varrho m \mu) E}{\sigma^2 \mu^2 (1 + m^2 - 2 \varrho m)} = \frac{(1 - m \varrho) E}{\mu (1 + m^2 - 2 \varrho m)}.$$

Es soll gelten: $\mu_1 > \mu_2$, d. h. $m > 1$. Da stets $X_2 \geq 0$ sein muß, folgt: $1 < m \leq \frac{1}{\varrho}$. Durch Auflösung von (48) nach E folgt:

$$(50) \quad E = K_1 \cdot X_1$$

$$\text{für } K_1 = \frac{\mu (1 + m^2 - 2 \varrho m)}{m - \varrho}.$$

Wenn die Gleichungen (48) und (49) nach E aufgelöst und gleichgesetzt werden, folgt:

$$(51) \quad X_1 = K_2 \cdot X_2$$

$$\text{für } K_2 = \frac{(m - \varrho)}{1 - \varrho m}.$$

Der Nenner des Koeffizienten von E^2 in (47) steigt mit steigendem m , der Koeffizient sinkt also. Mit steigendem μ_1 des substituierten Wertpapiers 1 ist ceteris paribus der gleiche erwartete Ertrag des Portfolios mit niedrigerer Varianz erreichbar. Dieses Ergebnis wird durch sinkendes X_1 bzw. X_2 , d. h. steigenden Kassenanteil X_3 ermöglicht²⁷. Die Koeffizienten K_1 und K_2 steigen mit steigendem m .

Im I. Quadranten der Abbildung 6 ist die $V = V(E)$ -Kurve dargestellt, sie verschiebt sich mit steigendem m nach unten. Der gleiche erwartete Ertrag ist dann mit niedrigerer Varianz bzw. bei gleicher Varianz ist ein höherer erwarteter Ertrag erreichbar. Im IV. Quadranten liegt die Gerade $E = K_1 X_1$, sie verschiebt sich mit steigendem m nach oben. Eine bestimmte

²⁷ Der Koeffizient von E in (48) ist: $K^* = \frac{m - \varrho}{\mu (1 + m^2 - 2 \varrho m)}$. Er steigt zunächst mit steigendem m für $m \leq \varrho + \sqrt{1 - \varrho^2}$ an, und sinkt dann. Es wird angenommen,

daß gilt: $m \geq \varrho + \sqrt{1 - \varrho^2}$. Aus (49) folgt: $X_2 = \frac{\left(\frac{1}{m} - \varrho\right) E}{\mu \left(\frac{1}{m} + m - 2 \varrho\right)}$. Mit steigendem m sinkt also X_2 .

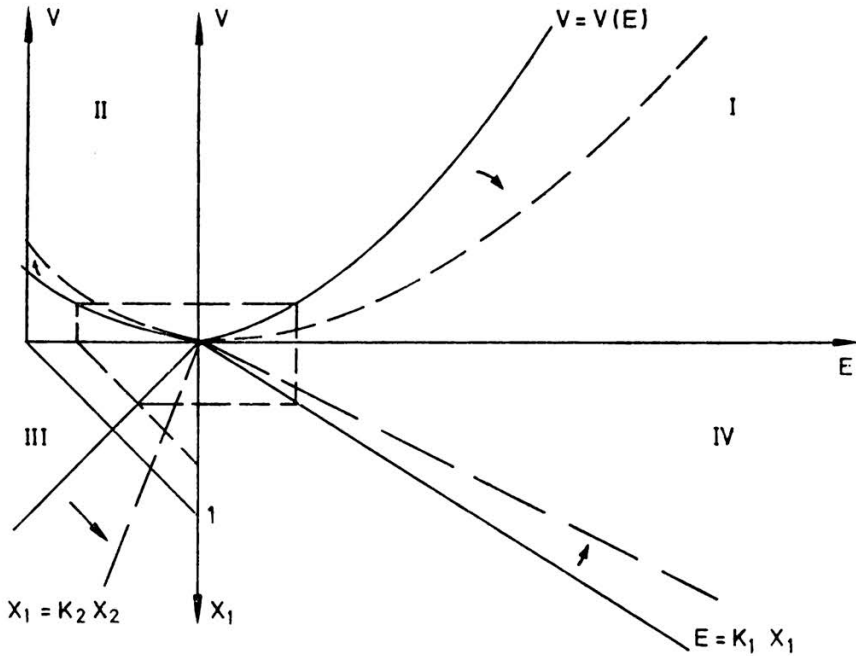


Abbildung 6

Varianz wird mit höherem X_1 realisiert. Im III. Quadranten ist $X_1 = K_2 X_2$ dargestellt, die Gerade verschiebt sich mit steigendem m nach rechts. Auf der Abszisse verläuft vom Koordinatenursprung nach links X_2 bzw. $X_1 + X_2$ entsprechend folgender Abbildung²⁸:

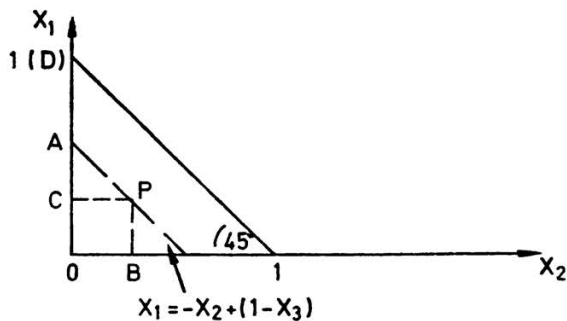


Abbildung 7

²⁸ Aus $X_1 + X_2 + X_3 = 1$ folgt: $X_1 = -X_2 + (1 - X_3)$. X_1 des Portfolios P ist \overline{OC} , X_2 ist $\overline{OB} = \overline{CP} = \overline{AC}$. Damit ist $X_3 : \overline{AD}$. In dieser Weise können die Wertpapieranteile jedes Portfolios sofort bestimmt werden.

Der Abstand beider V-Achsen ist 1. Steigendes m hat dann bei gleicher Varianz geringeres X_2 zur Folge. Von besonderem Interesse ist die $V = V(X_3)$ -Kurve im II. Quadranten. Sie gibt an, welcher Kassenanteil mit einem bestimmten Portfolio verbunden ist. Eine Erhöhung von m führt zu einer Verschiebung der Kurve nach oben. Damit ist eine Erhöhung von m bei gleicher Varianz verbunden mit einer Erhöhung von E , X_1 und X_3 bzw. Senkung von X_2 . E und V sind jeweils für $X_1 = 1$ (bzw. $X_2 = X_3 = 0$) maximal. Eine Senkung von m hat die umgekehrte Wirkung.

c) Änderungen der Korrelationen

Eine Senkung von ρ (für $\rho \leq \frac{1}{m}$) hat eine Senkung des Koeffizienten von E^2 in (47) zur Folge²⁹, insofern ist die Wirkung gleich einer Steigerung von m . Mit sinkendem ρ wird X_1 bei gleichem erwarteten Ertrag kleiner und X_2 größer³⁰. Damit steigt K_1 in (50) und K_2 in (51) sinkt. Dieses Ergebnis wird in Abbildung 8 dargestellt.

Ein Sinken der Korrelation führt zu einer Verschiebung der $V = V(E)$ -Kurve im I. Quadranten nach unten. Die Gerade $E = K_1 X_1$ verschiebt sich nach oben, der gleiche erwartete Ertrag wird mit kleinerem X_1 erreicht. Im III. Quadranten verschiebt sich die Gerade $X_1 = K_2 X_2$ nach links, bei gleichem erwarteten Ertrag und sinkendem ρ steigt X_2 . X_2 steigt bei gleichem erwarteten Ertrag für $\mu_1 > \mu_2$ stärker als X_1 sinkt, X_3 muß also sinken, was auf der Abszisse des II. Quadranten abgelesen werden kann. Eine Erhöhung von ρ hat die umgekehrte Wirkung.

Die Keynesische Spekulationskasse läßt sich als Spezialfall interpretieren. Das Wirtschaftssubjekt hat nach *Keynes* nur die Entscheidung zwischen einem Portfolio, das nur aus Kasse oder nur aus einem Wertpapier besteht. Für $X_3 = 0$ ergibt sich eine Varianz des Portfolios zwischen A und B . V steigt von B nach A mit zunehmender Substitution des

$$^{29} K = \frac{\sigma^2 (1 - \rho^2)}{\mu^2 (1 + m^2 - 2 \rho m)}$$

steigt von $\rho = +1$ bis $\rho = \frac{1}{m}$ an, sinkt dann aber mit sinkendem ρ .

³⁰ Aus (48) folgt: $X_1 = \frac{1}{2 \mu m} \left(1 + \frac{m^2 - 1}{1 + m^2 - 2 \rho m} \right) E$ und aus (49) folgt:

$$X_2 = \frac{1}{2 \mu} \left(1 - \frac{m^2 - 1}{1 + m^2 - 2 \rho m} \right) E.$$

Sinkendes ρ vergrößert die Nenner, damit sinkt X_1 und X_2 steigt.

Der Korrelationseffekt $(\vec{KE}) = (\vec{PA})$ ergibt sich als Summe von (\vec{PB}) und (\vec{BA}) . (\vec{VE}) bewirkt eine Steigerung von V und E bei konstantem ϱ . X_1 und X_2 steigen zu Lasten von X_3 . (\vec{DE}) bewirkt eine Senkung von V bei gleichem E durch eine gleichmäßigere Verteilung der Anteile der Wertpapiere 1 und 2. Diese gleichmäßigere Verteilung wird aus der Graphik des II. Quadranten deutlich:

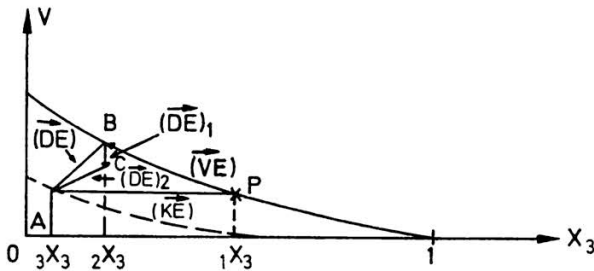


Abbildung 10

Der $(\vec{KE}) = (\vec{PA})$, der zu einem Rückgang von $1X_3$ auf $3X_3$ führt, kann folgendermaßen zerlegt werden: Der $(\vec{VE}) = (\vec{PB})$ führt zunächst zu einem Rückgang des Kassenanteils von $1X_3$ auf $2X_3$. Bei gleichem Kassenanteil führt $(\vec{DE})_1 = (\vec{BC})$ zu einer teilweisen Substitution von X_1 durch X_2 . Bei konstantem X_1 wird nun X_3 teilweise durch X_2 substituiert, das Ergebnis drückt $(\vec{DE})_2 = (\vec{CA})$ aus.

4. Die optimale Spekulationskasse (Das optimale Portfolio)

a) Ohne Berücksichtigung der Transaktionskosten

Die Gewichtung der effizienten Portfolios erfolgt durch die Nutzenfunktion $U = U(E, V)$. Das effiziente Portfolio ist optimal, das das höchste Gewicht erhält. Es wird folgende Lagrange-Funktion maximiert:

$$(52) \quad U^* = U(E, V) - \lambda (V - KE^2)$$

$$\text{für } K = \frac{\sigma^2 (1 - \varrho^2)}{\mu^2 (1 + m^2 - 2 \varrho m)}, \text{ vgl. (47).}$$

Daraus ergeben sich die partiellen Ableitungen:

$$(1) \quad \frac{\partial U^*}{\partial E} = \frac{\partial U}{\partial E} + 2 \lambda KE = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial U^*}{\partial V} = \frac{\partial U}{\partial V} - \lambda = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial U^*}{\partial \lambda} = V - KE^2 = 0$$

Das Nutzenmaximum ist dann erreicht, wenn gilt:

$$(53) \quad -\frac{\partial U}{\partial E} \bigg/ \frac{\partial U}{\partial V} = \frac{dV}{dE} = 2KE = c$$

Es wird hier eine lineare Nutzenfunktion und gleiches Risikoverhalten vorausgesetzt. Das optimale Portfolio ist der Tangentialpunkt zwischen der Kurve der effizienten Portfolios und der Nutzenfunktion.

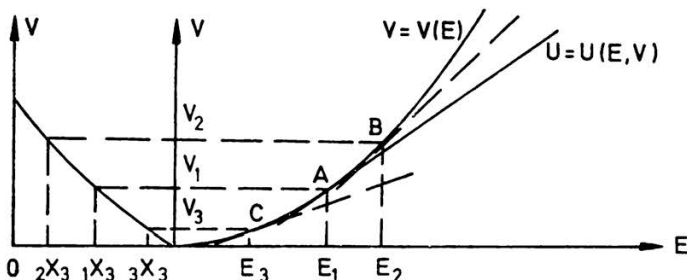


Abbildung 11

Im Punkt A ist die optimale Kombination (V_1/E_1) festgelegt, verbunden damit ist der optimale Kassenanteil ${}_1X_3$. Bei einem risikoscheueren (risikofreudigeren) Wirtschaftssubjekt verläuft die Nutzenfunktion flacher (steiler), realisiert wird dann das Portfolio C (B) mit kleinerem (größerem) erwarteten Ertrag E_3 (E_2), mit kleinerem (größerem) Risiko V_3 (V_2) und größerem (kleinerem) Kassenanteil ${}_3X_3$ (${}_2X_3$). Bei absoluter Risikoscheu ist $\frac{dV}{dE} = 0$, das Portfolio besteht nur aus Kasse.

Es soll nun die optimale Spekulationskasse berechnet werden. Aus (53) folgt:

$$(54) \quad E = \frac{c}{2K} \quad \text{und} \quad (55) \quad V = \frac{c^2}{4K}$$

Wenn (54) in (48) eingesetzt wird, folgt:

$$(56) \quad X_1 = \frac{(m - \varrho)}{\mu(1 + m^2 - 2\varrho m)} \cdot \frac{c}{2K} = \frac{\mu c (m - \varrho)}{2\sigma^2(1 - \varrho^2)}$$

Bzw. (54) in (49) eingesetzt ergibt:

$$(57) \quad X_2 = \frac{(1 - m \varrho)}{\mu (1 + m^2 - 2 \varrho m)} \cdot \frac{c}{2 K} = \frac{c \mu (1 - m \varrho)}{2 \sigma^2 (1 - \varrho^2)}$$

(54), (56) und (57) in $X_3 = 1 - (X_1 + X_2)$ eingesetzt ergibt:

$$(58) \quad X_3 = 1 - \frac{c \mu (1 - \varrho) (1 + m)}{2 \sigma^2 (1 - \varrho^2)} = 1 - \frac{c \mu (1 + m)}{2 \sigma^2 (1 + \varrho)} \quad 31$$

Die Steigung der Nutzenfunktion $U = U(E, V)$ kann als Ausdruck für die Liquiditätspräferenz interpretiert werden. Bei linearer Nutzenfunktion bedeutet eine Senkung von c eine Erhöhung der Risikoscheu und damit eine Zunahme der Liquiditätspräferenz. Aus (58) ergibt sich, daß eine Zunahme der Liquiditätspräferenz ceteris paribus verbunden ist mit einer Zunahme des Kassenanteils am Portfolio. Diese Zunahme kann durch eine Änderung der Kurve der effizienten Portfolios kompensiert bzw. überkompensiert werden. Steigende erwartete Erträge $\mu_1 = m \mu$ bzw. $\mu_2 = \mu$, sinkendes σ^2 und ϱ führen zu einer Senkung von X_3 . Für $\varrho = -1$ gilt stets: $X_3 = 0$, unabhängig von der Liquiditätspräferenz. Die Liquiditätspräferenz und die Kurve der effizienten Portfolios ändern sich im Konjunkturverlauf. Damit ergeben sich Konsequenzen für die optimale Spekulationskasse, die kurz angedeutet werden sollen.

In der Hochkonjunktur wird die Liquiditätspräferenz auf Grund der optimistischen Beurteilung der relevanten wirtschaftlichen Faktoren sinken, die Nutzenfunktion wird steiler. Damit folgt bei gleicher Kurve der effizienten Portfolios ein geringerer Kassenanteil am optimalen Portfolio. Es ist aber realistisch anzunehmen, daß sich die Kurve der effizienten Portfolios nach unten verschiebt, vorwiegend durch Substitution von Wertpapieren mit geringeren durch Wertpapiere mit höheren erwarteten Erträgen. Der Kassenanteil sinkt also weiter.

Anders ist die Situation in der Rezession, in der die Liquiditätspräferenz steigt. Auch werden gleiche erwartete Erträge wie in der Hochkonjunktur nur mit höherem Risiko erreichbar sein, die Kurve der effizienten Portfolios verschiebt sich also nach oben. Der Kassenanteil am Portfolio steigt. Eine Risikosenkung und damit eine Senkung des Kassen-

³¹ Es gilt: $X_3 = 0$ für $c = \frac{2 \sigma^2 (1 + \varrho)}{\mu (1 + m)}$. Dieser Wert in (54) eingesetzt ergibt: $E = \frac{\mu (1 + m^2 - 2 \varrho m)}{(1 + m) (1 - \varrho)}$. Eine weitere Steigerung von E ist dann nur noch bei Substitution von X_2 durch X_1 möglich. Für E_{\max} gilt: $X_1 = 1$ bzw. $X_2 = X_3 = 0$.

anteils wird in dem Maße möglich sein, wie es dem Wirtschaftssubjekt gelingt, ϱ zu senken.

Die Umstrukturierung des Portfolios erfolgte bisher ohne Berücksichtigung der Transaktionskosten, die nun eingeführt werden sollen.

b) Mit Berücksichtigung der Transaktionskosten

Es wird davon ausgegangen, daß die Transaktionskosten einer Umstrukturierung des Portfolios³² mit Sicherheit bekannt sind, für sie gilt: $K_T = f(E)$. Die Funktion bleibt zunächst noch unspezifiziert. K_T mindert den erwarteten Ertrag, die Kurve der effizienten Portfolios wird um $K_T = f(E)$ nach links verschoben, sie lautet also:

$$(59) \quad V = K [E + f(E)]^2$$

Maximiert wird die Lagrange-Funktion:

$$(60) \quad U^* = U(E, V) - \lambda \{V - K [E + f(E)]^2\}$$

Die partiellen Ableitungen sind:

$$(1) \quad \frac{\partial U^*}{\partial E} = \frac{\partial U}{\partial E} + 2 \lambda K [E + f(E)] \cdot [1 + f'(E)] = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial U^*}{\partial V} = \frac{\partial U}{\partial V} - \lambda = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial U^*}{\partial \lambda} = V - K [E + f(E)]^2 = 0$$

Das Nutzenmaximum ist dann erreicht, wenn gilt:

$$(61) \quad - \frac{\partial U}{\partial E} / \frac{\partial U}{\partial V} = \frac{dV}{dE} = 2 K [E + f(E)] \cdot [1 + f'(E)] = 2 \sqrt{VK} [1 + f'(E)]$$

Das optimale Portfolio wird bei unveränderter Risikoscheu und linearer Nutzenfunktion $\left(\frac{dV}{dE} = c\right)$ erreicht für:

³² Vgl. auch *Tobin, J.*, The Theory of Portfolio Selection, in: *F. H. Hahn* und *F. P. R. Brechling* (eds.), The Theory of Interest Rates, London-New York 1965, S. 3 - 51, hier: S. 4 f., *Hicks, J. R.*, Critical Essays in Monetary Theory, Oxford 1967, S. 31 ff., *Lutz, F. A.*, Zinstheorie, Zürich-Tübingen 1967, S. 206 f. und *Claassen, E. M.*, Probleme der Geldtheorie, Berlin-Heidelberg-New York 1970, S. 138 ff.

$$(62) \quad E = \frac{c}{2K[f'(E) + 1]} - f(E)$$

und

$$(63) \quad V = \frac{1}{K} \left\{ \frac{c}{2[f'(E) + 1]} \right\}^2$$

Sind die Transaktionskosten konstant, d. h. gilt: $K_T = a$, so ergibt sich für:

$$(64) \quad E = \frac{c}{2K} - a \quad \text{und} \quad V = \frac{c^2}{4K}$$

Änderungen von a haben keinen Einfluß auf V . E wird um a kleiner. Dieser Fall wird in Abbildung 12 dargestellt:

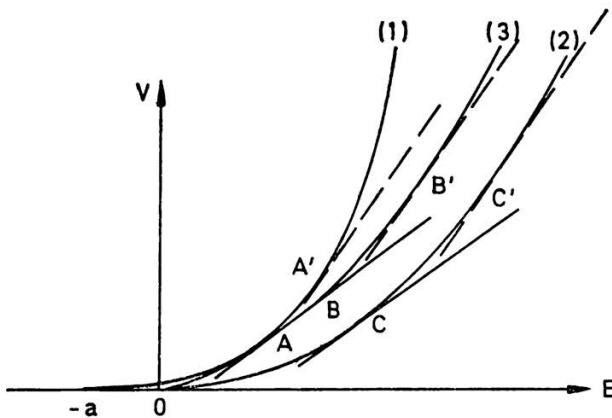


Abbildung 12

Realisiert sei das Portfolio A . Eine Umstrukturierung des Portfolios durch eine Änderung der erwarteten Erträge und/oder der Korrelationen möge ohne Berücksichtigung von K_T zum Portfolio C führen, wobei mit C eine Nutzensteigerung gegenüber A verbunden ist. Die Berücksichtigung der Transaktionskosten $K_T = a$ führt zu einer Verschiebung der $V = V(E)$ -Kurve um a nach links. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden:

- (a) Die ursprüngliche Nutzenfunktion wird tangiert. Das ist in der Graphik mit dem Portfolio B der Fall. Das Wirtschaftssubjekt steht einer Umstrukturierung des Portfolios indifferent gegenüber.

- (b) Die Transaktionskosten sind kleiner als in (a). Die Umstrukturierung führt zu einer Nutzensteigerung.
- (c) Die Transaktionskosten sind größer als in (a), die Umstrukturierung wird unterlassen, da sie zu einer Nutzensenkung führen würde.

Eine Modifikation muß für mit E steigenden Transaktionskosten vorgenommen werden, es gilt dann: $f'(E) > 0$. Aus (61) geht hervor, daß dann die Steigung der Kurve der effizienten Portfolios (3) stets größer als die von (2) ist. Der horizontale Abstand zwischen beiden Kurven — $f(E)$ — vergrößert sich mit steigendem E . Das Nutzenmaximum wird, wie aus (63) hervorgeht, bei kleinerem V erreicht.

Die Fälle (a) bis (c) sind unter der Voraussetzung gleicher Risikoscheu diskutiert worden. Wird vom Portfolio A' ausgegangen, wobei die Risikoscheu kleiner als beim Portfolio A ist, so wird die Umstrukturierung trotz der Transaktionskosten vorgenommen, weil damit eine Nutzensteigerung verbunden ist. Fall (a) wird also bei sinkender Risikoscheu und höheren Transaktionskosten erreicht. Umgekehrt führt eine steigende Risikoscheu schon bei kleineren Transaktionskosten zur Indifferenzsituation.

Die Transaktionskosten werden in der Regel der allgemeinen Zinsentwicklung folgen. In der Hochkonjunktur ist mit steigenden Zinsen und damit steigenden Transaktionskosten zu rechnen. Das wirkt sich hemmend auf eine Umstrukturierung des Portfolios aus. Andererseits sinkt die Risikoscheu. Dadurch kann der hemmende Effekt der gestiegenen Transaktionskosten kompensiert oder sogar überkompensiert werden.

Es bleibt noch die Berechnung der optimalen Spekulationskasse. Für X_1 bzw. X_2 folgt unter Berücksichtigung der Transaktionskosten $f(E)$ aus (48) und (49):

$$(65) \quad X_1 = K_3 [E + f(E)] \quad \text{bzw.} \quad (66) \quad X_2 = K_4 [E + f(E)]$$

$$\text{für } K_3 = \frac{(m - \varrho)}{\mu (1 + m^2 - 2 \varrho m)} \quad \text{und} \quad K_4 = \frac{(1 - m \varrho)}{\mu (1 + m^2 - 2 \varrho m)}$$

Die optimalen Wertpapieranteile ergeben sich, wenn (62) in (65) bzw. (66) eingesetzt wird, also:

$$(67) \quad X_1 = K_3 \left\{ \frac{c}{2 K [f'(E) + 1]} - f(E) + f(E) \right\} = \frac{c \mu (m - \varrho)}{2 \sigma^2 (1 - \varrho^2) [f'(E) + 1]}$$

bzw.

$$(68) \quad X_2 = K_4 \left\{ \frac{c}{2 K [f'(E) + 1]} \right\} = \frac{c \mu (1 - m \varrho)}{2 \sigma^2 (1 - \varrho^2) [f'(E) + 1]}$$

Aus $X_3 = 1 - (X_1 + X_2)$ folgt schließlich:

$$(69) \quad X_3 = 1 - \left\{ \frac{c \mu (m - \varrho) + c \mu (1 - m \varrho)}{2 \sigma^2 (1 - \varrho^2) [f'(E) + 1]} \right\} = 1 - \frac{c \mu (1 + m)}{2 \sigma^2 (1 + \varrho) [f'(E) + 1]}$$

Konstante Transaktionskosten $[f'(E) = 0]$ haben keinen Einfluß auf die Zusammensetzung des Portfolios. Für mit E steigenden Transaktionskosten $[f'(E) > 0]$ sinken X_1 und X_2 bzw. X_3 steigt. Das sich aus (63) ergebende kleinere Risiko V wird durch einen höheren Kassenanteil am Portfolio erreicht.

5. Abschließende Bemerkungen

Die Berechnung von getrennten optimalen Kassen ist aber letztlich unbefriedigend, die Teilkassen müssen in einem Gesamtmodell zusammengefaßt werden. Die Gewichtung der Alternativen zur Transaktions- bzw. Vorsichtskasse und Spekulationskasse muß dann mit einer übergeordneten Nutzenfunktion erfolgen, die Transaktions- und Spekulationsentscheidungen umfaßt. Sie muß also von unvollkommener Information über das Einzahlungs-Auszahlungs-Muster und die Wertpapiererträge ausgehen und Transaktions-Illiquiditäts- und Informationskosten berücksichtigen. Ausgegangen werden könnte von der Transaktions- bzw. Vorsichtskasse oder Spekulationskasse. Die Modelle der Transaktions- bzw. Vorsichtskasse können erweitert werden, indem mehrere Wertpapiere als Anlagen berücksichtigt werden. Die Erträge der Wertpapiere müssen dann wie in der Portfolio-Analyse als (subjektive) Wahrscheinlichkeitsverteilungen formuliert werden. Aber auch die Spekulationskasse könnte Ausgangspunkt sein. Das Modell der Portfolio-Selection muß dann die Transaktionsentscheidungen berücksichtigen³³.

Zusammenfassung

Die optimale Transaktions-, Vorsichts- und Spekulationskasse Diskussion einiger Lösungsansätze

In diesem Aufsatz wurden Lösungsmöglichkeiten zur Bestimmung der optimalen Transaktionskasse, der optimalen Vorsichtskasse und der optimalen Spekulationskasse diskutiert. Die Berechnung der optimalen Transaktionskasse

³³ Diesen Lösungssatz spricht Otruba an, vgl. Otruba, H., S. 322 f.

(Prämissen: vollkommene Information über das Einzahlungs-Auszahlungs-Muster, Kredit- und Wertpapierzins, Berücksichtigung von Transaktionskosten Kasse \rightarrow Wertpapiere \rightarrow Kasse) erfolgte nach dem lagerhaltungstheoretischen Ansatz von *Baumol* und *Tobin*. Die diskutierten Modelle der optimalen Vorsichtskasse von *Patinkin*, *Whalen* und *Sprenkle* wiesen Mängel auf. Bei *Patinkin* ist keine überzeugende Zielfunktion erkennbar, bei *Whalen* fehlen die Transaktionskosten Kasse \rightarrow Wertpapiere \rightarrow Kasse und Hypothesen über Einzahlungs-Auszahlungs-Muster und *Sprenkle's* Vorsichtskasse ist nicht optimal, weil Informationskosten nicht berücksichtigt werden. Es wurde ein Modell entwickelt, das diese Nachteile vermeidet und von den Prämissen: vollkommene Information über den Wertpapierzins, aber unvollkommene Information über das Einzahlungs-Auszahlungs-Muster und Berücksichtigung von Transaktions-, Illiquiditäts- und Informationskosten ausgeht. Die optimale Spekulationskasse wurde als Teil eines optimalen Portfolios bestimmt. Die Analyse ging von effizienten Portfolios aus, die Gewichtung der effizienten Portfolios durch eine Nutzenfunktion mit den Argumenten erwarteter Ertrag und Risiko führte zum optimalen Portfolio und damit zur optimalen Spekulationskasse, die mit und ohne Berücksichtigung von Transaktionskosten berechnet wurde. Auf den unbefriedigenden Zustand einer Dichotomie der Kassenhaltungen wurde hingewiesen und grundsätzliche Lösungsmöglichkeiten angedeutet.

Summary

Optimal Transaction, Precautionary and Speculative Cash Discussion of Some Solution Approaches

In this article possible solutions for determining optimal *transaction cash*, optimal *precautionary cash* and optimal *speculative cash* are discussed. Optimal transaction cash is calculated on the basis of the *Baumol-Tobin* inventory theory approach (premises: complete information on the in-payment/out-payment pattern, credit and security interest rates, allowances for cash \rightarrow securities \rightarrow cash transaction costs). The models of optimal precautionary cash authored by *Patinkin*, *Whalen* and *Sprenkle*, which are discussed here, have defects. In *Patinkin's* model no convincing objective function is discernible, in *Whalen's* the cash \rightarrow securities \rightarrow cash transaction costs and hypotheses concerning in-payment/out-payment patterns are lacking, and *Sprenkle's* precautionary cash is not optimal because information costs are not taken into account. A model is developed which avoids these disadvantages and proceeds from the premises: complete information on security interest rates, but imperfect information on the in-payment/out-payment pattern, and allowances for transaction, illiquidity and information costs. Optimal speculative cash is determined as part of an optimal portfolio. The analysis proceeds from efficient portfolios; weighting of the efficient port-

folios by a utility function with the arguments of expected return and risk results in the optimal portfolio and hence in the optimal speculative cash, which is calculated with and without allowances for transaction costs. Attention is drawn to the unsatisfactory situation of a dichotomy of cash holdings and basic possibilities of finding a solution are indicated.

Résumé

La caisse optimale de transaction, de prévoyance et de spéculation — examen de quelques debuts de solution

L'article examine les possibilités de dégager les définitions optimales de la *caisse de transaction*, de la *caisse de prévoyance* et de la *caisse de spéculation*. Le calcul de la caisse optimale de transaction (prémisse: information complète sur le modèle de paiement et de remboursement, les taux du crédit et des valeurs mobilières, l'établissement des coûts de transaction: *caisse* → *valeurs mobilières* → *caisse*) se fondait sur la base théorique du maintien du niveau des stocks de *Baumol* et *Tobin*. Les modèles discutés de la caisse optimale de prévoyance de *Patinkin*, *Whalen* et *Sprengle* révèlent des lacunes. Chez *Patinkin*, l'on ne découvre pas de fonction finalisée convaincante, chez *Whalen*, les coûts de transaction: *caisse* → *titres* → *caisse* ainsi que des hypothèses sur un modèle de paiement et de remboursement font défaut, et chez *Sprengle*, il n'est pas tenu compte des coûts d'information. Un modèle a été élaboré qui réduit ces inconvénients à néant et se fonde sur les prémisses suivantes: information complète sur les taux des valeurs mobilières, mais information incomplète sur le modèle de paiement et de remboursement et sur la prise en considération des coûts de transaction, d'« illiquidité » et d'information. La caisse optimale de spéculation fut définie comme une partie d'un portefeuille optimal. L'analyse se fondait au départ sur des portefeuilles efficients, la pondération des portefeuilles efficients par une fonction d'utilité basée sur les arguments de gain et de risque escomptés conduisit au portefeuille optimal et par voie de conséquence à la caisse optimale de spéculation, qui fut calculée avec et sans les coûts de transaction. L'on a enfin souligné l'insatisfaisante situation d'une dichotomie des tenues de caisses et indiqué des éléments fondamentaux de solution.