Zeitschrift für Wirtschafts- u. Sozialwissenschaften (ZWS) 111 (1991), S. 337 - 399
Duncker & Humblot, Berlin 41

Neuere Entwicklungen auf dem Gebiet der Ökonometrie*

Von Gerd Hansen**

Inhalt

1. Einleitung
2. Dynamisches interdependentes ökonometrisches Modell (SEM) und Cointegration von Zeitreihen
   2.1. SEM und vektorautoregressives Modell (VAR)
   2.2. Stationäre versus integrierte Variablen
      2.2.1. Definition
      2.2.2. Test auf Integrationsgrad
   2.3. Regressionstheorie bei integrierten Variablen
   2.4. Dynamische Systeme mit Cointegration
      2.4.1. Stabilitätseigenschaften des Systems
      2.4.2. Cointegrations- und Exogenitätstests
      2.4.3. Schätzung des ECM
      2.4.4. Hypothesentest
   2.5. Empirische Analysen
3. Schätzmethoden für Modelle mit rationalen Erwartungen
   3.1. Schätzung mit Hilfe von Instrumentvariablen
   3.2. Nichtlineare Instrumentvariablen-Schätzung
   3.3. Full-Information-ML-Schätzung (FIML)
   3.4. Zwei-Schritt-Instrumentvariablen-Methode (2S2SLS) und verallgemeinerte Momentenmethode (GMM)
   3.5. Schätzung bei integrierten exogenen Variablen
   3.6. Identifikation und Stabilität
   3.7. Empirische Arbeiten
4. Analyse von Mikrodaten im Querschnitt
   4.1. Problemstellung
   4.2. Modellformulierungen
   4.3. Maximum-Likelihood-Schätzung der Modelle
   4.4. Zweistufige Heckman-Schätzung
   4.5. Messung der Einflüsse von Variablenänderungen
   4.6. Eigenschaften der Schätzer

---

* Dieser Beitrag erscheint in der Reihe von Überblicksartikeln, die in der Regel jährlich zweimal veröffentlicht werden.

** Der vorliegende Beitrag wäre ohne die zahlreichen Diskussionen mit meinen Mitarbeitern und Kollegen nicht möglich gewesen. Danken möchte ich hier insbesondere Herrn Diplom-Volkswirt Wolfgang Hauschulz für wesentliche Anregungen zum Abschnitt über Cointegration von Zeitreihen und Herrn Dr. Jens Bartenwerfer für seinen Beitrag zum Abschnitt über Tobit-Modelle bei Querschnittsdaten. Für Fehler trage ich die alleinige Verantwortung.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

4.7. Schätzung bei Fehlspezifikation
4.8. Modellerweiterungen
4.9. Empirische Arbeiten
5. Modelle für Paneldaten
5.1. Das Modell fester Effekte
5.2. Das Modell zufälliger Effekte
5.3. Schätzung des Tobitmodells mit fixen Effekten
5.4. Schätzung des Tobitmodells mit zufälligen Effekten
5.5. Dynamische Analysen anhand von Paneldaten
6. Zusammenfassung

1. Einleitung

Einen auch nur halbwegs *vollständigen* Überblick über die jüngste Entwicklung in der Ökonometrie zu geben, ist eine unlösbare Aufgabe. Insofern weckt der Titel dieses Beitrags unerfüllbare Erwartungen. In diesem Beitrag werden aber einige neuere Modelle und Methoden analysiert, die die empirische Forschung stark beeinflußt haben und daher auch im akademischen Unterricht stärker in den Vordergrund gerückt werden sollten. Der Beitrag wendet sich vor allem an den empirischen Forscher, der neuere methodische Entwicklungen adaptieren will. Die Darstellung beschreibt zunächst die jeweiligen ökonometrischen Modelle und Schätzmethoden. Dabei wird versucht, die mathematisch recht anspruchsvolle Literatur (z.B. zur Cointegration von Zeitreihen) in die Sprache traditioneller Ökonometrie-Lehrbücher zu übersetzen und die Unterschiede zu traditionellen Methoden herauszuarbeiten. Anschließend werden Hinweise auf neuere empirische Arbeiten gegeben, die diese Ansätze insbesondere auf Daten für die Bundesrepublik anwenden. Es ist dieses Vorgehen, das eine Beschränkung auf einige Themengebiete erzwingt.

Neue Ansätze gibt es sowohl in der Analyse von Zeitreihen als auch in der Analyse von Querschnitts- und Paneldaten. Während auf dem Gebiet der Analyse von Zeitreihendaten die siebziger Jahre noch von einem Nebeneinander der klassischen ökonometrischen Ansätze und der reinen Zeitreihenanalyse gekennzeichnet waren, beobachtet man in den achtziger Jahren verstärkt Bemühungen, diese Lücke zu überbrücken. Es stehen in der neueren Literatur vor allem zwei Modelltypen im Vordergrund, nämlich einerseits Modelle, die der ökonomischen Theorie ausschließlich eine Bedeutung für die langfristigen (steady state) Beziehungen zwischen den Variablen zusprechen und die kurzfristigen Beziehungen mit einer dynamischen Spezifikation (Lagverteilung) nach rein zeitreihenanalytischen Gesichtspunkten vornehmen, und andererseits Modelle, die explizit ein rationales vorausschauendes Verhalten der Wirtschaftssubjekte durch stochastische Optimierung über einen längeren zukünftigen Zeitraum beschreiben. Die erstgenannte Modellklasse ist das traditionelle dynamische lineare Gleichungssystem.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Innerhalb dieser Modellklasse sind es Modelle mit cointegrierten Zeitreihen, die Gegenstand der jüngsten Forschung sind.

Die zweite Gruppe ist dadurch gekennzeichnet, daß sie antizipierte und nicht antizipierte Effekte unterscheidet und damit meist besser für eine Politikanalyse geeignet ist. Aufgrund zukünftiger Erwartungen ergeben sich hier dynamische Modelle, die als Zeitreihenmodelle mit spezifischen Restriktionen verstanden werden können.

Ganz allgemein kann man feststellen, daß die zunehmende Verfügbarkeit von Querschnitts- und Paneldaten in den letzten zehn Jahren eine Fülle empirischer Analysen von Individualdaten hervorgebracht hat. Diese Daten sind dadurch gekennzeichnet, daß für einzelne Individuen keine Beobachtungen vorliegen, z.B. keine Käufe bestimmter langlebiger Güter getätigt wurden und insofern eine „Null" beobachtet wird. Der traditionelle Ansatz, dieses Datenproblem in der Analyse zu berücksichtigen, ist das Tobit-Modell, das in verschiedenster Weise verallgemeinert werden kann.

Kapitel 2 beschäftigt sich mit der Beziehung zwischen dem interdependenten Gleichungssystemen und der Analyse cointegrierter Zeitreihen. In Kapitel 3 werden Methoden zur Schätzung von Modellen mit vorausschauendem Verhalten der Wirtschaftssubjekte dargestellt. Kapitel 4 und 5 behandeln Probleme bei der Analyse von mikroökonomischen Daten, sofern diese als Querschnittsdaten oder Paneldaten zur Verfügung stehen.

2. Dynamisches interdependentes ökonometrisches Modell (SEM) und Cointegration von Zeitreihen

Es ist nicht möglich die sehr umfangreiche Literatur der letzten Jahre zur Cointegration von Zeitreihen vollständig darzustellen. Ein Teil dieser Literatur gehört eindeutig in das Gebiet der Zeitreihenanalyse. Wir beschränken uns darauf, die Bedeutung dieser Forschungsergebnisse für den angewandten Ökonometriker in möglichst einfacher Form darzustellen.

2.1. SEM und vektorautoregressives Modell (VAR)

Ausgangspunkt ist das lineare dynamische interdependente Gleichungssystem (SEM) in g endogenen $y' = (y_1 \dots y_g)$ und k exogenen Variablen $x' = (x_1 \dots x_k)$ und nur kontemporär korrelierten Störgrößen $u' = (u_1 \dots u_g)$ gemäß

$$(1) \qquad B(L)y_t = C(L)x_t + u_t \quad \text{mit}$$
$$B(L) = I - B^1L - B^2L^2 \dots - B^pL^p; \qquad C(L) = C^0 + C^1L + \dots + C^pL^p$$
$$\text{sowie } E(u_t) = 0 \text{ und } E(u_tu_t') = \Sigma .$$

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Dabei sind B^i (gxg)-Matrizen und C^i (gxk)-Matrizen und L der Lag-Operator $L^i x_t = x_{t-i}$.

Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit betrachten wir als Beispiel ein Zwei-Gleichungsmodell mit Lagpolynomen 1. Ordnung, um den Abstraktionsgrad zu reduzieren. Gleichung (1) läßt sich dann unter Berücksichtigung von identifizierenden Restriktionen (vgl. *Hatanaka,* 1975) als (1a) schreiben.

$$\text{(1a)} \qquad \begin{bmatrix} 1 - b_{11}^1 L & -b_{12}^0 - b_{12}^1 L \\ -b_{21}^0 - b_{21}^1 L & 1 - b_{22}^1 L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^0 + c_{11}^1 L & 0 \\ 0 & c_{22}^0 + c_{22}^1 L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\text{(1a)} \qquad \begin{aligned} y_{1t} &= b_{11}^1 y_{1t-1} + b_{12}^0 y_{2t} + b_{12}^1 \quad y_{2t-1} + c_{11}^0 x_{1t} + c_{11}^1 x_{1t-1} + u_{1t} \\ y_{2t} &= b_{22}^1 y_{2t-1} + b_{21}^0 y_{1t} + b_{21}^1 \quad y_{1t-1} + c_{22}^0 x_{2t} + c_{22}^1 x_{2t-1} + u_{2t}. \end{aligned}$$

Dieses Modell kann als ein einfaches dynamisches Marktmodell in den endogenen Variablen y_{1t} (Menge) und y_{2t} (Preis) und den exogenen Variablen x_{1t} und x_{2t} verstanden werden. Dabei kommt x_{1t} nur in der 1. Gleichung und x_{2t} nur in der 2. Gleichung vor, d.h. beide Gleichungen sind identifiziert.

Die Unterschiede zwischen klassischer Ökonometrie und Zeitreihenanalyse beruhen teilweise auf unterschiedlichen Exogenitätsbegriffen. Wir wollen daher kurz auf diese Unterschiede eingehen.

Grundlage des „Cowles Commission Ansatzes" ist die Annahme, daß die Einteilung der Variablen in endogene Variablen y_t und vorherbestimmte bzw. exogene Variablen x_t vorgegeben ist und eine ausreichende Anzahl identifizierender Restriktionen existiert. Eine Variable z.B. x_{1t} wird als in der 1. Gleichung *vorherbestimmt* angesehen, wenn sie nicht mit den kontemporären und zukünftigen Störgrößen der Gleichung korreliert, d.h. $E(x_{1t} u_{1t+i}) = 0$; $\forall i \geq 0$. Die Variable wird als *strikt exogen* angesehen, wenn sie nicht mit den kontemporären, zukünftigen *und vergangenen* Störgrößen der Gleichung korreliert, d.h. $E(x_{1t} u_{1t+1}) = 0 \; \forall i \gtreqless 0$.

Wir definieren die Bedingungen für Vorherbestimmtheit, schwache und strikte Exogenität am Beispiel der Variablen y_{2t}. y_{2t} ist in der 1. Gleichung vorherbestimmt, wenn

1. u_{1t} und u_{2t} kontemporär und seriell unabhängig sind *und*
2. $b_{21}^0 = 0$ ist,

d.h. wenn y_{2t} *rekursiv* bezüglich y_{1t} im Sinne von Wold ist.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Ferner ist y_{2t} (strikt) exogen, wenn *zusätzlich*

3. $b_{21}^1 = 0$ gilt, da für $b_{21}^1 \neq 0$ y_{2t} von $u_{1,t-1}$ abhängt.

Strikte Exogenität von y_{2t} verlangt eine in allen Lags von y_{1t} unabhängige Gleichung für y_{2t}, d.h. es ist eine einfache Erweiterung des Begriffs der rekursiven Struktur.

Demgegenüber definieren Engle, Hendry und Richard (1983) *schwache Exogenität* dadurch, daß sich die gemeinsame Dichte

$$f(y_t, x_t \mid y_{t-1}^{\bullet}, x_{t-1}^{\bullet}; \Theta) \text{ mit } y_{t-1}^{\bullet} = (y_1 \ldots y_{t-1}), x_{t-1}^{\bullet} = (x_1 \ldots x_{t-1})$$

in der Weise faktorisieren läßt, daß

$$f(y_t, x_t \mid y_{t-1}^{\bullet}, x_{t-1}^{\bullet}; \Theta) = f(y_t \mid x_t, y_{t-1}^{\bullet}, x_{t-1}^{\bullet}; \Theta_1) \cdot f(x_t \mid y_{t-1}^{\bullet}, x_{t-1}^{\bullet}, \Theta_2)$$

gilt und Θ_2 dabei nicht von Θ_1 abhängt *(schwache Exogenität)*, d.h. daß die Randverteilung von x_t die Parameter der bedingten Verteilung von y_t nicht enthält. In diesem Fall können die Parameter Θ_1 der Beziehung zwischen y_t und x_t ohne Informationsverlust anhand der bedingten Verteilung geschätzt werden (vgl. Neyman's Suffizienzkriterium). Eine gleichzeitige Schätzung der Gleichungen für y_t und x_t führt bei schwacher Exogenität von x_t zu keiner Verbesserung der Effizienz (Engle et al. (1983)).

In vielen Fällen, wie z.B. bei Normalverteilung, sind schwache Exogenität und Vorherbestimmtheit identisch. Die traditionelle Ökonometrie benutzt diese Annahme der *schwachen Exogenität* der x_t bei der Schätzung des Systems (1). Ohne die Annahme der schwachen Exogenität muß die Gleichung für x_t in einem Full-Information-Maximum-Likelihood (FIML)-Verfahren mitgeschätzt werden, um eine volle Effizienz der Schätzung zu erzielen.

Im einfachsten Fall erweitert man die Beziehung (1) um ein multivariates AR-Modell (2) für die exogenen Variablen (Annahme strikter Exogenität von x_t).

$$D(L)x_t = v_t \quad \text{mit} \quad D(L) = I - D^1L - D^2L^2 - \ldots - D^mL^m = I - \bar{D}(L) \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) lassen sich als *restringiertes* VAR-Modell (3) schreiben.

$$\begin{bmatrix} B(L) & C(L) \\ 0 & D(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix} \tag{3}$$

bzw.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

$$(3) \qquad A(L)\tilde{y}_t = \varepsilon_t;\ A(L) = \begin{bmatrix} B(L) & C(L) \\ 0 & D(L) \end{bmatrix};\ \tilde{y}_t = \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix};\ \varepsilon_t = \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix}.$$

Das System (3) eignet sich besonders zur Überprüfung der Nullrestriktion der strikten Exogenität, indem man ein unrestringiertes VAR (4) schätzt.

$$(4) \qquad \begin{bmatrix} B(L) & C(L) \\ F(L) & D(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix}$$

und die Hypothese $F(L) = 0$ überprüft. Tests, die derartige (Un-)Abhängigkeiten von Variablen untersuchen, werden als *Granger-Kausalitätstests* bezeichnet. Die Variable x ist Granger-kausal zu y, wenn $F(L) = 0$ und $C(L) \neq 0$ ist. Dabei werden kontemporäre Effekte vernachlässigt, d.h. x kann kontemporär mit y korrelieren.

Engle et al. 1983 definieren daher eine Variable als *streng exogen,* wenn sie schwach exogen *und* nicht durch Verzögerungen anderer endogener Variablen im Sinne von Granger beeinflußt ist.

In der jüngsten Literatur betrachtet man das VAR-System (4) als das allgemeinere Modell und das SEM der Gleichung (1) als in diesem System wegen $F(L) = 0$ genestet (*Monfort / Rabemananjara* 1990; *Hendry / Mizon* 1990). Die Hypothese der strikten Exogenität kann dann geprüft werden, indem man gegen ein VAR der Struktur (4) testet (*Monfort* et al. 1990). Andererseits kann man aber auch das SEM als das allgemeinere Modell ansehen und ein VAR-System als Spezialfall $C(L) = 0$ in Gleichung (1) betrachten. Dafür spricht, daß das SEM im Gegensatz zum VAR ein offenes System in dem Sinne ist, daß exogene – nicht erklärungsbedürftige Einflüsse – das System beeinflussen können. SEM und VAR stehen daher grundsätzlich gleichberechtigt nebeneinander.

Das Modell (3) enthält für $L^i = 1$ und $E(\varepsilon_t) = 0$ noch die langfristigen Beziehungen zwischen den Variablen $\tilde{y}_t$, die wir durch

$$(5) \qquad A(1)\tilde{y}_t = 0$$

beschreiben.

Ein solches VAR-Modell kann immer so reparametrisiert werden, daß neben den 1. Differenzen der Variablen $\tilde{y}_t$ – die vermutlich schwach stationär sind – nur noch die Verzögerungen $\tilde{y}_{t-1}$ wie in (6) vorkommen.

$$(6) \qquad A^*(L)\,\Delta\tilde{y}_t = A(1)\tilde{y}_{t-1} + \varepsilon_t; \qquad A^*(L) = I - A_1^* L \ldots - A_{p-1}^* L^{p-1}$$

Gleichung (6) ist die sogenannte *„Error-Correction"-Darstellung* (ECM) des VAR-Modells. Sie enthält sowohl mit $A^*(L)\,\Delta\tilde{y}_t$ die Beziehungen zwischen den differenzierten Variablen als auch mit $A(1)\tilde{y}_{t-1}$ die langfristigen Bezie-

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

hungen (Multiplikatoren) zwischen den Niveauvariablen (*Engle / Granger* 1987).

Im Gleichgewicht gilt $\Delta \tilde{y}_t = 0$ und $E(\varepsilon_t) = 0$ und damit das *statische System* (5). Geht man davon aus, daß die Wirtschaftstheorie primär komparativ-statische Hypothesen formuliert, so ist es insbesondere das System (6), das für die Überprüfung von ökonomischen Hypothesen in Betracht kommt.

Das System (6) trennt die kurzfristige Dynamik ökonomischer Prozesse in eleganter Weise von den langfristigen Gleichgewichtsbeziehungen. Darüber hinaus macht das System (6) einen gravierenden Mangel einer Analyse nur anhand differenzierter Zeitreihen (wie z. B. bei zahlreichen Granger-Kausalitätstests) deutlich. Solche Analysen vernachlässigen die Beziehungen zwischen den Niveauvariablen, d. h. den Teil des Modells, für den die komparativ-statische Wirtschaftstheorie wichtige Aussagen macht, und sind daher fehlspezifiziert. Ökonomische Zeitreihen werden in aller Regel differenziert, um sie (schwach) stationär zu machen. Unter prognostischen Gesichtspunkten vernachlässigt eine Analyse anhand solcher differenzierter (stationärer) Zeitreihen das langfristige Gedächtnis ökonomischer Prozesse und vermag daher keine zuverlässigen langfristigen Prognosen zu geben.

Die Abkehr von einer Analyse nur differenzierter (stationärer) Zeitreihen ist daher ein Markstein in dem Bemühen, Zeitreihenanalyse und traditionelle Ökonometrie zusammenzuführen. Gleichzeitig ergeben sich jedoch gravierende Änderungen in der ökonometrischen Schätz- und Testmethodik, die daraus resultieren, daß die traditionellen Inferenzmethoden von der Annahme stationärer Variablen (Konvergenz der Momente mit Rate $1/T$) ausgehen. Das System (6) enthält aber auch trendbehaftete Niveauvariablen.

Es gilt im folgenden zu zeigen, wie die traditionelle Schätz- und Testtheorie für ein Modell in (differenzierten) stationären Variablen um eine Schätz- und Testtheorie für ein Modell in den nichtstationären Variablen y_{t-1} ergänzt werden kann. Dabei wird zunächst die Stationarität jeder einzelnen Zeitreihe anhand eines univariaten Modells analysiert, das man durch schrittweise Substitution von Variablen erhält.

2.2. Stationäre versus integrierte Variablen

2.2.1. Definition

Die klassischen Schätzmethoden für das SEM gehen von kovarianzstationären Störgrößen u_t aus, d. h. sie unterstellen

1. $E(u_t) = 0$ und $E(u_t^2) = \sigma^2$ für alle t sowie
2. $E(u_t u_{t-k}) = \sigma^2 \varrho_k$ für alle t und k.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Viele ökonomische Zeitreihen besitzen jedoch einen von der Zeit abhängigen Mittelwert und/oder zeitabhängige Varianzen und Kovarianzen, d.h. sie sind nichtstationär. Am häufigsten steigt oder fällt der Mittelwert der Zeitreihe über die Zeit bzw. die Varianz der Zeitreihe konvergiert mit $T \rightarrow \infty$ gegen unendlich.

Die einfachste Trenddefinition ist die des Komponentenmodells

$$y_t = \tau_t + z_t + u_t$$

mit *deterministischem* linearen oder quadratischen *Trend* $\tau_t = \alpha_o + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ sowie einer schwach-stationären zyklischen Komponente z_t und einem weißen Rauschen u_t. Bei linearem Trend gilt

$$y_t = \alpha_o + \alpha_1 t + z_t + u_t \qquad \text{bzw. } \Delta y_t = \alpha_1 + \Delta z_t + \Delta u_t.$$

Die bedeutsamste Alternative besteht darin, für τ_t einen *stochastischen Trend*

$$\tau_t = \mu + \tau_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \text{bzw. } \tau_t - \tau_{t-1} = \mu + \varepsilon_t$$

d.h. einen „random walk" mit drift anzunehmen (*Harvey* 1985; *Nelson / Plosser* 1982; *Cochrane* 1988; *Stock / Watson* 1988).

Die autoregressive Darstellung der Trendkomponente besitzt eine Einheitswurzel und erzeugt damit persistente Einflüsse auf y_t.

Einfacher ist es, davon auszugehen, daß y_t selbst eine „random walk"-Komponente besitzt, d.h. anzunehmen, die d-fach differenzierte Variable y_t ($d = 0, 1, 2 \ldots$) sei stationär und kann durch eine invertierbare ARMA-Darstellung

$$A(L)(1-L)^d y_t = B(L) e_t$$

beschrieben werden, d.h. $A(L) = 0$ und $B(L) = 0$ haben Wurzeln außerhalb des Einheitskreises (*Perron* 1988). Die univariate ARMA-Representation für y_t besitzt also d Einheitswurzeln. Dies ist die Definition für eine *integrierte Variable* der Ordnung d (*Engle / Granger* 1987). Der Integrationsgrad gibt an, wie oft eine Zeitreihe differenziert werden muß, um stationär zu sein. Dabei wird unterstellt, daß es eine ganzzahlige Integrationsordnung gibt. Im allgemeinen wird für ökonomische Zeitreihen $d = 0$ (stationär) oder $d = 1$ (eine Einheitswurzel) angenommen.

Im einfachsten Fall ist y_t selbst ein random walk

$$\Delta y_t = \varepsilon_t; \qquad \varepsilon_t = \text{weißes Rauschen}$$

Wegen

$$y_t = y_o + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i \text{ und } E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$$

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

ergibt sich eine trendabhängige Varianz für y_t, nämlich $Var\,(y_t) = t \cdot \sigma^2$. Das zweite Moment wächst also mit dem Stichprobenumfang T.

Für einen random walk mit drift

$$y_t - y_{t-1} = \mu + \varepsilon_t$$

erhält man entsprechend

$$y_t = y_o + \mu \cdot t + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_t$$

und damit für das zweite Moment

$$Var\,(y_t) = \mu^2 t^2 + t\sigma^2.$$

In diesem Fall wächst die Varianz von y_t sogar quadratisch mit T. Der drift-Term dominiert in der Konvergenz der Varianz.

Demgegenüber konvergiert die Varianz einer $I\,(0)$-Variablen wie z. B.

$$y_t - \lambda y_{t-1} = \varepsilon_t \text{ mit } 0 < \lambda < 1$$

wegen $y_t = y_o \lambda^t + \sum_{i=1}^{t} \lambda^i \varepsilon_{t-1}$ gegen die Konstante $\sigma^2/(1-\lambda^2)$.

Es ist diese Trendabhängigkeit der Momente der integrierten Variablen (der Variablen mit stochastischem Trend), die die Schätzeigenschaften der KQ-Methode im SEM der integrierten Variablen bestimmt.

2.2.2. *Test auf Integrationsgrad*

Es bleibt die Frage, wie die Ordnung der Integration festgestellt werden kann. Dieses Problem wurde zuerst von *Fuller* 1976 und *Dickey / Fuller* 1979 gelöst. Ausgangspunkt ihrer Lösung ist eine univariate AR-Darstellung mit konstantem μ und deterministischem Trend

$$y_t = \mu + \beta t + \sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-1} + \varepsilon_t$$

bzw. die bereits beim ECM behandelte Reparametrisierung

$$\Delta y_t = \mu + (\bar{a}_o - 1) y_{t-1} + \beta t + \sum_{i=1}^{p-1} \bar{a}_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \text{ mit } \bar{a}_i = \sum_{i=j+1}^{p} a_j.$$

Durch geeignete Wahl von p kann im allgemeinen erreicht werden, daß ε_t ein weißes Rauschen ist. Der KQ-Schätzer für $(\bar{a}_o - 1)$ ist zwar superkonsistent aber asymptotisch nicht normalverteilt. Er besitzt asymptotisch eine nichtstandard Dickey-Fuller-Verteilung, die stark linkssteil ist. Die Verteilung der zugehörigen Teststatistik $t = (\hat{\bar{\alpha}}_o - 1)/\hat{\sigma}_{\hat{\bar{a}}_o}$ unter H_o: $\bar{a}_o = 1$ ist von p

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

unabhängig und in *Fuller* 1976 tabelliert (Tabelle 8.5.1). Es ist dies der sogenannte „Augmented Dickey-Fuller-Test" (ADF-Test). *Dickey / Fuller* 1981 haben auch die Verteilungen der Teststatistiken t_μ und t_β unter der Hypothese H_o: $\mu = \beta = 0$, $\bar{a}_o = 1$ mit Hilfe von Monte-Carlo-Studien ermittelt (S. 1062). Ferner haben sie die Verteilungen der F-Statistiken unter den Hypothesen

a) H_o: $\beta = 0, \bar{a}_o = 1$

b) H_o: $\mu = \beta = 0, \bar{a}_o = 1$ und

c) H_o: $\mu = 0, \bar{a}_o = 1$

tabelliert (S. 1063).

Eine alternative Teststatistik unter der Annahme heterogener Residuen geht auf *Phillips / Perron* 1988 zurück und besitzt asymptotisch die gleichen bei Dickey und Fuller angegebenen kritischen Werte.

Die Gründe für diese Nichtstandard-Eigenschaften der KQ-Schätzer bei integrierten Variablen liegen darin, daß wegen der Persistenz stochastischer Schocks die Momente integrierter Variablen nicht gegen eine Konstante sondern gegen eine Zufallsvariable konvergieren. Diese Eigenschaften der KQ-Schätzer sollen im folgenden Abschnitt behandelt werden.

2.3. Regressionstheorie bei integrierten Variablen

Wir gehen zunächst davon aus, daß die Variablen y_t und x_t des ECM in der Gleichung (6) sämtlich integriert vom Grade eins d.h. $I(1)$ und ohne drift sind. Das ECM enthält sowohl die $I(1)$-Variablen y_{t-1} und x_{t-1} als auch die $I(0)$-Variablen Δy_{t-1}, Δx_{t-1} sowie die ebenfalls stationäre Störgröße u_t. Wir betrachten zur Vereinfachung zunächst den KQ-Schätzer $\hat{\beta}$ einer Einfachregression zwischen den Variablen y_t und x_t

$$y_t = \beta x_t + u_t, \text{ d.h.}$$
$$\hat{\beta} - \beta = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} x_t u_t / T^{-1} \sum_{t=1}^{T} x_t^2$$

Park / Phillips 1988, 1989 haben gezeigt, daß die asymptotischen Eigenschaften dieses KQ-Schätzers davon abhängen, wie die Momente $\frac{1}{T} \Sigma x_t u_t$ und $\frac{1}{T} \Sigma x_t^2$ konvergieren (vgl. auch *Pagan / Wickens* 1989):

1. Sind x_t und u_t stationär ($I(0)$), so konvergieren die Momente gegen ihren Ewartungswert M_{xu} bzw. M_{xx}. $\hat{\beta}$ ist konsistent, wenn $T^{-1} \Sigma x_t u_t$ gegen null ($M_{xu} = 0$) konvergiert. Dies ist nur dann der Fall, wenn Regressoren

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

und Störgröße unkorreliert sind. Anderenfalls ergibt sich bekanntlich ein „simultaneous equation-bias". Ist $\hat{\beta}$ konsistent, so gilt auch der zentrale Grenzwertsatz, d.h. $\hat{\beta}$ ist asymptotisch normalverteilt.

$$\sqrt{T}\,(\hat{\beta}-\beta) \xrightarrow{d} NV(0,\sigma_{\hat{\beta}}^2)$$

2. Ist x_t jedoch eine $I(1)$-Variable ohne drift und u_t $I(0)$, so konvergiert $T^{-1}\Sigma x_t^2$ nicht. Stattdessen konvergiert $T^{-2}\sum_{t=1}^{T} x_t^2$ gegen eine Zufallsvariable, wähend das Produkt der $I(1)$-Variablen x und der $I(0)$-Variablen u zwar eine $I(1)$-Variable ist, deren Moment $T^{-1}\sum_{t=1}^{T} x_t u_t$ aber mit T^{-1} gegen eine Zufallsvariable konvergiert.

   Folglich gilt

$$\hat{\beta}-\beta = T^{-1}[T^{-1}\Sigma x_t u_t]/T^{-2}\Sigma x_t^2 \to 0$$

   $\hat{\beta}-\beta$ konvergiert in jedem Fall gegen null, selbst wenn $T^{-1}\Sigma x_t u_t$ nicht gegen null sondern gegen eine Zufallsvariable konvergiert. Dies ist die Eigenschaft der *Superkonsistenz der KQ-Schätzer* für integrierte Variable. Im Fall integrierter Regressoren ergibt sich aus einer Korrelation zwischen Regressor und Störgröße also kein „simultaneous equation bias." Diese Superkonsistenz beruht auf der höheren Konvergenzrate der Momente der integrierten Variablen (mit T^{-2}) relativ zur Konvergenzrate der Momente, die die stationären Störgrößen enthalten (mit T^{-1}).

   Im Gegensatz zur traditionellen asymptotischen Theorie konvergieren die Momente der $I(1)$-Variablen nicht gegen einen konstanten Wert sondern gegen eine Zufallsvariable, weil bei einer „random walk"-Komponente vergangene Schocks nicht abgebaut werden. $\hat{\beta}$ besitzt daher keine Standardverteilung.

3. Eine Ausnahme bildet ein random walk mit drift (mit deterministischem Trend). In diesem Fall dominiert langfristig der strikt exogene deterministische Trend den random walk (*West* 1988), so daß sogar die Momente $T^{-2}(T^{-1}\Sigma x_t^2)$ gegen eine Konstante und die Momente $\sqrt{T}\,(T^{-1}\Sigma x_t u_t)$ gegen eine normalverteilte Zufallsvariable konvergieren. Folglich ist der KQ-Schätzer für β in diesem Fall asymptotisch normalverteilt. Die asymptotische Verteilung des KQ-Schätzers ändert sich demnach nur, wenn die Regressorvariable x_t eine random-walk-Komponente *ohne drift* besitzt.

4. Betrachten wir nun eine Regressionsgleichung, die neben einer $I(1)$-Variablen x_t (ohne drift) eine $I(0)$-Variable Δx_t enthält

$$y_t = \beta x_t + \gamma \Delta x_t + u_t.$$

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Wir gehen von den Normalgleichungen der KQ-Schätzung aus

$$(\hat{\beta}-\beta)\ \frac{1}{T}\ \Sigma x_t^2 + (\hat{\gamma}-\gamma)\ \frac{1}{T}\ \Sigma x_t \Delta x_t\ = \frac{1}{T}\ \Sigma x_t u_t$$

$$(\hat{\beta}-\beta)\ \frac{1}{T}\ \Sigma x_t \Delta x_t + (\hat{\gamma}-\gamma)\ \frac{1}{T}\ \Sigma \Delta x_t^2\ = \frac{1}{T}\ \Sigma \Delta x_t u_t.$$

a) Nach der Multiplikation der 1. Gleichung mit T^{-1} konvergiert mit $T \to \infty$ der 2. Summand auf der linken Seite gegen null, so daß die 1. Gleichung den Koeffizienten der integrierten Variablen unabhängig von dem der stationären Variablen bestimmt (siehe die Einfachregression zwischen y und x weiter oben). $T(\hat{\beta}-\beta)$ besitzt aber asymptotisch keine Standardverteilung, sofern die Variable x_t eine random walk-Komponente *ohne drift* besitzt, *mit drift* ist $T^{1/2}[T(\hat{\beta}-\beta)]$ normalverteilt.

b) Multiplizieren wir die 2. Gleichung mit $T^{1/2}$, so konvergiert $T^{-1/2}\left(\frac{1}{T}\Sigma x_t \Delta x_t\right) T(\hat{\beta}-\beta)$ gegen null, wenn $T(\hat{\beta}-\beta)$ gegen eine Zufallsvariable konvergiert. Es bleibt lediglich

$$T^{1/2}(\hat{\gamma}-\gamma) = \left(\frac{1}{T}\ \Sigma \Delta x_t \Delta x_t\right)^{-1} \cdot T^{1/2}\left(\frac{1}{T}\ \Sigma\ \Delta x_t u_t\right).$$

Der 1. Ausdruck auf der rechten Seite konvergiert gegen eine Konstante, der 2. Ausdruck gegen eine normalverteilte Zufallsvariable, so daß $T^{1/2}(\hat{\gamma}-\gamma)$ unabhängig von $T(\hat{\beta}-\beta)$ gegen eine normalverteilte Zufallsvariable konvergiert. Die Parameter der $I(0)$-Variablen haben dieselbe Grenzverteilung unabhängig davon, ob in der Regressionsgleichung $I(1)$-Variable vorkommen oder nicht.

Dieses Ergebnis gilt entsprechend für das ECM, das lediglich mehr als einen $I(1)$-Regressor und mehr als einen $I(0)$-Regressor enthält.

c) Bei zusätzlichen $I(1)$-Regressoren, die einem random walk *mit drift* folgen, sind die Koeffizienten $T^{3/2}(\hat{\beta}_i - \beta_i)$ jedoch nicht länger asymptotisch normalverteilt. Der Grund dafür ist einfach: Durch den deterministischen Trend ist nur ein Parameter schätzbar (identifiziert). Nehmen wir an, daß

$$x_{1t} = \mu_1 t + \tilde{x}_{1t} \text{ und } x_{2t} = \mu_2 t + \tilde{x}_{2t},$$

wobei $\tilde{x}_{it}$ random walks ohne drift sind. Die Regressionsgleichung

$$y_t = x_{1t}\beta_1 + x_{2t}\beta_2 + u_t$$

kann durch Einsetzen von x_{1t} und x_{2t} als

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

$$y_t = (\mu_1\beta_1 + \mu_2\beta_2)t + \beta_1\tilde{x}_{2t} + \beta_2\tilde{x}_{2t} + u_t$$

geschrieben werden. Der deterministische Trend identifiziert lediglich die Linearkombination $\mu_1\beta_1 + \mu_2\beta_2$. Die Parameter β_1 und β_2 sind daher nur aus den random walk-Komponenten ohne drift schätzbar. Die asymptotische Verteilung der KQ-Schätzer ist daher keine Standardverteilung wie unter 2. Dieses Ergebnis gilt auch bei nur einem $I(1)$-Regressor mit drift, wenn die Regressionsgleichung eine Trendvariable enthält, da diese Trendvariable eine Trendbereinigung aller Variablen bewirkt und damit zu $I(1)$-Regressoren ohne drift führt.

Diese Fallunterscheidungen zeigen, daß dem Integrationsgrad der Regressoren für die Anwendbarkeit klassischer Teststatistiken große Bedeutung zukommt.

2.4. Dynamische Systeme mit Cointegration

2.4.1 Stabilitätseigenschaften des Systems

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist das Gleichungssystem (6)

$$A^*(L)\Delta\tilde{y}_t = -A(1)\tilde{y}_{t-1} + \varepsilon_t \tag{6}$$

Wir nehmen an, daß die Variablen $\tilde{y}_t' = (y_t', x_t')$ integriert vom Grade eins, die Variablen $\Delta\tilde{y}_t$ stationär sind, ε ein weißes Rauschen ist und das Modell (6) diese Daten erzeugt hat. Wir nehmen ferner an, daß die Nichtstationarität der Niveauvariablen $\tilde{y}_t$ aus k Einheitswurzeln im System resultiert, d.h. aus einem reduzierten Rang der Matrix $A(1)$. Die Matrix $A(1)$ hat bei $g + k$ Gleichungen in (6) den Rang g, d.h. es existieren nur g stabile Differenzengleichungen in den Niveauvariablen $\tilde{y}_t$ und daher auch nur g langfristige Gleichgewichtsbeziehungen (Cointegrationsbeziehungen)

$$A(1)\tilde{y}_t = 0 \tag{5}$$

zwischen den $g + k$ Variablen in $\tilde{y}_t$. Diese Beziehungen zwischen den Niveauvariablen bestimmen nur g Variable, k Variable müssen als *exogen* angesehen werden. Exogen heißt hier lediglich, daß k Variable nicht durch das System (5) determiniert sind, es wird also keiner der zuvor definierten *statistischen* Exogenitätsbegriffe verwendet. Diese exogenen Variablen x_t importieren unabhängige stochastische Trends in das System (6) (*Park* 1990). Die Auswahl der exogenen Variablen ist dabei nicht eindeutig, d.h. es können k beliebige Variable aus $\tilde{y}_t$ als exogen ausgewählt werden, sofern sie nicht selbst cointegriert sind, d.h. eine Linearkombination dieser Variablen stationär ist.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Besitzt $A(1)$ k Einheitswurzeln, so existiert ein stabiles Subsystem mit k exogenen Variablen wie das SEM der Gleichung (1)

$$B(L)y_t = C(L)x_t + u_t \tag{1}$$

bzw. das als „Error-Correction"-Modell (ECM) reparametrisierte SEM (1b).

$$B^*(L)\Delta y_t = -B(1)y_{t-1} + C(1)x_{t-1} + C^*(L)\Delta x_t + u_t \tag{1b}$$

Für unser Beispiel ergibt sich das folgende System (1b):

$$\begin{aligned} \Delta y_{1t} &= b_{12}^0 \Delta y_{2t} + c_{11}^0 \Delta x_{1t} + \bar{b}_{11} y_{1t-1} + \bar{b}_{12} y_{2t-1} + \bar{c}_{11} x_{1t-1} + u_{1t} \\ \Delta y_{2t} &= b_{21}^0 \Delta y_{1t} + c_{22}^0 \Delta x_{2t} + \bar{b}_{21} y_{1t-1} + \bar{b}_{22} y_{2t-1} + \bar{c}_{22} x_{2t-1} + u_{2t} \end{aligned} \tag{1b}$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} 1 & -b_{12}^0 \\ -b_{21}^0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_{1t} \\ \Delta y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^0 & 0 \\ 0 & c_{22}^0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_{1t} \\ \Delta x_{2t} \end{pmatrix} + \tag{1b}$$

$$+ \begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} \\ \bar{b}_{21} & \bar{b}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{c}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{1t-1} \\ x_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

mit $\bar{b}_{ij} = b_{ij}^0 + b_{ij}^1 \forall i, j$ und $b_{ii}^0 = -1 \forall i$
sowie $\bar{c}_{ij} = c_{ij}^0 + c_{ij}^1 \forall i, j$.

Bei beliebiger Lagordnung (p) enthält das ECM noch Teilsysteme in den differenzierten Variablen mit größerer Verzögerung $(\Delta y_{t-1}, \Delta x_{t-1}), \ldots, (\Delta y_{t-p-1}, \Delta x_{t-p-1})$. Dadurch ändert sich nichts an den folgenden Überlegungen.

Als Ergebnis der Reparametrisierung des Modells (1a) als Error-Correction-Modell erhalten wir ein Modell (1b), das aus zwei simultanen Gleichungssystemen (SEM) besteht, nämlich

1. einem SEM in differenzierten (stationären) Variablen und
2. einem SEM in trendbehafteten (integrierten) Niveauvariablen.

Die Koeffizienten-Matrizen der Niveauvariablen erhält man auch, wenn der Lagoperator in (1a) $L = 1$ gesetzt wird. Die Parameter-Matrizen $B(1)$, $C(1)$ der Niveauvariablen y_{t-1} und x_{t-1} lassen sich so zerlegen, daß die Strukturparameter Γ, Θ der statischen Gleichungen (7) explizit auftreten.

$$\Gamma y_t - \Theta x_t = 0 \tag{7}$$

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Dazu zerlegen wir $[B(1), C(1)]$ gemäß (8)

$$[B(1), C(1)] = \operatorname{diag} B(1) \cdot [\Gamma, -\Theta] \tag{8}$$

bzw. in unserem Beispiel gemäß (8a):

$$\begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} \cdot & \bar{c}_{11} & 0 \\ & \cdot & & \\ \bar{b}_{21} & \bar{b}_{22} \cdot & 0 & \bar{c}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{b}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{12} \cdot & -\theta_{11} & 0 \\ & \cdot & & \\ \gamma_{21} & 1 \cdot & 0 & -\theta_{22} \end{bmatrix} \tag{8a}$$

mit $\gamma_{12} = \bar{b}_{12}/\bar{b}_{11}$; $\gamma_{22} = \bar{b}_{21}/\bar{b}_{22}$; $\theta_{11} = -\bar{c}_{11}/\bar{b}_{11}$ und $\theta_{22} = -\bar{c}_{22}/\bar{b}_{22}$.

Das ECM der y-Gleichungen (1b) kann als (1c) geschrieben werden.

$$B^*(L)\Delta y_t = \operatorname{diag} B(1)[\Gamma y_{t-1} - \Theta x_{t-1}] + C^*(L)\Delta x_t + u_t \tag{1c}$$

Im Beispiel lautet (1c) wie folgt:

$$\begin{aligned} \Delta y_{1t} &= \bar{b}_{11}(y_{1t-1} + \gamma_{12} y_{2t-1} - \theta_{11} x_{1t-1}) + b_{12}^0 \Delta y_{2t} + c_{11}^0 \Delta x_{1t} + u_{1t} \\ \Delta y_{2t} &= \bar{b}_{22}(y_{2t-1} + \gamma_{21} y_{1t-1} - \theta_{22} x_{2t-1}) + b_{21}^0 \Delta y_{1t} + c_{22}^0 \Delta x_{2t} + u_{2t}. \end{aligned} \tag{1c}$$

Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt jeweils die Abweichungen in den *langfristigen strukturellen Relationen* zwischen den Variablen gemäß (8), da im Gleichgewicht die differenzierten Variablen $\Delta y_t = \Delta x_t = 0$ sind.

Wir bezeichnen diese Darstellung als *strukturelle Form* des ECM. Daneben kann man das ECM in den Variablen y_t auch in *reduzierter Form* schreiben.

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \operatorname{diag} B(1)\Gamma[y_{t-1} - \Pi x_{t-1}] + \Pi^0(L)\Delta x_t + v_t \\ &= B(1)[y_{t-1} - \Pi x_{t-1}] + \Pi^0(L)\Delta x_t + v_t \\ \text{mit } \Pi &= \Gamma^{-1}\Theta = B(1)^{-1}C(1) \qquad \text{und } \Pi^0(L) = B^*(L)^{-1}C^*(L) \end{aligned} \tag{1d}$$

Im Beispiel ergibt sich (1d) wie folgt:

$$\begin{aligned} \Delta y_{1t} &= \bar{b}_{11}(y_{1t-1} - \Pi_{11} x_{1t-1} - \Pi_{12} x_{2t-1}) \\ &\quad + \bar{b}_{12}(y_{2t-1} - \Pi_{21} x_{1t-1} - \Pi_{22} x_{2t-1}) + \Pi_{11}^0 \Delta x_{1t} + \Pi_{12}^0 \Delta x_{2t} + v_{1t} \\ \Delta y_{2t} &= \bar{b}_{21}(y_{1t-1} - \Pi_{11} x_{1t-1} - \Pi_{12} x_{2t-1}) \\ &\quad + \bar{b}_{22}(y_{2t-1} - \Pi_{21} x_{1t-1} - \Pi_{22} x_{2t-1}) + \Pi_{21}^0 \Delta x_{1t} + \Pi_{22}^0 \Delta x_{2t} + v_{2t} \end{aligned} \tag{1d}$$

$$\text{mit } \Pi = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\theta_{11} & 0 \\ 0 & -\theta_{22} \end{bmatrix} \text{ und } \Pi^0 = \begin{bmatrix} 1 & -b_{12}^0 \\ -b_{21}^0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_{11}^0 & 0 \\ 0 & c_{22}^0 \end{bmatrix}.$$

Die Ausdrücke in Klammern geben die Einflüsse der Gleichgewichtsfehler in y_1 und y_2 in $(t-1)$ auf Δy_1 bzw. Δy_2 wieder, während die Einflüsse neuer

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Schocks in den exogenen Variablen durch die Koeffizienten Π_{ij}^{0} gemessen werden.

Läßt man noch zu, daß es in (1) bzw. (1 b) auch instabile Gleichungen gibt, d.h. B (1) nicht den vollen Rang hat, so läßt sich das System durch Auswahl weiterer exogener Variablen stets auf ein kleineres stabiles Subsystem der Form (1 b) reduzieren. Hat z.B. die Matrix B (1) einen auf $(g-1)$ reduzierten Rang, so kann *eine* der endogenen I (1)-Variablen den exogenen Variablen x_t zugeschlagen wergen (*Park* 1990). Zerlegen wir die Matrix B (1) dann analog zu (8)

$$B(1) = \operatorname{diag}(B(1)) \cdot \Gamma \tag{8*}$$

bzw. im Beispiel analog zu (8 a),

$$\begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} \\ \bar{b}_{21} & \bar{b}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{b}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & 1 \end{bmatrix} \tag{8a*}$$

so wird deutlich, daß eine Rangreduktion von B (1)

a) entweder auf einem reduzierten Rang von

diag (B (1)), d.h. $\bar{b}_{11} = 0$ bzw. $\bar{b}_{22} = 0$ oder

b) auf einem reduzierten Rang von Γ beruht.

Der Fall (a) kann als *dynamische Instabilität* angesehen werden, d.h. eine der Gleichungen enthält einen random walk mit der Folge, daß diese zugehörige Variable als *exogen* anzusehen ist und diese Gleichung keine Gleichgewichtsbeziehung definiert.

Der Fall (b) ist der Fall einer *„klassischen" Instabilität* des ökonomischen Systems, die z.B. entsteht, wenn die Angebotsfunktion in Abhängigkeit des Preises stärker negativ geneigt ist als die Nachfragefunktion oder das Modell eine überzählige Gleichung enthält. Eine Einheitswurzel in der Matrix Γ ist daher häufig als Fehlspezifikation anzusehen.

Demgegenüber hält die neuere Wirtschaftstheorie instabile Modelle z.B. für den Arbeitsmarkt aus der Insider-Outsider-Theorie als durchaus möglich und sinnvoll. Im Ergebnis ist die Suche nach stationären linearen Beziehungen zwischen den Niveauvariablen (nach Cointegrationsbeziehungen) die alte Suche nach ökonomisch gehaltvollen stabilen (stationären) Beziehungen für einen reduzierten Satz von Variablen.

Besitzt A (1) in Gleichung (6) k Einheitswurzeln, so läßt sich A (1) alternativ wie folgt zerlegen (vgl. *Engle / Granger* 1987)

$$A(1) = \gamma\alpha' \tag{10}$$

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

wobei α und $\gamma \times (g + k) \times g$-Matrizen sind. Die Matrix α enthält die sogenannten Cointegrationsvektoren und γ die Ladungskoeffizienten, die den Einfluß der Cointegrationsvektoren auf die Variablen in $\Delta \tilde{y}_t$ gemäß (6) angeben.

$$A^*(L)\Delta\tilde{y}_t = -\gamma\alpha'\tilde{y}_{t-1} + \varepsilon_t \tag{6}$$

Diese in der Cointegrationstheorie übliche Zerlegung von A (1) (vgl. *Engle / Granger* 1987, *Johansen* 1988) zerlegt A (1) nicht in wohl identifizierte Parameter, da aus $(g + k)^2$ Parametern in A (1) nicht in jedem Fall $2 \times (g + k) \times g$ Parameter in α und γ bestimmt werden können. Eine Identifikation setzt Restriktionen insbesondere auf die Ladungskoeffizienten γ voraus. Eine solche Restriktion unterstellt, daß in einer Partitionierung von $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ gemäß der Partitionierung $\tilde{y}_t = (y_t, x_t)$ $\gamma_2 = 0$ gilt (*Park* 1990), d.h. die zuvor als exogen klassifizierten Variablen sind von den Cointegrationsbeziehungen unabhängig. *Park* 1990 zeigt, daß die exogenen Variablen x_t unter dieser Bedingung *schwach exogen* im Sinne von *Engle / Hendry / Richard* 1983 bezüglich der Parameter Π

$$y_t = \Pi x_t \qquad \text{mit } \Pi = B(1)^{-1}C(1)$$

sind. Es ist diese Bedingung, die aus dem VAR-Modell (5) mit k Einheitswurzeln ein interdependentes Gleichungssystem SEM gemäß Gleichung (1) macht. In der obigen Zerlegung ist dann $\gamma_1 = B(1)$ und $\alpha = (I, -\Pi)$. Die Frage nach der Zahl der Cointegrationsbeziehungen in (5), d.h. nach dem Rang der Matrix A (1) ist insofern eine der Schätzung eines SEM vorgelagerte Analyse.

Gegenüber der klassischen Ökonometrie fragt man, woraus die I (1)-Eigenschaft vieler ökonomischer Zeitreihen resultiert und welche Variablen als schwach exogen angesehen werden sollen. Neu sind außerdem die zugehörigen Tests auf Cointegration und die Schätzverfahren für EC-Modelle mit I (1)-Variablen, die im folgenden Abschnitt dargestellt werden sollen.

Es sind diese Cointegrationsbeziehungen, die dazu führen, daß im ECM nur stationäre Variablen auftreten. Da auf der linken Seite des ECM ausschließlich stationäre Variablen auftreten, werden die Störgrößen u_t nur dann stationär sein, wenn die Linearkombinationen der integrierten Variablen auch stationär sind. Das ECM wird daher auch als *Stationarität erzeugende Transformation des Modells* bezeichnet. Man testet auf Stationarität dieser Linearkombinationen (Cointegrationstest) oder auf Stationarität der Störgrößen u_t des ECM. Sind die Linearkombinationen der integrierten Variablen nichtstationär, so können auch die Störgrößen nicht stationär sein. Eine Stationarität der Störgrößen muß aber als Mindestanforderung für eine sinnvolle Spezifikation angesehen werden. Man kann nichtstationäre Störgrößen als Hinweis darauf deuten, daß bestimmte integrierte

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Variablen vergessen wurden und insofern den Cointegrationstest als Fehlspezifikationstest ansehen (*Hansen* 1988, *Pagan / Wickens* 1989).

2.4.2. *Cointegrations- und Exogenitätstests*

a) Cointegrationstests anhand einzelner Gleichungen

Es gibt alternative Verfahren um zu prüfen, ob die integrierten Variablen cointegriert sind. Die einfachsten Tests machen von der bereits oben erläuterten Tatsache Gebrauch, daß (asymptotisch) die Koeffizienten der $I(1)$-Variablen unabhängig von den Koeffizienten der $I(0)$-Variablen geschätzt werden können, und untersuchen die Residuen der statischen Regressionen zwischen den Niveauvariablen auf Stationarität.

$$B(1)y_t = C(1)x_t + u_t \qquad \text{bzw. } y_t = B(1)^{-1}C(1)x_t + v_t$$

Dabei unterscheiden sich diese Regressionen in der Wahl der abhängigen Variablen (Normierung). Diese Wahl ist ohne die Annahme einer *schwachen* Exogenität für die x-Variablen nicht eindeutig.

Der einfachste Test bei gegebener Normierung geht auf *Sargan / Bhargawa* 1983 zurück und testet mittels Durbin-Watson-Statistik der Residuen der Cointegrationsregression in der AR (1)-Regression

$$\hat{u}_t = \delta \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t,$$

ob die Hypothese H_o: $\delta = 1$ angenommen werden kann. Die Hypothese wird für Werte der DW-Statistik nahe null angenommen. Exakte kritische Werte für diesen CRDW-Test unter der Annahme normalverteilter Störgrößen wurden von Sargan / Bhargawa 1983 abgeleitet.

Alternativ kann man den bereits erläuterten Augmented-Dickey-Fuller-Test zur Bestimmung des Integrationsgrades der Zeitreihen auf die Residuen der Cointegrationsregression anwenden. Engle / Granger 1987 haben anhand von Monte-Carlo-Experimenten gezeigt, daß dieser Test auf der Basis der von Dickey und Fuller konstruierten kritischen Werte für die t-Statistik bessere Ergebnisse als der CRDW-Test liefert, der die H_o-Hypothese zu häufig ablehnt.

b) Cointegrationstest von Johansen anhand des ECM-Systems

Wie bereits erwähnt, folgt aus k Einheitswurzeln im System (6), daß in diesem System k exogene Variable enthalten sind, die unabhängige stochastische Trends in das System importieren, d.h. diese k Variablen sind nicht

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

durch stationäre Differenzengleichungen in den Niveaus, sondern nur durch stationäre Differenzengleichungen in ersten Differenzen darstellbar.

Aufgabe der Cointegrationstests ist es, zunächst den (Cointegrations-) Rang der Matrix $A(1)$ und damit die Anzahl der unabhängigen stochastischen Trends (der exogenen Variablen) des Systems zu bestimmen. Das für diese Fragestellung bestgeeignete Verfahren ist beim derzeitigen Stand der Diskussion das Maximum-Likelihood-Verfahren von *Johansen* (1988). Das Johansen-Verfahren geht von der KQ-Schätzung von $A(1)$ des ECM der Gleichung (6) aus. Ist p die Laglänge des ECM, so ist dies der KQ-Schätzer der Gleichung (6a).

(6a) $$\Delta \hat{Y} = A(1)' \hat{Y}_{-1} + U$$

d.h. $$\hat{A}(1)' = (\hat{Y}_{-1}' \hat{Y}_{-1})^{-1} \hat{Y}_{-1}' \Delta \hat{Y}.$$

Dabei sind

$$\Delta \hat{Y} = [I_T - \Delta \tilde{Y}^{*\prime} (\Delta \tilde{Y}^{*\prime} \Delta \tilde{Y}^{*})^{-1} \Delta \tilde{Y}^{*}] \Delta \tilde{Y}$$

und

$$\hat{Y}_{-1} = [I_T - \Delta \tilde{Y}^{*\prime} (\tilde{Y}^{*\prime} \Delta \tilde{Y}^{*})^{-1} \Delta \tilde{Y}^{*}] \tilde{Y}_{-1}$$

mit

$$\Delta \tilde{Y}^{*} = (\Delta \tilde{Y}_{-1}, \Delta \tilde{Y}_{-2}, \ldots, \Delta \tilde{Y}_{-p})$$

die Residuen einer Regression von $\Delta \tilde{Y}$ bzw. $\tilde{Y}_{-1}$ auf die differenzierten Variablen $\Delta \tilde{Y}^{*}$.

Man berechnet dann die Eigenwerte λ_i der Matrix der (multiplen) Bestimmtheitsmaße der Gleichung (6a), d.h. die Eigenwerte von

$$(\Delta \hat{Y}' \Delta \hat{Y})^{-1} \hat{A}(1)' \hat{Y}_{-1}' \hat{Y}_{-1} \hat{A}(1).$$

Man kann zeigen, daß dabei $\sqrt{\lambda_i}$ die Eigenwerte der Matrix $\hat{A}(1)$ sind (*Theil* 1970, 319f.; *Reinsel / Ahn* 1980, 9). Diese Berechnung der Eigenwerte λ_i gewährleistet, daß sämtliche Eigenwerte positiv sind. Die zu λ_i $(i = 1, \ldots, (g+k))$ gehörigen Eigenvektoren sind die Cointegrationsvektoren $\hat{\alpha}$. Für gegebenes $\hat{\alpha}$ erhält man die Ladungskoeffizienten $\hat{\gamma}$ aus

$$\hat{\gamma} = \Delta \hat{Y}' \hat{Y}_{-1} \hat{\alpha}.$$

Die Schätzer von $\hat{\alpha}$ und $\hat{\gamma}$ sind Matrizen der Ordnung $(g+k) \times (g+k)$.

Setzt man die nichtsignifikanten k Eigenwerte gleich null und streicht die zugehörigen letzten k Spalten von $\hat{\gamma}$ und Zeilen von $\hat{\alpha}$, so ist dies eine Schätzung bei reduziertem Rang von $\hat{A}(1)$. Man zerlegt die $(g+k) \times (g+k)$ Matrix $\hat{A}(1)$ dann in zwei $(g+k) \times g$-Teilmatrizen $\hat{\gamma}$ und $\hat{\alpha}$, so daß

$$\hat{A}(1) = \hat{\gamma} \hat{\alpha}'$$

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

gilt. Die Teststatistik des Likelihood-Verhältnis-Tests auf k Einheitswurzeln (bzw. g Cointegrationsvektoren), d.h. darauf, daß die k kleinsten Eigenwerte von $\hat{A}$ (1) gleich null sind, lautet

$$- T \sum_{i=1}^{k} \ln(1 - \lambda_{g+i}) \qquad \text{mit } \lambda_{g+1} > \lambda_{g+2} > \ldots > \lambda_{g+k}.$$

Johansen 1988 hat gezeigt, daß diese Teststatistik asymptotisch eine degenerierte Verteilung besitzt, nämlich $tr \left\{ \int_o^1 dBB' \left[\int_o^1 BB' du \right]^{-1} \int_o^1 BdB' \right\}$, wobei B ein k-dimensionaler Prozeß Brownscher Bewegung ist. Die Quantile dieser Verteilung für einen Brownschen Prozeß mit Kovarianzmatrix I findet man bei *Johansen* 1988 und bei *Reinsel / Ahn* 1988.

Nehmen wir an, der Cointegrationsrang von A (1) aufgrund dieses Tests sei g, d.h. k Variable sind exogen. Es gilt dann, diese k exogenen Variablen zu identifizieren.

c) Exogenitätstest anhand von $\hat{\gamma}$

Mosconi / Giannini 1990 haben dazu u.a. einen Test vorgeschlagen, der die Matrix $\hat{A}$ (1) in eine obere blocktriangulare Matrix zerlegt

$$A^*(L)\Delta\tilde{y}_t = -A(1)\tilde{y}_{t-1} + \varepsilon_t = - \begin{bmatrix} A_{11}(1) & A_{12}(1) \\ A_{21}(1) & A_{22}(1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

und dann die Restriktion $A_{21}(1) = 0$ testet.

Mosconi und Giannini testen eigentlich auf Granger-Nichtkausalität, d.h. sie unterstellen zusätzlich eine entsprechende Restriktion auf die Matrix der differenzierten Variablen $A^*(L)$.

Da $A(1) = \gamma\alpha'$ gilt, können γ und α' entsprechend der Partitionierung von $y_t = (y_t, x_t)$ partitioniert werden, d.h.

$$A(1) = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} (\alpha_1' \ \alpha_2') = \begin{bmatrix} \gamma_1\alpha_1' & \gamma_1\alpha_1' \\ \gamma_2\alpha_1' & \gamma_2\alpha_2' \end{bmatrix} \tag{10a}$$

mit γ_2 als $(k \times g)$-Matrix und α_1 als $(g \times g)$-Matrix. Ein Test der Restriktion $A_{21}(1) = 0$ ist identisch mit einem Test der Hypothese

$$H_o: \gamma_2 = 0 \qquad oder \ H_o: \alpha_1 = 0 \qquad oder \ H_o: \gamma_2 = \alpha_1 = 0.$$

Die Hypothese $\alpha_1 = 0$ besagt, daß die endogenen Variablen nicht in den Cointegrationsbeziehungen vorkommen. Dies kann aufgrund ökonomischer

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Erwägungen von vornherein ausgeschlossen werden. Wir können bezüglich α zwei sinnvolle Fälle unterscheiden, nämlich

a) $\alpha_1' = I_g$ und $\alpha_2' = -\Pi$ voll besetzt.

b) α_1' und α_2' besitzen identifizierende Nullrestriktionen und α_1 eine Normierung z.B. der Diagonalelemente auf eins.

Im Fall (a) sind die Cointegrationsvektoren als Parameter der reduzierten Form des stabilen Subsystems zu verstehen.

Im Fall (b) sind die Cointegrationsparameter bei ausreichender Zahl der Restriktionen als wohl identifizierte Parameter der strukturellen Form des stabilen Subsystems zu verstehen (vgl. *Park* 1990).

Die Hypothese $H_o: \gamma_2 = 0$ bedeutet, daß in den Gleichungen der exogenen Variablen x_t die Cointegrationsbeziehungen nicht vorkommen. Die Variablen x_t sind dann *schwach exogen* im Sinne von *Engle / Hendry / Richard* 1983, d.h. die den Ökonomen interessierenden Parameter α können allein anhand der bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(y_t \mid x_t)$ des stabilen Subsystems geschätzt werden (*Park* 1990). Die Hypothese $\gamma_2 = 0$ oktroyiert also eine Kausalstruktur.

Um es noch deutlicher zu formulieren: Unter der Bedingung, daß die $(g+k) \times (g+k)$-Matrix $A(1)$ den Rang g hat, muß es k exogene Variablen x_t geben, die unabhängige, stochastische Trends in das System importieren.

Die Frage lautet lediglich, welche der $(g+k)$-Variablen des Systems exogen sind, d.h. für welche Variablen diese Annahme am ehesten erfüllt ist. Der traditionelle Ökonometriker wird diese Frage unter Verwendung seiner wirtschaftstheoretischen und institutionellen Kenntnisse a priori entscheiden. Der Zeitreihenanalytiker möchte diese Frage anhand statistischer Tests entscheiden, indem er die Signifikanz der Elemente von $\hat{\gamma}$ bzw. von $\hat{A}(1)$ analysiert.

d) Ein alternativer Test auf schwache Exogenität

Da die Koeffizienten $\gamma\alpha'$ des Johansen-Verfahrens bis auf Spezialfälle keine identifizierbaren Parameter sind, kann man sich bei der Suche nach den schwach exogenen Variablen auch anderer Parametrisierungen des ECM bedienen, wie wir sie weiter oben dargestellt haben.

In der Zerlegung

$$A(1) = \operatorname{diag} A(1) \cdot [\Gamma, -\Theta]$$

sind die exogenen Variablen dadurch gekennzeichnet, daß die Elemente in diag $A(1)$ dieser Variablen statistisch nicht signifikant sind (vgl. *Hansen* 1991). Für die Gleichungen dieser Variablen sind die entsprechenden Zeilen

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

in $(\Gamma, -\Theta)$ nicht definiert. Auch auf diese Weise läßt sich das stabile Subsystem gemäß (1b) identifizieren.

$$\text{(1b)} \qquad \begin{aligned} B^*(L)\Delta y_t &= B(1)y_{t-1} + C(1)x_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \operatorname{diag}(B(1))\,[\Gamma y_{t-1} - \Theta x_{t-1}] + \varepsilon_t \\ &= \operatorname{diag}(B(1))\,\Gamma\,[y_{t-1} - \Gamma^{-1}\Theta x_{t-1}] + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Für dieses stabile Subsystem muß gelten, daß die Linearkombinationen

$$\hat{B}(1)y_{t-1} + \hat{C}(1)x_{t-1}$$

bzw. $\hat{\Gamma} y_{t-1} - \hat{\Theta} x_{t-1}$ oder $y_{t-1} - \hat{\Gamma}^{-1}\hat{\Theta} x_{t-1}$

(d.h. die Cointegrationsresiduen) stationär sind.

2.4.3. Schätzung des ECM

Das primäre Interesse des Ökonomen richtet sich auf die langfristigen Koeffizienten des dynamischen simultanen Gleichungssystems (SEM) und damit auf die Koeffizienten $B(1)$ und $C(1)$ des ECM. Die Zerlegung der Koeffizienten-Matrix $A(1)$ in $\gamma\alpha'$ im Verfahren von Johansen ist nur von Interesse, wenn diese Zerlegung zu identifizierbaren Parametern in γ und α führt. Dies ist der Fall, wenn die Cointegrationsvektoren α im Sinne der strukturellen oder der reduzierten Form interpretierbar sind. Da das Johansen-Verfahren solche Restriktionen nicht oktroyiert, wird es hier vor allem als Testverfahren zur Festlegung des Cointegrationsrangs empfohlen, denn nichtidentifizierte Koeffizienten sind nicht geeignet, ökonomische Theorien zu überprüfen (*Park* 1990).

Die Regressionstheorie für integrierte Variable zeigt, daß die Koeffizienten des ECM gleichungsweise mit Hilfe der KQ-Methode *superkonsistent* geschätzt werden können, d.h. daß eine Korrelation zwischen den Störgrößen und den integrierten Variablen asymptotisch vernachlässigbar ist.

Anders ausgedrückt: Die Regressionstheorie für integrierte Variable erklärt, warum sich bei trendbehafteten Daten nur geringe Unterschiede zwischen den KQ-Schätzern und den zweistufigen KQ-Schätzern ergeben. Für die (differenzierten) stationären Variablen Δy_t behält die klassische Schätztheorie für das SEM ihre Gültigkeit. Allerdings ist der Ökonom an den die kurzfristige Dynamik erklärenden Parametern der differenzierten Variablen nicht sonderlich interessiert. Die zwei- und dreistufige KQ-Methode bleibt aber für die Schätzung der Bewley-transformierten Gleichungen nach *Wickens / Breusch* 1988 relevant.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

a) KQ-Schätzung des ECM (*Stock* 1987)

Im folgenden wird die KQ-Schätzung des ECM am Beispiel des Zweigleichungsmodells (1 b) bzw. (1 c) erklärt. Die Gleichungen (1 b) lauten

$$(1\,\mathrm{b})\quad \begin{aligned} \Delta y_{1t} &= \bar{b}_{11} y_{1t-1} + \bar{b}_{12} y_{2t-1} + \bar{c}_{11} x_{1t-1} + b_{12}^0 \Delta y_{2t} + c_{11}^0 \Delta x_{1t} + u_{1t} \\ \Delta y_{2t} &= \bar{b}_{21} y_{1t-1} + \bar{b}_{22} y_{2t-1} + \bar{c}_{22} x_{2t-1} + b_{21}^0 \Delta y_{1t} + c_{22}^0 \Delta x_{2t} + u_{2t}. \end{aligned}$$

Die Laglängen der differenzierten Variablen werden so gewählt, daß die Störgrößen u_{1t} und u_{2t} Rauschgrößen sind. Im stabilen Modell d.h. für $\bar{b}_{11} < 0$ und $\bar{b}_{22} < 0$ ergeben sich zwei Cointegrationsbeziehungen

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \gamma_{12} y_{2t} + \theta_{11} x_{1t} + v_{1t} \text{ mit } -\gamma_{12} = \bar{b}_{12}/\bar{b}_{11} \text{ und } -\theta_{11} = \bar{c}_{11}/\bar{b}_{11} \\ y_{2t} &= \gamma_{21} y_{1t} + \theta_{22} x_{2t} + v_{2t} \text{ mit } -\gamma_{21} = \bar{b}_{21}/\bar{b}_{22} \text{ und } -\theta_{22} = \bar{c}_{22}/\bar{b}_{22} \end{aligned}$$

und damit das ECM (1 c)

$$(1\,\mathrm{c})\quad \begin{aligned} \Delta y_{1t} &= \bar{b}_{11} [y_{1t-1} - \gamma_{12} y_{2t-1} - \theta_{11} x_{1t-1}] + b_{12}^0 \Delta y_{2t} + c_{11}^0 \Delta x_{1t} + u_{1t} \\ \Delta y_{2t} &= \bar{b}_{22} [y_{2t-1} - \gamma_{21} y_{1t-1} - \theta_{22} x_{2t-1}] + b_{21}^0 \Delta y_{1t} + c_{22}^0 \Delta x_{2t} + u_{2t} \end{aligned}$$

(1) Eine *nichtlineare KQ-Schätzung* der Gleichungen (1 c) ist numerisch identisch mit der KQ-Schätzung der linearen Gleichungen (1 b) und anschließender Berechnung der Cointegrationsvektoren

$$-\hat{\gamma}_{12} = \hat{\bar{b}}_{12}/\hat{\bar{b}}_{11}, -\hat{\theta}_{11} = \hat{\bar{c}}_{11}/\hat{\bar{b}}_{11} \text{ sowie } -\hat{\gamma}_{21} = \hat{\bar{b}}_{21}/\hat{\bar{b}}_{22}, \quad -\hat{\theta}_{22} = \hat{\bar{c}}_{22}/\hat{\bar{b}}_{22}.$$

(2) Die zugehörige Varianz für diese Cointegrationsvektoren ergibt sich als Varianz der entsprechenden Linearkombination der KQ-Schätzung des linearen Systems (1 b). Es gilt z.B.

$$\begin{aligned} &\mathrm{Var}(\hat{\gamma}_{12}) = m_1^2 \,\mathrm{Var}(\hat{\bar{b}}_{11}) + m_2^2 \,\mathrm{Var}(\hat{b}_{12}) + m_1 m_2 \,\mathrm{Cov}(\hat{\bar{b}}_{11} \hat{\bar{b}}_{12}) \\ &\text{mit} \quad m_1 = \hat{\bar{b}}_{12}/\hat{\bar{b}}_{11}^2 \quad \text{und} \quad m_2 = 1/\hat{\bar{b}}_{11}. \end{aligned}$$

(3) Der Vorteil dieser Schätzung liegt darin, daß man die Zerlegung der Koeffizienten der integrierten Variablen gemäß (9 a) erhält:

$$(9\,\mathrm{a})\quad [\hat{B}(1), \hat{C}(1)] = \mathrm{diag}(\hat{B}(1)) \cdot [\Gamma, -\Theta] = \begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{b}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \hat{\gamma}_{12} \\ \hat{\gamma}_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\hat{\theta}_{11} & 0 \\ 0 & -\hat{\theta}_{22} \end{bmatrix}.$$

Ein reduzierter Rang von $\hat{B}(1)$ ergibt sich, wenn entweder

a) $H_o: \bar{b}_{11} = 0$ oder $\bar{b}_{22} = 0$ angenommen werden kann oder

b) die Matrix Γ der Langfristkoeffizienten singulär ist.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Die Bedingung a) definiert *dynamische* Instabilität. Obwohl $\hat{B}(1)$ und $\hat{C}(1)$ keiner Standardverteilung folgen, kann man zeigen (*Phillips / Park* 1988; *Park* 1990), daß die Koeffizienten der reduzierten Form

$$\hat{\Pi}_{EC} = \hat{B}(1)^{-1} \cdot C^1(1)$$

bei *schacher Exogenität* der x-Variablen und Gültigkeit des Modells (1) asymptotisch gemischt normalverteilt sind, d.h.

$$T(\hat{\Pi}_{EC} - \Pi) \xrightarrow{d} \int_{Q>0} N(0, \Sigma_* \otimes Q)\, dQ \qquad \text{mit } Q = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T^2} (X'X)^{-1}.$$

Dabei ist Σ_* die Kovarianzmatrix des stabilen Subsystems, bereinigt um die aus der Kovarianz mit den Störgrößen der exogenen Variablen resultierenden Effekte. Diese Bereinigung erfolgt über eine entsprechende Cholesky-Zerlegung der Kovarianzmatrix aller Störgrößen (*Park* 1990).

(4) Die KQ-Schätzer der Parameter des ECM in struktureller Form besitzen in gleicher Weise asymptotisch eine Normalverteilung, wenn die Gleichungen gerade identifiziert sind, d.h. die Strukturparameter eindeutig aus $\hat{\Pi}_{EC}$ bestimmt werden können.

Dies ist dann der Fall, wenn die klassischen Identifikationskriterien für eine Identifikation von Γ und Θ im System (1c) aus Π im System (1d) möglich ist. Wir zeigen im nächsten Abschnitt, daß die KQ-Schätzung des ECM mit einer Instrumentvariablen-Schätzung bzw. mit einer zweistufigen KQ-Schätzung der Bewley-transformierten Gleichung *bei geeigneter Instrumentierung* numerisch identisch ist. Bei überidentifizierten Modellen kann daher entweder das restringierte ECM in struktureller Form nach KQ oder die Bewley-transformierte Gleichung nach der 2stufigen KQ-Methode geschätzt werden.

b) Instrumentenschätzung der Bewley-Transformation (*Wickens / Breusch* 1988)

Die einfachste numerische Berechnung der Cointegrationsvektoren und ihrer Schätzfehler mit Hilfe von Standardprogrammen kann anhand einer Instrumentvariablenschätzung der Bewley-transformierten Gleichung (1e) erfolgen, die eine alternative Reparametrisierung der Gleichung (1a) ist.

$$\text{(1e)} \quad \begin{aligned} y_{1t} &= \gamma_{12} y_{2t} + \theta_{11} x_{1t} + \frac{1}{\bar{b}_{11}} (b_{11}^1 \Delta y_{1t} + b_{12}^1 \Delta y_{2t} + c_{11}^1 \Delta x_{1t} + u_{1t}) \\ y_{2t} &= \gamma_{21} y_{1t} + \theta_{22} x_{2t} + \frac{1}{\bar{b}_{22}} (b_{22}^1 \Delta y_{2t} + b_{21}^1 \Delta y_{1t} + c_{22}^1 \Delta x_{2t} + u_{2t}) \end{aligned}$$

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

In den Bewley-transformierten Gleichungen treten die Cointegrationsparameter direkt auf.

Wickens / Breusch 1988 haben gezeigt, daß eine Instrumentvariablen-Schätzung mit y_{1t-1} (bzw. y_{2t-1}) als Instrument für Δy_{1t} (bzw. Δy_{2t}) in den Bewley-transformierten Gleichungen (1e) numerisch identisch ist mit der KQ-Schätzung von (1b) bzw. (1c). Die Instrumentvariablenschätzung bewirkt, daß den Residuen die gleichen Orthogonalitätsbedingungen auferlegt werden wie bei der KQ-Schätzung des ECM. Daraus resultiert letztlich die Identität der Schätzer. *Park* 1990 empfiehlt, in der ersten Gleichung auch die Niveauvariable y_{2t} durch die Variable x_{2t} zu instrumentieren, um eine Abhängigkeit von y_{2t} und u_{1t} bei kleinen Stichproben zu vermeiden. Da y_{2t} eine $I(1)$-Variable und u_{1t} eine $I(0)$-Variable ist, sind beide asymoptotisch unabhängig.

Dieser Instrumentvariablenschätzer von Wickens / Breusch ist auch mit dem traditionellen zweistufigen KQ-Schätzer für simultane Gleichungssysteme identisch, wenn alle Variablen der entsprechenden ECM-Gleichung und damit verzögerte Niveauvariablen der endogenen Variablen (y_{t-1}) an Stelle differenzierter endogener Variablen Δy_t in den Instrumentvariablen der zweistufigen KQ-Methode enthalten sind. Die endogenen Niveauvariablen können also in der zweistufigen KQ-Schätzung wegen der höheren Konvergenzrate ihrer Momente wie vorherbestimmte Variable behandelt werden.

Der Nachteil des Wickens / Breusch-Verfahrens besteht darin, daß $\bar{b}_{11} < 0$ und $\bar{b}_{22} < 0$ unterstellt wird, da sonst die Langfristkoeffizienten γ_{ij} und θ_{ij} nicht definiert sind. Die KQ-Schätzung des ECM erlaubt es, diese Hypothese zu überprüfen.

c) Zweistufiges Engle-Granger-Verfahren

Die asymptotische Unabhängigkeit der KQ-Schätzer der Koeffizienten von $I(1)$-Variablen und $I(0)$-Variablen haben *Engle / Granger* 1987 benutzt, um das ECM der Gleichung (1c) in zwei Schritten zu schätzen.

Im ersten Schritt werden die statischen Regressionen

$$\Gamma y_t = \Theta x_t + u_t \qquad \text{bzw.}$$
$$y_t = \Pi x_t + v_t \qquad \text{mit } \Pi = \Gamma^{-1}\Theta$$

nach der KQ-Methode geschätzt und die Residuen $\hat{u}_t$ bzw. $\hat{v}_t$ auf Stationarität überprüft (s. den CRDW-Cointegrationstest).

In einem zweiten Schritt werden die verzögerten $I(1)$-Variablen in (1c) bzw. (1d) durch die verzögerten Residuen $\hat{u}_{t-1}$ bzw. $\hat{v}_{t-1}$ des 1. Schrittes

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

ersetzt, so daß (1c) bzw. (1d) nur stationäre Variable enthält. Das System (1c) bzw. (1d) wird dann gleichungsweise nach der KQ-Methode geschätzt.

Das Verfahren setzt voraus, daß die Anzahl der Cointegrationsbeziehungen und damit die Einteilung in endogene und exogene Variablen bekannt ist, damit die statischen Beziehungen wohl definiert sind. Dies kann mit Hilfe des Johansen-Tests erfolgen.

Monte-Carlo-Studien (*Banerjee* et al. 1986) haben gezeigt, daß diese Schätzer bei kleinen Stichproben im Vergleich zu dem vorgenannten Stock-Verfahren erhebliche Verzerrungen aufweisen können. Bei mehr als zwei Gleichungen und fehlenden Nullrestriktionen ergeben sich ferner Normierungsprobleme im 1. Schritt der Schätzung des statischen Systems.

d) Maximum-Likelihood-Verfahren nach Park

Die KQ-Schätzer der EC-Modelle (1c) bzw. (1d) sowie die Instrumentvariablenschätzer der Bewley-Transformation nach Wickens / Breusch sind ML-Schätzverfahren, sofern die Variablen x_t schwach exogen sind, d.h. in (10a) $\gamma_2 = 0$ ist. Phillips / Hansen 1990 haben ein ML-Schätzverfahren vorgeschlagen, das auf diese Annahme verzichtet. Die Konsequenz der Annahme $\gamma_2 \neq 0$ ist, daß das stabile Subsystem nur zusammen mit den Gleichungen für die exogenen Variablen effizient geschätzt werden kann. Dabei gehen Phillips und Hansen nicht explizit davon aus, daß die Daten durch ein ECM erzeugt wurden. *Park* 1990 hat diesen Schätzer unter dieser Prämisse analysiert. Der Vorteil dieses Verfahrens gegenüber dem ML-Verfahren von Johansen liegt darin, daß identifizierende Restriktionen von vornherein berücksichtigt werden können. Ausgangspunkt ist.

$$A^*(L)\Delta\tilde{y}_t = \gamma\alpha'\tilde{y}_{t-1} + \varepsilon_t = \gamma(y_{t-1} - \Gamma^{-1}\Theta x_{t-1}) + \varepsilon_t \tag{6}$$

$$\text{mit } \Delta\tilde{y}_t' = (\Delta y_t', \Delta x_t') \text{ und } E(\varepsilon_t, \varepsilon_t') = \Sigma_o = \begin{bmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{bmatrix}.$$

Einzelne Cointegrationsbeziehungen sind durch identifizierende Restriktionen auf Γ und Θ gekennzeichnet. Gleichungsweise können diese restringierten Cointegrationsbeziehungen wie im SEM geschrieben werden:

$$y_{it} = \delta_i w_{it} + u_{it}; \quad \delta_i = (\gamma_i, \Theta_i).$$

Dabei ist w_{it} der Vektor der in Gleichung i vorkommenden Variablen. Das Verfahren von *Park* 1990 entspricht der ML-Schätzung von *Phillips / Hansen* 1990. Es besteht in der Anwendung der verallgemeinerten KQ-Schätzung auf das mit

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

$$J' = (\gamma' \Sigma_o^{-1} \gamma)^{-1} \gamma' \Sigma_o^{-1}$$

multiplizierte System (6). Diese Transformation erzeugt ein System (6b) mit unabhängigen Störgrößen.

$$\text{(6b)} \qquad (y_t - \Gamma^{-1} \Theta x_t) + A^{**}(L) \Delta \tilde{y}_{t+1} = v_{t+1} \qquad \text{mit } A^{**}(L) = J' A^*(L)$$

Man schätzt zunächst die g Cointegrationsvektoren δ_i $(i = 1, \ldots, g)$ Gleichung für Gleichung mit Hilfe der KQ-Methode und in einem zweiten Schritt über die ECM-Gleichungen unter Verwendung von $\hat{\Pi} = \hat{\Gamma}^{-1} \hat{\Theta}$ die Parameter γ, Σ_o und J. Es wird dann folgendes System geschätzt:

$$y_{it}^* = \delta_i w_{it} + v_{it} \qquad i = 1, \ldots, g \qquad \text{mit } y_t^* = y_t + \hat{J}'(\hat{\varepsilon}_{t+1} - \hat{\gamma}(y_{t+1} - \hat{\Pi} x_{t+1})).$$

2.4.4. *Hypothesentest*

a) Asymptotische Theorie und Monte-Carlo-Ergebnisse

Wir haben bereits gezeigt, daß die aus den KQ-Schätzern $\hat{B}(1)$, $\hat{C}(1)$ des stabilen Subsystems berechneten reduzierte Form-Koeffizienten $\hat{\Pi} = \hat{B}(1)^{-1} \hat{C}(1)$ (bzw. daraus ableitbare Koeffizienten der strukturellen Form) asymptotisch gemischt normalverteilt sind, wenn die exogenen Variablen x_t *schwach exogen* sind. Unter dieser Annahme können klassische Testverfahren verwendet werden, um Hypothesen über die Cointegrationsparameter zu testen. Da die Cointegrationsvektoren per Definition Stationarität erzeugen, besitzen die Koeffizienten $\hat{B}(1)$ der Einflüsse dieser stationären Linearkombination Standardeigenschaften. Sind die x-Variablen nicht schwach exogen, so vernachlässigt der KQ-Schätzer den Feedback zwischen den Innovationen der x-Variablen und der y-Variablen.

Phillips / Hansen 1990 haben aber gezeigt, daß der obige Maximum-Likelihood-Schätzer $T(\gamma_{\mathrm{ML}} - \gamma)$, der alle kontemporären und seriellen Korrelationen zwischen den Störgrößen der Gleichungen berücksichtigt, als asymptotische Verteilung ebenfalls eine Mischung von normalverteilten Zufallsvariablen besitzt, so daß die t-Statistik von $\hat{\gamma}_{\mathrm{ML}}$ asymptotisch standardnormal-verteilt ist. Phillips / Hansen (1990) zeigen auch, daß die Wald-Statistik (F-Statistik) zum Test allgemeiner linearer Hypothesen bei Benutzung von $\hat{\gamma}_{\mathrm{ML}}$ asymptotisch χ^2-verteilt ist. Allerdings gilt dieses Ergebnis nur, wenn in einer von zwei Gleichungen a priori eine Einheitswurzel angenommen wird.

Phillips 1990 hat gezeigt, daß der KQ-Schätzer des ECM zwar asymptotisch nicht voll effizient ist, aber dem Maximum-Likelihood-Schätzer asymptotisch sehr nahe kommt. Phillips und Hansen haben auch anhand einer Monte-Carlo-Studie beide Verfahren verglichen. Dabei wird ein mul-

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

tivariater Moving-Average-Prozeß für die Störgrößen des statischen Systems in den $I(1)$-Variablen unterstellt,

$$\begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3 & -0.4 \\ \phi_{21} & -0.6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t-1} \\ \varepsilon_{2t-1} \end{pmatrix}; \quad \varepsilon_t \sim N(0, \Sigma).$$

Das ECM kann diese Residuenkorrelation nicht vollständig erfassen. Der gleichungsweise KQ-Schätzer des ECM ist insbesondere vom Feedback-Parameter ϕ_{21} abhängig. Nur für $\phi_{21} = 0$ erreicht er praktisch die volle asymptotische Effizienz.

Die Monte-Carlo-Studie zeigt, daß insbesondere für $\phi_{21} = 0$ die t-Statistik für $\hat{\gamma}$ der KQ-Schätzung des ECM näherungsweise standardnormalverteilt ist. Die Varianz des Schätzers ist aber größer als die des ML-Schätzers von Phillips / Hansen *bei voller Information,* da eine endliche Anzahl differenzierter Variablen im ECM die serielle Korrelation der MA-Störgrößenstruktur nicht voll beseitigen kann.

Für $\phi_{21} \neq 0$ weist die KQ-Schätzung des ECM eine Verzerrung auf, d.h. der Mittelwert der t-Statistik ist ungleich null. Die Schlußfolgerung von Phillips und Hansen, daß der ML-Schätzer vorzuziehen ist, gilt natürlich nur für die vorliegende Modellstruktur, die keine ECM-Struktur ist.

b) Bayesianische Inferenz

Die Anwendung klassischer Inferenzkriterien im Test linearer Hypothesen über die Koeffizienten von $I(1)$-Variablen wird auch von *Sims* (1988) empfohlen. Allerdings geht er dabei von einer völlig anderen Betrachtungsweise aus.

Nach Sims beruhen die Schwierigkeiten der klassischen statistischen Inferenz bei einer Einheitswurzel auf der Diskontinuität, die für die asymptotische Verteilung der Koeffizienten-Schätzer der integrierten Variablen resultiert. Für Analysen anhand endlicher Stichproben beruht der Wert der asymptotischen Theorie darauf, daß die Theorie für nicht zu kleine Stichproben bereits eine gute Näherung liefert. Nach Sims bedeutet die Diskontinuität in der asymptotischen Verteilung, daß die asymptotische Theorie in diesem Fall ungeeignet ist, letztlich weil die asymptotische Theorie nur bei sehr großen Stichproben gilt, die in der Praxis nicht vorliegen. In einer endlichen Stichprobe muß die Varianz der $I(1)$-Variablen diejenige der $I(0)$-Variablen deutlich dominieren, damit die asymptotische Theorie näherungsweise gilt (*Pagan / Wickens* 1989).

Sims schlägt deshalb eine *bayesianische Inferenz* vor, die die Probleme der klassischen Inferenz dadurch umgeht, daß sie keine Aussagen für alternative Stichproben sondern nur für die vorliegende Stichprobe trifft (Kondi-

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

tionierung auf den gegebenen Datensatz). Bekanntlich ist die Likelihoodfunktion eines Modells *bei nicht-informativer a priori-Verteilung* der Parameter identisch mit der a posteriori-Verteilung der Parameter. Dies ist auch der Fall, wenn das System eine Einheitswurzel besitzt (*Sims* 1988). Man kann daher die taditionellen t- und F-Statistiken und ihre Verteilungen verwenden, um eine Hypothese mit Hilfe eines HPI-Intervalls („highest posterior interval") zu testen. Das HPI-Intervall beschreibt für die stochastischen Parameter bzw. die daraus ermittelte Teststatistik, in welchem α-Wahrscheinlichkeitsintervall die Teststatistik liegt.

Mit anderen Worten: Gegenüber der Inferenz in stationären Modellen ändert sich nicht die Vorgehensweise sondern nur die Interpretation des Testergebnisses.

2.5. Empirische Analysen

Modelle mit Einheitswurzeln wurden in den letzten Jahren auf zahlreiche ökonomische Fragen angewendet. Wir beschränken uns auf Arbeiten, die Daten für die Bundesrepublik bzw. Österreich verwenden. Der Leser findet in diesen Arbeiten weitere Hinweise auf die sehr umfangreiche internationale Literatur.

Modelle zur Erklärung des Wechselkurses wurden u. a. von *Baille / Selover* 1987, *Corbae / Ouliaris* 1988, *Enders* 1988, *Kirchgässner / Wolters* 1990b, *Canarella / Pollard / Lai* 1990 und *Kohn* 1991 geschätzt.

Wolters / Kirchgässner 1990a sowie *Reimers / Lütkepohl* 1989 untersuchen den internationalen Zinszusammenhang bzw. die Zinsstruktur.

Modelle zur Analyse der Beziehung zwischen Reallohn und Beschäftigung bzw. Arbeitslosenrate haben *Kugler / Müller* 1987, *Hauschulz* 1991, *Hansen* 1991 und *Möller* 1990 geschätzt. Eine Anwendung auf die Geldnachfrage findet sich bei *Rüdel* 1989.

Seltener sind Anwendungen auf Vektoren von makroökonomischen Variablen. *Kunst / Neusser* 1990 untersuchen die Beziehung zwischen Sozialprodukt, Konsum, Investition, Export, Realzins und Reallohn, in Anlehnung an eine ähnliche Studie von *King / Plosser / Stock / Watson* 1987 für die USA.

3. Schätzmethoden für Modelle mit rationalen Erwartungen

Es ist üblich geworden, ökonometrische Modelle anhand repräsentativer Unternehmen oder privater Haushalte zu beschreiben, die ein mehrperiodiges Optimierungsproblem unter Unsicherheit lösen. Als Beispiel diene ein Unternehmen, das auf den Faktormärkten wie auf dem Markt für das eigene

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Produkt (Y) Preisnehmer ist und das durch eine Technologie mit zwei variablen Produktionsfaktoren – (importierte) Vorleistungen (M) und Arbeit (L) – sowie einem fixen Produktionsfaktor Kapital (K) gekennzeichnet ist. Diese Technologie kann durch die (kurzfristige) Kostenfunktion der variablen Faktoren gemäß (11),

$$C^v(\cdot) = c^v(W_M, W_L, K, t) \cdot Y^{1/\nu} \tag{11}$$

und die Kosten des fixen Faktors (K) und deren Anpassung gemäß (12)

$$C^f(\cdot) = W_K \cdot K + c^a(K - (1-\delta)K_{-1}) \cdot P \tag{12}$$

beschrieben werden. Dabei bezeichnet δ die Abnutzungsrate des Kapitalstocks, $W_i (i = M, L, K)$ die gegebenen Faktorpreise, P den gegebenen Outputpreis und ν die Skalenelastizität. Eine Skalenelastizität ($\nu < 1$) ist mit der Annahme konstanter langfristiger Skalenerträge vereinbar. Die kurzfristige Kostenfunktion wird bereits in einen Skaleneffekt $Y^{1/\nu}$ und in variable Stückkosten pro „Skaleneffekt-bereinigtem" Output

$$C^v(\cdot)/Y^{1/\nu} = c^v(W_M, W_L, K, t)$$

zerlegt. Die repräsentative Firma wählt z.B. den Output so, daß der erwartete Gegenwartswert des Gewinns über einen unendlichen Zeithorizont auf der Basis der Informationsmenge ϕ_{t-1} am Ende der Periode $t-1$ maximiert wird.

$$\underset{Y}{\text{Max}}\, E_{t-1} \sum_{\tau=0}^{\infty} \varrho^\tau [P \cdot Y - c^v(W_M, W_L, K, t) Y^{1/\nu} + W_K K + c^a(K - (1-\delta)K_{-1}) \cdot P]_{t+\tau} \tag{13}$$

Notwendige Bedingung für ein solches kurzfristiges Maximum ist die stochastische Euler-Gleichung (14).

$$E_{t-1}\left[P_t - \frac{1}{\nu} c_\tau^v\left(W_M, W_L, K, k\right) \cdot Y_t^{\frac{1-\nu}{\nu}}\right] = 0; \forall t. \tag{14}$$

Diese Gleichung kann nach Auflösen und Logarithmieren auch wie in (15) geschrieben werden.

$$\ln Y_t = \frac{\nu}{1-\nu} \ln \nu - \frac{\nu}{1-\nu} \ln E_{t-1}(c_t^v(\cdot)/P_t) \tag{15}$$

Gleichung (15) beschreibt das geplante Güterangebot als Funktion der realen kurzfristigen Stückkosten, die außer von dem kurzfristig gegebenen Kapitalstock von den *erwarteten Produkt-* und *Faktorpreisen* abhängen. Die Zeitpfade der Preise können als exogene stochastische Prozesse aufge-

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

faßt werden, die von den Anbietern (hier der repräsentativen Firma) zu prognostizieren sind.

Wir betrachten die Angebotsfunktion bei einer loglinearen Kostenfunktion gemäß (16)

$$\ln c_t^v(\cdot) = -\lambda t + (1-\alpha_2) w_{Mt} + \alpha_2 w_{Lt} - \alpha_3 k_t. \tag{16}$$

Für

$$\ln E_{t-1} c_t^v \simeq E_{t-1} \ln c_t^v$$

folgt für das geplante Angebot in logarithmierten Variablen

$$y_t = \frac{\nu}{1-\nu} [\lambda t - (1-\alpha_2) E_{t-1}(w_{Mt} - p_t) - \alpha_2 E_{t-1}(w_{Lt} - p_t) + \alpha_3 k_t] + u_t. \tag{17a}$$

3.1. Schätzung mit Hilfe von Instrumentvariablen

Zur Vereinfachung fassen wir in der obigen Gleichung die realen exogenen Faktorpreise zu einem Vektor x_t zusammen. Die zum Zeitpunkt $(t-1)$ bekannten Variablen wie k_t bezeichnen wir mit w_t. Gleichung (17) lautet dann

$$y_t = E_{t-1} x_t \beta_1 + w_t \beta_2 + u_t \tag{17}$$

Die Schätzung dieser Gleichung unter *rationalen Preiserwartungen* kann in der Weise erfolgen, daß man von den erwarteten realen Faktorpreisen den Prognosefehler $\tilde{x}_t$ abzieht, d.h. die Angebotsfunktion (17) als Fehler in das Variablen-Modell (18) schreibt.

$$y_t = x_t \beta_1 + w_t \beta_2 + v_t \quad \text{mit} \quad v_t = u_t - \tilde{x}_t \beta_1 \quad \text{und} \quad \tilde{x}_t = x_t - E_{t-1} x_t \quad \text{bzw.} \tag{18}$$

$$y = H\beta + v \quad \text{mit} \quad H = (X, W) \quad \text{und} \quad \beta' = (\beta_1', \beta_2'). \tag{18}$$

Wir nehmen im folgenden zunächst an, daß die Variablen in (18) stationär sind. Eine KQ-Schätzung von (18) liefert dann inkonsistente Schätzer, da die beobachteten Variablen x_t mit den Prognosefehlern $\tilde{x}$ in der Störgröße korrelieren. Dieses Problem kann mit Hilfe einer Instrumenten-Schätzung (*McCallum* 1976; *Wickens* 1982) beseitigt werden. Als Instrumente bieten sich die Variablen an, die zur Prognose von x_t verwendet werden. Bei einer nur autoregressiven Prognose sind dies eigene Verzögerungen von x_t. Es können aber auch andere Variable, die zum Zeitpunkt $(t-1)$ bekannt sind, bei der Prognose verwendet werden. Dies können die in $(t-1)$ bekannten exogenen Variablen z_t eines interdependenten Systems sein, aus dem x_t bestimmt wird. Der Prognose von x_t liegt dann folgende lineare Beziehung (19) zugrunde, die x endogenisiert.

$$x_t = z_t \gamma + e_t \quad \text{bzw.} \quad X = Z\gamma + e \tag{19}$$

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Für die Prognosefehler gilt dann $\tilde{X} = X - E_{t-1}X = e$ und damit $v = u - e\beta_1$. Per Konstruktion ist Z mit den Prognosefehlern e nicht korreliert, so daß (18) mit Z als Instrumentvariable konsistent geschätzt werden kann.

Diesen verallgemeinerten Instrumentvariablen-Schätzer (GIVE) erhält man aus der Minimierung von $v'Z(Z'Z)_{-1}Z'v$ als

$$\hat{\beta} = [H'Z(Z'Z)^{-1}Z'H]^{-1}H'Z(Z'Z)^{-1}Z'y.$$

Dieser Schätzer ist als zweistufiger KQ-Schätzer bei der Schätzung interdependenter Gleichungen bekannt, wenn die Instrumentvariablen Z sämtliche vorherbestimmte Variablen des Modells sind.

3.2. Nichtlineare Instrumentvariablen-Schätzung

In Modellen mit rationalen Erwartungen bestehen häufig nichtlineare Zusammenhänge $y = f(H, \beta) + v$, z.B. wenn die Kostenfunktion des obigen Modells nicht linearisierbar ist. *Amemiya* (1974) hat eine entsprechende nichtlineare zweistufige KQ-Schätzung vorgeschlagen, in der H durch die noch von β abhängige Funktion $\tilde{H}(\beta) = \partial f(H, \beta)/\partial\beta$ ersetzt wird und über $\hat{\beta}$ wie folgt iteriert wird.

$$\hat{\beta}^{i+1} = \hat{\beta}^i + \lambda[\tilde{H}(\hat{\beta}^i)'Z(Z'Z)^{-1}Z'\tilde{H}\ \ (\hat{\beta}^i)]^{-1}.\ \tilde{H}(\hat{\beta}^i)Z'(Z'Z)^{-1}Z'y$$

Dabei ist $\hat{\beta}^i$ der Schätzer im i-ten Iterationsschritt.

3.3. Full-Information-ML-Schätzung (FIML)

Man kann statt einer Schätzung der Gleichung (18) mit den Instrumentvariablen aus (19) auch das System der Gleichungen (18) und (19) gemeinsam schätzen. Dieses System lautet für eine Variable in X:

$$\text{(18a)} \qquad \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix} \text{ bzw. } \tilde{y} = \tilde{H}\tilde{\beta} + \tilde{v}.$$

Dabei muß die Beziehung des Störgrößenvektors $\tilde{v}' = (v', e')$ zu dem Störgrößenvektor $\tilde{u} = (u', e')$, für den weißes Rauschen unterstellt wird, berücksichtigt werden. Diese Beziehung lautet

$$\tilde{v} = \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ e \end{pmatrix} = R\tilde{u}.$$

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Hat der Vektor $\tilde{u}$ die Kovarianzmatrix

$$E(\tilde{u}\tilde{u}') = \begin{bmatrix} \sigma_{uu} I_T & \sigma_{ue} I_T \\ \sigma_{eu} I_T & \sigma_{ee} I_T \end{bmatrix} = \Sigma \otimes I_T,$$

so besitzt $\tilde{v}$ die Kovarianzmatrix

$$E(\tilde{v}\tilde{v}') = \Omega = (R \Sigma R') \otimes I_T.$$

Eine FIML-Schätzung von (18a) ist eine Aitkenschätzung, die

$$\begin{aligned} \tilde{v}' \Omega^{-1} \tilde{v} &= \tilde{u}' R' \Omega^{-1} R \tilde{u} = \tilde{u}' R' [(R \Sigma R') \otimes I_T]^{-1} R \tilde{u} \\ &= \tilde{u}' R' [(R \Sigma R')^{-1} \otimes I_T] R \tilde{u} = \tilde{u}' (\Sigma^{-1} \otimes I_T) \tilde{u} \end{aligned}$$

minimiert.

Es ist dies die Kovarianzmatrix, die die ML-Methode – angewendet auf das System (17) und (19) mit $E_{t-1} x_t = z_t \gamma$ (Substitutionsmethode) –

$$\text{(17a)} \qquad \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Z\gamma & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ e \end{pmatrix} \text{ mit } E(\tilde{u}\tilde{u}') = \Sigma \otimes I_T$$

minimiert. Damit ist die FIML-Schätzung des „Fehler in den Variablen-Modells" (18a), in dem die Prognosefehler den Störgrößen zugeschlagen werden, äquivalent mit der FIML-Schätzung nach der Substitutionsmethode (17a) und damit asymptotisch effizient (vgl. *Pesaran* 1987, 170).

3.4. Zwei-Schritt-Instrumentvariablen-Methode (2S2SLS) und verallgemeinerte Momentenmethode (GMM)

Die Instrumentvariablen-Schätzung liefert konsistente und asymptotisch normalverteilte Schätzer, wenn die Störgröße v_t ein weißes Rauschen ist. Erfüllt die Variable v_t aus (18a) diese Eigenschaft nicht, so bleibt die NL2SLS-Schätzung zwar konsistent, weil die Instrumente Z so gewählt werden, daß $E(Z'v) = 0$ gilt. Allerdings hat die Varianz-Kovarianz-Matrix der Residuen v_t eine andere Gestalt, so daß die NL2SLS ineffizient ist gegenüber einem Schätzer, der die Residuenstruktur berücksichtigt.

Cumby / Huizinga / Obstfeld 1983 verallgemeinern den Schätzer von Amemiya im Sinne des Aitken-Schätzers, indem sie die Varianz-Kovarianz-Matrix einbeziehen, aber lediglich Nichtlinearität in den Parametern zulassen und von linearen Beziehungen zwischen den Regressoren ausgehen. Im Fall von Nichtlinearität in den Regressoren läßt sich das Verfahren von *Hansen* 1982 und *Hansen / Singleton* 1982 anwenden. Dieses Verfahren lie-

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

fert konsistente und asymptotisch normalverteilte Schätzer für Störgrößen, die autokorreliert oder heteroskedastisch sind. Die Varianz-Kovarianz-Matrix dieser Residuen wird aus der Summe der Autokovarianz-Matrizen des Prozesses $\{Z_t' v_t\}$ konsistent geschätzt.

Autokorrelierte Störgrößen v_t treten insbesondere auf, wenn das Modell zukünftige Erwartungen wie in (20) enthält.

$$y_t = \sum_{i=1}^{q} E(y_{t+i} \mid \phi_t)\alpha_i + \sum_{i=0}^{s} x_{t-i}\beta_i + u_t \tag{20}$$

Dabei sind $E(y_{t+i} \mid \phi_t)$ die bedingten Erwartungen auf der Basis der Informationsmenge ϕ im Zeitpunkt t (*Pesaran* 1987, 190f.). Die Lösung dieses Modells kann mit Hilfe der Martingal-Differenz-Methode (*Broze* u.a. 1985) erfolgen, die von den Innovationen ε_t^i in y_{t+i}, d.h. von

$$E(y_{t+i} \mid \phi_t) - E(y_{t+i} \mid \phi_{t-1}) = \varepsilon_t^i; \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

ausgeht. Es gilt (*Broze* u.a. 1985, 343)

$$E(y_{t+i} \mid \phi_t) = y_{t+i} - \varepsilon_{t+i}^o - \varepsilon_{t+i-1}^1 - \ldots - \varepsilon_{t+i-q+1}^{q-1}.$$

Das Modell (20) kann dann wie folgt geschrieben werden.

$$y_t = \sum_{i=1}^{q} y_{t+i}\alpha_i + \sum_{i=0}^{s} x_{t-i}\beta_i + v_t \tag{20a}$$

mit

$$v_t = u_t - \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=0}^{i-1} \varepsilon_{t+i-j}^j \alpha_i.$$

Diese zusammengesetzte Störgröße v_t hat eine Moving-Average-Darstellung der Ordnung q

$$v_t = \tilde{\varepsilon}_t - \lambda_1 \tilde{\varepsilon}_{t-1} - \ldots - \lambda_q \tilde{\varepsilon}_{t-q}$$

(vgl. *Pesaran* 1987, 191), die bei einer effizienten Instrumentvariablenschätzung zu berücksichtigen ist. Dabei müssen die Instrumentvariablen die Bedingungen

$$E(v_t \mid z_{t-q}, z_{t-q-1}, \ldots) = 0$$

erfüllen, d.h. die Instrumentvariablen sind gegebenenfalls entsprechend zu verzögern.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Im folgenden soll die Schätzmethode für eine nichtlineare Angebotsgleichung $y = f(H,\beta) + v$ kurz erläutert werden. Dabei ist f eine zweimal differenzierbare Funktion. Für v_t gelte $E(vv') = \sigma^2 \Omega_v$. Die Matrix Z der Instrumente wird so gewählt, daß $E(Z'v) = 0$ gilt. Die Instrumentenschätzung von β kann dann aus

$$Z'y = Z'f(H,\beta) + Z'v$$

erfolgen. Die Varianz-Kovarianz-Matrix von $Z'v$ ist *keine* Einheitsmatrix, da v autokorreliert und heteroskedastisch ist. Sofern $E(Z'vv'Z) = \Omega$, positiv definit ist, gilt $\Omega = P'P$. Die Kovarianz-Matrix des transformierten Modells

$$P'^{-1}Z'y = P'^{-1}Z'f(H,\beta) + P'^{-1}Z'v \tag{20}$$

ist dann proportional zur Einheitsmatrix. Ein nicht-linearer Schätzer für β minimiert die Summe der quadrierten Residuen von (20)

$$(y - f(H,\beta))'Z\Omega^{-1}Z'(y - f(H,\beta))$$

mit Hilfe eines iterativen Verfahrens (z.B. *Berndt* et al. 1974)

$$\hat{\beta}^{i+1} = \hat{\beta}^i + \lambda \ (\tilde{H}(\hat{\beta}_i)' Z\hat{\Omega}(\hat{\beta}^i)^{-1} Z'\tilde{H}(\hat{\beta}_i))^{-1} (\tilde{H}(\hat{\beta}_i)' Z\hat{\Omega}(\hat{\beta}^i)^{-1} Z'v).$$

Ist die Struktur des Prozesses v_t bekannt, so wird Ω aus

$$\Omega = E(Z'vv'Z) = Z'E(vv')Z = \sigma^2 Z'\Omega_v Z$$

berechnet.

Liegen hingegen keine a priori-Informationen über die Struktur des Störprozesses v_t vor, so kann die verallgemeinerte Instrumentvariablen-Methode (GMM) von *Hansen* 1982 und *Hansen / Singleton* 1982 verwendet werden, bei der Ω aus

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} Z_t' v_t v_t' Z_t$$

geschätzt wird, wobei Z_t die t-te Spalte der Instrumenten-Matrix Z bezeichnet. Hansen weist darauf hin, daß ein ML-Schätzer asymptotisch effizienter ist, jedoch strengere Verteilungsannahmen für die Störgröße v voraussetzt.

Die obige Kovarianzmatrix ist flexibel genug, um nicht nur eine Autokorrelation sondern auch eine Heteroskedastizität der zusammengesetzten

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Störgröße v_t zu berücksichtigen. Eine solche Heteroskedastizität von v_t tritt z.B. bei der sogenannten *Substitutionsmethode* auf, bei der in Gleichung (17)

$$y = E_{t-1}X\beta_1 + W\beta_2 + U \tag{17}$$

$E_{t-1}X$ durch die KQ-Prognose

$$\hat{X} = Z'(Z'Z)^{-1}Z'X \quad \text{mit} \quad E_{t-1}X - \hat{X} = Z(Z'Z)^{-1}Z'e$$

ersetzt wird. Die daraus resultierende Schätzgleichung

$$y = \hat{X}\beta_1 + W\beta_2 + v \quad \text{mit} \quad v = u - \beta_1 Z(Z'Z)^{-1}Z'e \tag{18b}$$

besitzt eine Störgröße v, die direkt von den über die Zeit variierenden Instrumentvariablen Z abhängt und damit heteroskedastisch ist. Die hier folgende spezifische Art der Heteroskedastizität kann durch Konstruktion einer entsprechenden Kovarianzmatrix $\hat{\Omega}$ im GMM-Schätzer berücksichtigt werden.

3.5. Schätzung bei integrierten exogenen Variablen

Wir haben in Kapitel 2 die Schätzprobleme bei Einheitswurzeln im dynamischen System erörtert und festgestellt, daß es in der Regel ein stabiles Subsystem gibt, das von exogenen $I(1)$-Variablen abhängt, die unabhängige stochastische Trends in das Subsystem einführen.

Wir fragen hier, welche Änderungen sich für die bisher dargestellten Schätzverfahren ergeben, wenn y_t und x_t keine stationären Variablen sondern $I(1)$-Variablen im folgenden *Modell mit zukünftigen rationalen Erwartungen* sind:

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha E(y_{t+1} \mid \phi_t) + \delta y_{t-1} + \beta x_t + u_t \\ &= \alpha y_{t+1} + \delta y_{t-1} + \beta x_t + u_t - \alpha \varepsilon_{t+1} \end{aligned}$$

Die Transformation dieses Modells in ein Stationarität erzeugendes „Error-Correction"-Modell (ECM) ergibt

$$\Delta y_t = \frac{\alpha}{1-\alpha}\Delta y_{t+1} - \frac{(1-\alpha-\delta)}{1-\alpha}\left[y_{t-1} - \frac{\beta}{1-\alpha-\delta}x_t\right] - \frac{\alpha}{1-\alpha}\varepsilon_{t+1} + \frac{1}{1-\alpha} + u_t.$$

Da Δy_{t+1} und ε_{t+1} korrelieren, sind bei der Schätzung dieses ECM Instrumentvariable für Δy_{t+1} zu verwenden. Als solche stehen Lags der differen-

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

zierten Variablen Δy_t bzw. Δx_t zur Verfügung. Um die Effizienz der Schätzer zu erhöhen, empfiehlt sich der GMM-Schätzer (*Wickens* 1990), obwohl auch eine KQ-Schätzung der Koeffizienten der integrierten Variablen superkonsistent ist, wenn x_t eine $I(1)$-Variable ist.

Bei stationären Variablen ist der 2S2SLS- bzw. GMM-Schätzer konsistent und asymptotisch normalverteilt (*Hansen* 1982).

3.6. Identifikation und Stabilität

Stabilität und Identifikation eines Modells mit rationalen zukünftigen Erwartungen sind wichtige Probleme. Wir gehen zur Vereinfachung von folgendem Modell aus:

$$y_t = E(y_{t+1} \mid \phi_t)\alpha + \sum_{i=0}^{s} x_{t-i}\beta_i + u_t; \quad |\alpha| < 1 \tag{20a}$$

$$x_t = \sum_{i=1}^{p} x_{t-i}\varrho_i + e_t. \tag{19a}$$

Im Fall $|\alpha| < 1$ existiert eine eindeutige stationäre Lösung des Systems mit

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j E\left(\sum_{i=0}^{s} x_{t-i+j}\beta_i + u_{t+j} \mid \phi_t\right)$$

(vgl. *Pesaran* 1987, 88ff.; *Broze* u.a., 1985).

Wenn u_t ein weißes Rauschen ist, gilt (*Pesaran* 1987, 134):

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j E(u_{t+j} \mid \phi_t) = u_t.$$

Einsetzen der Erwartungen für x_t gemäß der Gleichung für x_t gibt schließlich die Lösungsgleichung

$$y_t = \sum_{i=0}^{\max(s,p-1)} x_{t-i}\Theta_i + u_t,$$

wobei die Koeffizienten Θ_i nichtlineare Funktionen der Strukturparameter $\{\alpha, \beta_1 \ldots \beta_s, \varrho_1 \ldots \varrho_p\}$ sind. Für $|\alpha| < 1$ ist eine notwendige Bedingung für die Identifikation der Strukturparameter aus den Parametern Θ_i, daß $p > s + 1$ ist (vgl. *Broze* u.a. 1985; *Pesaran* 1987, 137), d.h. die Ordnung des autoregressiven Modells für x_t muß größer sein als die in der Gleichung mit rationalen zukünftigen Erwartungen vorkommenden Verzögerungen von x_t plus eins. Ist z.B. $p = s = 1$, so sind die Parameter nicht identifiziert, weil aus der Lösungsgleichung die direkten Einflüsse von x_{t-1} in (20a) nicht von den

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

indirekten Einflüssen von x_{t-1} getrennt werden können, die über $E(y_{t+1} \mid \phi_t)$ vermittelt werden.

Ein ähnliches Identifikationskriterium, nämlich $p > q$, wurde für ein simultanes Gleichungssystem mit *kontemporären* rationalen Erwartungen für endogene Variablen von *Wallis* 1980 abgeleitet (vgl. *Pesaran* 1987, 153).

Modelle mit zukünftigen Erwartungen sind potentiell destruktiv im Hinblick auf ihre dynamische Stabilität. Gehen wir in (19a) - (20a) von dem Spezialfall $s = 0$, $p = 1$ aus, so ist $E(x_{t+i} \mid \phi_t) = \varrho^i x_t$ und die Lösung der Gleichung (20a)

$$y_t = E(y_{t+1} \mid \phi_t)\alpha + \beta x_t + u_t \tag{20a}$$

$$y_t = [\beta/(1 - \alpha\varrho)]x_t + u_t.$$

Diese Lösung ist stabil für $|\alpha\varrho| < 1$, d.h. selbst wenn x_t ein random walk ($\varrho = 1$) ist, kann eine stabile Lösung für das Modell existieren, falls $|\alpha| < 1$.

Für $|\alpha| > 1$ ist die Lösung nicht eindeutig (vgl. *Pesaran* 1987, 96). Dieses Problem tritt aber nicht auf, wenn das Modell aus einer wohldefinierten Zielfunktion abgeleitet wurde (*Wickens* 1986).

In einem allgemeinen dynamischen Modell mit zukünftigen rationalen Erwartungen

$$y_t = \sum_{i=1}^{m} \delta_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i E(y_{t+i} \mid \phi_t) + \sum_{i=0}^{s} \beta_i x_{t-i} + u_t \tag{20b}$$

$$x_t = \sum_{i=1}^{p} \varrho_i x_{t-i} + e_t \tag{19a}$$

existiert eine eindeutige stationäre Lösung nur, wenn die charakteristische Gleichung

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i \lambda^i + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \lambda^{-i} = 1$$

gerade m Wurzeln auf dem oder außerhalb des Einheitskreises und q Wurzeln innerhalb des Einheitskreises hat (Sattelpfadlösung). Die q instabilen Wurzeln können dann eliminiert werden (*Pesaran* 1987, 197). Im Fall $m = q = 1$, $s = 0$ muß eine Wurzel von

$$\delta_1 \lambda^2 - \lambda + \alpha_1 = 0$$

auf dem Einheitskreis oder außerhalb des Einheitskreises liegen. Es gibt drei Fälle (vgl. *Wickens* 1990, 4):

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

a) ein global stabiles Modell für $|\lambda_1|, |\lambda_2| \geq 1$ (dies impliziert $\delta_1 - 1 + \alpha_1 \geq 0$ und $1 \geq 2\delta$)

b) eine Sattelpfadlösung für $|\lambda_1| \geq 1$ und $|\lambda_2| < 1$ (dies impliziert $\delta_1 - 1 + \alpha_1 \leq 0$) und

c) ein global instabiles Modell für $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$ (dies impliziert $\delta_1 - 1 + \alpha_1 \geq 0$ und $1 \leq 2\delta$).

Im Fall (a) erhält man eine stabile Rückwärtslösung der Differenzengleichung

$$y_t = \frac{1}{\alpha_1} y_{t-1} - \frac{\delta_1}{\alpha_1} y_{t-2} - \frac{\beta_o}{\alpha_1} x_{t-1} + v_t,$$

wobei v_t von den Störgrößen u_t und u_{t-1} und den Innovationen e_t des Prozesses für x_t abhängt (*Wickens,* 1990).

Im Fall (c) existiert keine Lösung für y_t. Die Existenz instabiler dynamischer Gleichungen kann eine Folge der Erwartungsbildung sein. Im Fall der Sattelpfadlösung (b) existiert eine Lösung gemäß

$$y_t = \frac{1}{\lambda_1} y_{t-1} + \frac{\beta_1}{\delta_1 \lambda_1} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_2^i E_t x_{t+i} + \frac{1}{\delta_1 \lambda_1} u_t.$$

Die stabile Wurzel (λ_1) führt zu einer Rückwärtslösung ($1/\lambda_1\, y_{t-1}$) während die instabile Wurzel (λ_2) zu einer Vorwärtslösung führt (*Wickens* 1990). Die Lösung kann als partielles Anpassungsmodell mit einer Zielvariablen

$$y_t^* = \frac{\beta_o}{\delta_1(\lambda_1 - 1)} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_2^i E_t x_{t+i}$$

verstanden werden, die sich aus den Erwartungen über x_t ergibt.

Ist x_t eine $I(1)$-Variable, so führt jeder Schock in x_t zu einer dauerhaften Änderung von $E(x_{t+i})$ und damit zu einer dauerhaften Änderung der Zielvariablen y_t^*. Die obige Differenzengleichung beschreibt dann eine partielle Anpassung an diese Zielvariable. Die Frage, ob der Fall eines instabilen Modells gemäß (c) ausgeschlossen werden kann, und welche der beiden anderen Lösungen vorliegt, kann in Modellen mit zukünftigen rationalen Erwartungen nur anhand vorläufiger Schätzungen entschieden werden.

3.7. Empirische Arbeiten

Empirische Arbeiten für die Bundesrepublik, die von rationalen Erwartungen der Wirtschaftssubjekte ausgehen, sind zahlreich und beziehen sich insbesondere auf Modelle für monetäre Variablen. Hier soll nur auf einige

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Arbeiten über den realen Sektor hingewiesen werden. Kleine makroökonometrische Modelle mit rationalen Erwartungen wurden für die Bundesrepublik von *Leiderman* 1980, *Neumann* 1981, *Lübbers* 1981, *Kudiß* 1984, *Hansen* 1986, 1991, *Buscher* 1986, *Weber* 1988, *Sauer* 1989, *Loef* 1987, *Alexander* 1990 und *Jansen* 1991 geschätzt. Modelle der Investitionsnachfrage wurden von *Ketterer / Vollmer* 1981, *Wegener* 1987, der Arbeitsnachfrage von *Kugler* 1987 durchgeführt.

Schon diese kurze Aufzählung zeigt, wie zahlreich empirische Arbeiten unter rationalen Erwartungen sind.

4. Analyse von Mikrodaten im Querschnitt

Querschnittsdaten haben schon sehr früh die Aufmerksamkeit der Ökonometriker gefunden, wie z.B. die Arbeit von *Tobin* 1958 über Käufe dauerhafter Konsumgüter zeigt. Mit einer besseren Verfügbarkeit solcher Daten sind seit Ende der siebziger Jahre wesentliche Beiträge zur Schätzung von Modellen für Querschnittsdaten geliefert worden. In Standardlehrbücher haben diese Methoden jedoch bisher kaum Eingang gefunden. Lediglich in neueren Lehrbüchern für Fortgeschrittene wie in *Judge* u.a. 1985 und *Amemiya* 1985 werden diese Methoden behandelt. Weil aber die Mikroökonometrie eines der schnell wachsenden Forschungsgebiete ist, sollen hier wenigstens die wichtigsten Modelle und Methoden kurz dargestellt werden.

4.1. Problemstellung

Während makroökonomische Aggregatgrößen kontinuierlich beobachtbar sind, muß dies für die zugehörigen (Mikro-)Variablen einzelner Haushalte oder Unternehmen keineswegs gelten.

Betrachten wir für einen Querschnitt (eine Stichprobe) von n Haushalten die Nachfage der Haushalte nach einem beliebigen dauerhaften Konsumgut, wie z.B. nach einem Fernseher, dann wird es innerhalb der Stichprobe Haushalte geben, die in der Beobachtungsperiode keinen Fernseher gekauft haben. Ebenso kann ein erwerbsfähiges Mitglied eines Haushalts, z.B. die Ehefrau nicht erwerbstätig sein.

Beschränkt sich die Analyse darauf zu erklären, ob ein Haushalt innerhalb der Beobachtungsperiode ein bestimmtes dauerhaftes Konsumgut kauft oder nicht, so spricht man von *(binären) Choice-Modellen*. Erklärt das Modell darüber hinaus auch noch die Höhe der Konsumausgaben (oder der Arbeitszeit) so spricht man von einem *Tobit-Modell* oder einem *Modell für zensierte Daten*.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Das Schätzproblem im binären Choice-Modell resultiert daraus, daß es sich bei der endogenen Variablen Y_i um eine 0,1-Variable handelt, d.h. eine Variable die nur qualitativ meßbar ist und somit keiner stetigen Verteilung folgt.

Im Tobit-Modell werden die nicht beobachteten Ausgaben auf den Wert null „zensiert", weshalb man auch von einem „zensierten" Modell spricht. In sogenannten „truncated" Modellen bleiben demgegenüber die „Null-Beobachtungen" ganz aus der Analyse ausgeschlossen.

Die Nicht-Stetigkeit in der Verteilung von Y_i bewirkt, daß

(i) ein linearer Ansatz $Y_i = X_i\beta + U_i$ unangebracht ist und

(ii) zugleich die fundamentale Annahme der Kleinst-Quadrat-Schätzung, daß im Mittel das als „wahr" unterstellte Modell $X_i\beta$ gilt, nicht mehr zutrifft.

Eine Kleinst-Quadrat-Schätzung des linearen Regressionsmodells $Y_i = X_i\beta + U_i$ liefert daher verzerrte und inkonsistente Schätzer. *Heckman* 1976 hat aber eine zweistufige KQ-Schätzung entwickelt.

4.2. Modellformulierungen

Choice-Modelle und Tobit-Modelle berücksichtigen das skizzierte Datenproblem durch eine adäquate Modellformulierung. Für einen Querschnitt von $i = 1, \ldots, n$ Haushalten bestehen diese Modelle aus folgenden Teilen (*Amemiya* 1984).

a) *Latenter Modellteil*

$$Y_i^* = X_i\beta + U_i$$

b) *Beobachtbarer Modellteil*

$$Y_i = \begin{cases} Y_i^* = X_i\beta + U_i \text{ bzw. } = 1 & , \text{ wenn } Y_i^* > 0 \text{ bzw. } U_i/\sigma > -X_i\beta/\sigma \\ 0 & , \text{ wenn } Y_i^* \leq 0 \text{ bzw. } U_i/\sigma \leq -X_i\beta/\sigma \end{cases}$$

$$\text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Im binären Choice-Modell gilt im beobachtbaren Modellteil $Y_i^* = 1$. Der latente Modellteil sagt, daß die unbeobachtbare Variable Y_i^* einer stetigen Verteilung über den Wertebereich $(-\infty, +\infty)$ folgt wie im klassischen Regressionsmodell.

Im binären Choice-Modell gibt Y_i^* an, mit welcher Intensität der Haushalt i den Kauf des Konsumgutes wünscht bzw. ihn ablehnt. Für $Y_i^* > 0$ wünscht

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

er den Kauf, für $Y_i^* \leq 0$ lehnt er ihn ab. Beobachtbar ist aber im Choice-Modell lediglich die Variable Y_i, d.h., ob der Haushalt das Konsumgut kauft ($Y_i = 1$) oder nicht ($Y_i = 0$). Der Haushalt kauft das Gut nur, wenn die Bedingung $Y_i^* > 0$ bzw. $U_i/\sigma > -X_i\beta/\sigma$ gilt.

Während das binäre Choice-Modell ausschließlich die 0,1-Entscheidung analysiert, erklärt das Tobit-Modell die Variablen „Nichtkauf" und Ausgabenhöhe. Die vom Haushalt i gewünschten Ausgaben können sich dabei aus der Maximierung einer Nutzenfunktion unter Berücksichtigung der Budgetrestriktion sowie anderer Restriktionen ergeben. Die gewünschte Ausgabenhöhe ist aber nur beobachtbar, sofern $Y_i^* > 0$ bzw. $U_i/\sigma > -X_i\beta/\sigma$ gilt, d.h. die Verteilung von Y_i^* ist eine im Punkt 0 abgeschnittene Verteilung.

Zur Erklärung der endogenen Größen Y_i^* und Y_i werden in dem Variablenvektor X_i Preise, das dem Haushalt zur Verfügung stehende Einkommen, aber auch demographische Größen (Anzahl der Kinder etc.) und spezifische Charakteristika des Haushalts (Alter, Schul- und Ausbildung der Haushaltsmitglieder etc.) herangezogen. Teilweise sind diese Variablen nur qualitativ meßbar, d.h. 0,1-Variable.

4.3. Maximum-Likelihood-Schätzung der Modelle

Die Likelihood-Funktion des binären Choice-Modells gestaltet sich wie folgt:

$$L_{bc} = \prod_{i=1}^{m} P(Y_i^* \leq 0) \prod_{i=m+1}^{n} P(Y_i^* > 0) = \prod_{i=1}^{m} P(U_i/\sigma \leq -X_i\beta/\sigma) \prod_{i=m+1}^{n} P(U_i/\sigma > -X_i\beta/\sigma)$$

$$= \begin{cases} \prod_{i=1}^{m} \phi(-X_i\beta/\sigma) \prod_{i=m+1}^{n} 1 - \phi(-X_i\beta/\sigma) & \text{im Probit-Modell} \\ \prod_{i=1}^{m} [1 + \exp(-X_i\beta/\sigma)]^{-1} \prod_{i=m+1} 1 - [1 + \exp(-X_i\beta/\sigma)]^{-1} & \text{im Logit-Modell.} \end{cases}$$

Das erste Produkt umfaßt diejenigen $i = 1, \ldots, m$ Haushalte, die in der Berichtsperiode keine Käufe getätigt haben; das zweite Produkt umfaßt die verbleibenden $n - m$ Haushalte.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Wird zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(\cdot)$ eine standardisierte Normalverteilungsfunktion $\phi(\cdot)$ unterstellt, dann spricht man von einem Probit-, im Fall einer logistischen Verteilung $P(Y_i^* \leq 0) = [1 + \exp(-X_i\beta/\sigma)]^{-1}$ von einem Logit-Modell.

Binäre Choice-Modelle erklären, welche Variablen X_i die Wahrscheinlichkeiten wie beeinflussen. Im Tobit-Modell werden hingegen durch die Variablen X_i sowohl die Wahrscheinlichkeit des (Kauf-)Ereignisses, als auch die Ausgabenhöhe erklärt. Dabei wird für die Verteilung der Störgröße U_i eine Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und konstanter Varianz σ^2 (Homoskedastizität) unterstellt. In diesem Fall ergibt sich die Likelihood-Funktion

$$L_T = \prod_{i=1}^{m} P(Y_i^* \leq 0) \prod_{i=m+1}^{n} P(Y_i = Y_i^*) = \prod_{i=1}^{m} \phi(-X_i\beta/\sigma) \prod_{i=m+1}^{n} \frac{1}{\sigma} \varnothing((Y_i - X_i\beta)/\sigma),$$

in der $\varnothing$ eine Normaldichte und ϕ eine Normalverteilungsfunktion bezeichnen. $1/\sigma\varnothing((Y_i - X_i\beta)/\sigma)$ entspricht der Wahrscheinlichkeit, daß der Haushalt i Ausgaben gerade in Höhe der gewünschten Ausgaben Y_i^* tätigt.

Da die Maximierung der Likelihood-Funktion für beide Modelle zu nichtlinearen Normalgleichungen in den Parametern führt, erfolgt die Schätzung iterativ, z.B. mittels der Newton-Raphson-Methode oder des Verfahrens von *Berndt / Hall / Hall / Hausmann* 1974. Diese Iterationsverfahren konvergieren nur dann zuverlässig gegen ein globales Maximum der logarithmierten Likelihood-Funktion, wenn diese global konkav bezüglich ihrer Parameter ist. *Olsen* 1978 hat nachgewiesen, daß diese Bedingung für die obigen Modelle erfüllt ist.

Allerdings sind in den binären Choice-Modellen nur standardisierte Koeffizienten β/σ identifizierbar. Im Tobit-Modell läßt sich sowohl β als auch σ schätzen.

4.4. Zweistufige Heckman-Schätzung

Da Tobit-Schätzungen nach der ML-Methode sehr rechenzeitaufwendig sind, schlägt Heckman einen Schätzer vor, der weitgehend auf einer Kleinst-Quadrat-Regression beruht.

Da das lineare Regressionsmodell $Y_i = X_i\beta + U_i$ die Zensur der Daten nicht beachtet, ergeben sich verzerrte und inkonsistente KQ-Schätzer. Die Ursache der Inkonsistenz ist eine spezifische Fehlspezifikation des linearen Modells, nämlich die Annahme, daß im Mittel die systematische Komponente $X_i\beta$ gilt, d.h. $E(Y_i) = X_i\beta$. Tatsächlich ergibt sich in den obigen Modellen – unter der Annahme $U_i \sim N(0, \sigma^2)$ – aber ein Erwartungswert

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

$$(21)\quad \begin{aligned} E(Y_i) &= P(Y_i^* > 0) \cdot E(Y_i \mid Y_i^* > 0) + P(Y_i^* \leq 0) \cdot E(Y_i \mid Y^*{}_i \leq 0) \\ &= P(Y_i^* > 0) \cdot E(Y_i \mid Y_i^* > 0) \\ &= (1 - \phi(-X_i\beta/\sigma)) \cdot [X_i\beta + \sigma \varnothing(X_i\beta/\sigma)/\phi(X_i\beta/\sigma)] \\ &\qquad\qquad \text{für } i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

mit

$$(22)\quad \begin{aligned} E(Y_i \mid Y_i^* > 0) &= X_i\beta + E(U_i \mid U_i > -X_i\beta) \\ &= X_i\beta + \sigma \varnothing(X_i\beta/\sigma)/\phi(X_i\beta/\sigma) \\ &\qquad\qquad \text{für } i = m + 1, \ldots, n \end{aligned}$$

als Erwartungswert unter der Bedingung, daß nur die $i = m + 1, \ldots, n$ Haushalte berücksichtigt sind, für die Käufe des Konsumgutes beobachtet werden.

Die Fehlspezifikation besteht also darin, daß die lineare Regression $Y_i = X_i + U_i$ nicht berücksichtigt, daß nur $n - m$ Haushalte mit beobachteten Ausgaben vorhanden sind. Die Variable $\varnothing(X_i\beta/\sigma)/\phi(X_i\beta/\sigma)$ bleibt unberücksichtigt, weil nicht von einem bedingten Erwartungswert (22) als systematische Komponente ausgegangen wird. Konsistente Kleinst-Quadrat-Schätzer sind aber nur möglich, wenn anstelle von $X_i\beta$

- entweder in einer Regression über alle n Haushalte

  $(1 - \phi(-X_i\beta/\sigma)) \cdot [X_i\beta + \sigma \varnothing(X_i\beta/\sigma)/\phi(X_i\beta/\sigma)]$
- oder in einer Regression, die nur $n - m$ Haushalte mit Kaufereignissen umfaßt, $X_i\beta + \sigma \varnothing(X_i\beta/\sigma)/\phi(X_i\beta/\sigma)$

als systematischer Modellteil der Regression angenommen wird. *Heckman* 1976 schlägt vor,

(i) auf der ersten Stufe mit Hilfe einer Probit-Schätzung die Wahrscheinlichkeiten $P(Y_i^* > 0)$ und $P(Y_i^* \leq 0)$ zu erklären, und daraus $\varnothing(\cdot)$ und $\phi(\cdot)$ zu schätzen und

(ii) auf der zweiten Stufe die Ausgabenhöhe mittels einer der korrigierten Regressionsgleichungen zu bestimmen.

Dabei wird vorausgesetzt, daß die Kaufentscheidung und die Entscheidung über die Ausgabenhöhe unabhängig voneinander sind.

4.5. Messung der Einflüsse von Variablenänderungen

Zweck empirischer Analysen ist die Ermittlung interpretierbarer Koeffizienten, um die Auswirkungen von Variationen der Variablen X_i auf Y_i anzugeben. Im linearen Regressionsmodell $Y_i = X_i\beta + U_i$ messen die Parameter β diese Einflüsse. In zensierten Modellen spielen diese Parameter eine

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

untergeordnete Rolle, da sie die Einflüsse auf die latente Variable Y_i^* messen. Von größerem Interesse sind Einflüsse einer Veränderung der X_i

a) auf die Kaufwahrscheinlichkeit für ein Individuum im Probit- und Tobit-Modell gemäß (23)

$$\frac{\partial P(Y_i^* > 0)}{\partial X_i} = \frac{\partial \phi(X_i\beta/\sigma)}{\partial X_i} = \varnothing(X_i\beta/\sigma) \cdot \beta/\sigma \tag{23}$$

bzw. im Logit-Modell gemäß (24)

$$\frac{\partial P(Y_i^* > 0)}{\partial X_i} = \frac{\partial(1 - [1 + \exp(-X_i\beta/\sigma)]^{-1})}{\partial X_i} = -\frac{\exp(-X_i\beta/\sigma) \cdot \beta/\sigma}{[1 + \exp(-X_i\beta/\sigma)]^2} \tag{24}$$

und

b) auf die erwarteten Ausgaben gemäß (25) bzw. (26).

$$\frac{\partial E(Y_i \mid Y_i^* > 0)}{\partial X_i} = \beta\left(1 + X_i\beta/\sigma\,\frac{\phi(X_i\beta/\sigma)}{\phi(X_i\beta/\sigma)} - \frac{\phi(X_i\beta/\sigma)^2}{\phi(X_i\beta/\sigma)^2}\right) \tag{25}$$

$$\frac{\partial E(Y_i)}{\partial X_i} = \phi(X_i\beta/\sigma)\,\frac{\partial E(Y_i \mid Y_i^* > 0)}{\partial X_i} + E(Y_i^* \mid Y_i > 0)\,\frac{\partial \phi(X_i\beta/\sigma)}{\partial X_i} \tag{26}$$

Die interpretierbaren Meßgrößen sind im Vergleich zum linearen Regressionsmodell wesentlich komplizierter.

4.6. Eigenschaften der Schätzer

Die Schätzer der binären Choice-, Tobit- und zweistufigen Heckman-Schätzung sind – unter bestimmten Regularitätsannahmen über die Dichtefunktion – zwar konsistent und asymptotisch normalverteilt, aber von unterschiedlicher Schätzgenauigkeit.

Schätzer der binären Choice-Modelle sind nur dann asymptotisch effizient, wenn nicht mehr Informationen vorliegen als in den Choice-Modellen berücksichtigt sind. Bei zusätzlichen Informationen über die Ausgabenhöhe liefert lediglich die Tobit-Schätzung, die diese zusätzlichen Informationen verarbeitet, asymptotisch effiziente Schätzer. Die zweistufigen Heckman-Schätzer sind nicht asymptotisch effizient, weil die Störgrößen einer spezifischen Form von Heteroskedastizität genügen. Man kann diese Heteroskedastizität im Rahmen einer gewichteten Schätzung berücksichtigen (*Heckman* 1976). Derart gewichtete Heckman-Schätzer sind dennoch mit höheren Schätzfehlern als der Tobit-Schätzer behaftet. Simulationsstudien (*Wales / Woodland* 1980; *Paarsch* 1984) zeigen, daß recht große Effizienzunterschiede bestehen können.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Ferner ist die Konsistenz für alle Schätzer nur garantiert, solange das Modell richtig spezifiziert ist, d.h. insbesondere die Annahme einer Normalverteilung der Störgröße und/oder die unterstellte Homoskedastizität gilt. Der Überprüfung z.B. der Normalverteilungsannahme kommt daher eine größere Bedeutung zu als im klassischen Regressionsmodell.

Tests auf allgemeine Fehlspezifikation können in Form eines Fehlspezifikations-Test nach *Hausman* 1978 oder mit Hilfe des von *White* 1982 vorgeschlagenen Informationsmatrix-Tests erfolgen. Als Test auf Normalverteilung kommt u.a. ein Test von *Bera / Jarque / Lee* 1984 oder ein Test anhand sogenannter Edgeworthreihen (*Smith* 1987) in Betracht.

Die Annahme der Homoskedastizität kann überprüft werden, indem in einem allgemeineren Modell eine spezielle Form von Heteroskedastizität zugelassen wird. Es mag unterstellt werden, daß zwischen den Individuen die Varianzen der Störgrößen in Abhängigkeit bestimmter Variablen Z_i variieren, z.B. in Form von $\sigma_i^2 = \sigma^2 \exp(Z_i \delta)$. Eine Überprüfung der Homoskedastizitätsannahme entspricht in diesem Fall einem Test der Hypothese H_o: $\delta = 0$, der als Lagrange-Multiplikator-Test (Score-Test) durchgeführt werden kann. Einen Survey über Testmethoden in Querschnittsmodellen findet der Leser bei *Pagan / Vella* 1989.

4.7. Schätzung bei Fehlspezifikation

Was ist zu tun, wenn sich die unterstellten Modellannahmen als falsch erweisen? Ist lediglich die Annahme der Homoskedastizität verletzt, dann kann ein neues Modell geschätzt werden, daß die Heteroskedastizität beseitigt. Wird jedoch die Normalverteilungsannahme abgelehnt, so fällt es schwer, ein alternatives Modell zu finden. Tests auf Normalverteilung modellieren lokale Abweichungen von der NV und eignen sich daher nicht als alternative Verteilung. *Powell* 1986 hat einen „symmetrisch getrimmten" KQ-Schätzer vorgeschlagen, der robust gegen diese Art von Fehlspezifikation ist. Dieser Schätzer setzt lediglich voraus, daß die Störgrößen identisch, unabhängig und symmetrisch verteilt sind, womit er sowohl gegenüber Heteroskedastizität als auch gegen Nicht-Normalität unempfindlich ist.

Da im beobachtbaren Modellteil des Tobit-Modells U_i bzw. Y_i die Symmetriebedingung nicht erfüllen, wird eine Symmetrisierung der Verteilung herbeigeführt, indem das Zensierungsschema, das im obigen Tobit-Modell nur die linke Seite betrifft, auch auf die rechte Seite der Verteilung angewendet wird. Das bedeutet, daß alle Werte $Y_i > 2X_i\beta$ auf die symmetrisch zensierten Werte $2X_i\beta$ gesetzt werden. Auf diese Weise ist sichergestellt, daß Y_i symmetrisch um $X_i\beta$ im Bereich $[0, 2X_i\beta]$ bzw. U_i symmetrisch um 0 im

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Intervall $[-X_i\beta, X_i\beta]$ verteilt sind und somit die Annahmen $E(U_i) = 0$ bzw. $E(Y_i) = X_i\beta$ erfüllt sind.

Die Schätzer können deshalb entsprechend der Kleinst-Quadrat-Methode aus einer „Normalgleichung"

$$0 \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{n} I(X_i\beta > 0) \quad [\min(y_i, 2X_i\beta) - X_i\beta]\, X_i \tag{27}$$

gewonnen werden, die die Stichproben-Kovarianz zwischen den „symmetrisch getrimmten Kleinst-Quadrat-Störgrößen" $I(X_i\beta > 0)$ $[\min(y_i, 2X_i\beta) - X_i\beta]$ und den Regressoren X_i gleich null setzt. $I(X_i\beta > 0)$ bezeichnet eine Indikatorfunktion, die den Wert 1 annimmt, sofern die Bedingung $X_i\beta > 0$ gilt und anderweitig gleich 0 ist.

Diese Schätzer sind konsistent, asymptotisch effizient und asymptotisch normalverteilt, wenn gewisse, im Vergleich zum Regressionsmodell wesentlich strengere Regularitätsannahmen gelten. Beispielsweise implizieren diese Regularitätsbedingungen, daß $X_i\beta > 0$ zu gelten hat; Beobachtungen, die diese Forderung nicht erfüllen, sind deshalb aus der Regression auszuschließen.

Simulationsstudien von *Powell* 1986 zeigen, daß sein Schätzer dem ML-Schätzer in endlichen Stichproben ($n = 200$) selbst nur dann überlegen ist, wenn die Fehlspezifikation hinreichend groß ist.

4.8. Modellerweiterungen

Verallgemeinerungen des binären Choice-Modells sind Modelle, die anstelle einer „Ja-Nein"-Entscheidung das Wahlverhalten bezüglich mehrerer Alternativen untersuchen. Beliebt sind in diesem Zusammenhang „genestete" multinomiale Logit-Modelle (*McFadden* 1984).

Die allgemeinste Form einer Erweiterung liefert aber ein interdependentes Gleichungssystem, das sich sowohl aus (binären und/oder multinominalen) Choice-, als auch aus Tobit-Gleichungen zusammensetzen kann. Die Schätzung eines solchen Gleichungssystems erfolgt ähnlich wie im traditionellen interdependenten Modell (*Amemiya* 1985). Zunächst wird das System in seine reduzierte Form überführt, so daß jede Gleichung separat als Choice- bzw. Tobit-Modell geschätzt werden kann. Anschließend erfolgt eine Ermittlung der Strukturparameter anhand geschätzter Reduzierter-Form-Koeffizienten, vorausgesetzt die Identifikation ist gewährleistet.

Darüber hinaus ist aber auch eine Verallgemeinerung des Modellteils $X_i\beta$ möglich. So kann anstelle der linearen eine nichtlineare Kurvenform $f(X_i; \beta)$ treten.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Verallgemeinerungen des bisherigen Tobitmodells wurden insbesondere verwendet, um das individuelle Arbeitsangebot (y_1) und den individuellen Lohnsatz (y_2) simultan zu erklären. Im einfachsten Fall ist die *strukturelle Form* des latenten Modells rekursiv,

$$\begin{aligned} y_{1i}^{*} &= \gamma y_{2i} + \beta_1' x_{1i} + u_{1i} \\ y_{2i}^{*} &= \beta_2' x_{2i} + u_{2i} \qquad \text{mit} \quad (u_1 u_2) \sim N(0, \Sigma_u) \\ y_{1i} &= y_{1i}^{*} \quad \text{und} \quad y_{2i} = y_{2i}^{*} \qquad \text{für} \quad y_{1i}^{*} > 0 \\ y_{1i} &= y_{2i} = 0 \qquad \text{für} \quad y_{1i}^{*} \leq 0 . \end{aligned}$$

Die *reduzierte Form* dieses Modells lautet:

$$\begin{aligned} y_{1i}^{*} &= \gamma \beta_2' x_{2i} + \beta_1' x_{1i} + v_i \qquad \text{mit} \quad v_i = u_{1i} + \gamma u_{2i} \\ y_{2i}^{*} &= \beta_2' x_{2i} + u_{2i} \qquad \text{mit} \quad (v, u) \sim N(0, \Sigma_v). \end{aligned} \tag{18}$$

Dabei ist $y_{1i}^{*} > 0$ die Partizipationsbedingung, d.h. Arbeitsangebot und Lohnsatz werden nur beobachtet, wenn das Individuum arbeitet, das latente Arbeitsangebot also positiv ist. Durch die rekursive Struktur vermeidet man eine in y_{1i} quadratische Budgetrestriktion

$$c_i = y_{1i} \cdot y_{2i} + x_i \tag{29}$$

mit c_i = realer Konsum und x_i = reales Einkommen. (vgl. *Bartenwerfer* 1990, 42). Die Schätzung des Modells geht von der Likelihoodfunktion

$$L = \prod_{i=1}^{m} P(y_{1i}^{*} \leq 0) \prod_{i=m+1}^{n} P(y_{1i} = y_{1i}^{*}, y_{2i} = y_{2i}^{*}) \quad \text{aus.} \tag{30}$$

Eine Maximierung dieser Likelihoodfunktion bezüglich der reduzierten Form-Parameter erfolgt mit Hilfe gängiger Iterationsalgorithmen, wie z.B. dem Newton-Verfahren, dem Davidon-Fletcher-Powell-Verfahren oder dem Verfahren von Berndt, Hall, Hall und Hausmann. Diese Verfahren konvergieren nicht notwendig zum globalen Maximum und erfordern einen sehr hohen Rechenaufwand. Verschiedene Autoren (z.B. *Bundell / Ham / Meghir* 1987) haben daher die Entscheidung über Erwerbspartizipation und Arbeitsangebot ohne die Lohnfunktion geschätzt und somit das univariate Tobitmodell benutzt. Die Lohngleichung dient dabei nur dazu, für die m erwerbslosen Personen die nichtbeobachtbaren Löhne zu prognostizieren.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

4.9. Empirische Arbeiten

Für die Bundesrepublik liegen neuere empirische Arbeiten anhand von Querschnittsdaten u.a. für das Arbeitsangebotsverhalten von Frauen (*Merz* 1990; *Franz* 1985) sowie für das Arbeitsangebotsverhalten allgemein von *Bartenwerfer* 1990 vor. Allokative Wirkungen von Steuern haben insbesondere *van Essen* et al. 1988 und *Kaiser* 1989 untersucht. *Pohlmeier* 1989 analysiert Daten des Ifo-Tests über Innovationstätigkeit.

5. Modelle für Paneldaten

Zeitreihen von individuellen Unternehmensdaten stehen in der Bundesrepublik u.a. in Form der Ifo-Konjunkturtestdaten zur Verfügung. Für die privaten Haushalte gibt es solche Zeitreihen von Querschnitten vor allem für Daten des Erwerbsverhaltens und der sozialen Sicherung im sogenannten „sozioökonomischen Panel", das vom Sfb 3 an den Universitäten Frankfurt und Mannheim initiiert und vom DIW weitergeführt wird. Es liegen erste empirische Analysen des individuellen Erwerbsverhaltens anhand dieser Daten vor (vgl. *Hujer / Schnabel* 1990). Es sollen hier einige methodische Probleme kurz erläutert werden, da die Analyse von Paneldaten voraussichtlich auch in Deutschland in den nächsten Jahren wesentlich an Bedeutung gewinnen wird. Wir können uns aber auf das Wesentliche beschränken, da es insbesondere mit den Arbeiten von *Hsiao* 1986 und *Maddala* 1987 gute Darstellungen der Probleme gibt.

Das einfachste Tobitmodell für Paneldaten hat die Form (31)

(31)
$$\begin{aligned} y_{it}^{*} &= \beta' x_{it} + \alpha_i + u_{it} && \text{für} \quad i = 1,\ldots,N;\ t = 1,\ldots,T \\ \text{und } y_{it}^{*} &= y_{it} && \text{für} \quad y_{it}^{*} > 0 \\ &= 0 && \text{für} \quad y_{it}^{*} \leq 0. \end{aligned}$$

Es treten zusätzlich die Größen α_i auf, um haushaltsspezifische Unterschiede zu berücksichtigen, die über die Zeit konstant sind und nicht explizit beobachtet wurden, d.h. nicht in x_{it} enthalten sind. Es ist die Schätzung dieser α_i, die den wesentlichen Unterschied zum Tobitmodell für Querschnittsdaten ausmacht. Dabei werden zwei Grundmodelle unterschieden,

1. das Modell fester Effekte (konstanter α_i) und
2. das Modell zufälliger Effekte α_i.

Beide Modelle sollen zunächst kurz unter Vernachlässigung der Zensierung (d.h. für $y_{it} = y_{1i}^{*}$ für $0 \leq y_{it}^{*} < 0$) dargestellt werden.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Wir fassen die T Beobachtungen eines jeden Haushalts zu Vektoren y_i, u_i und Matrixen X_i zusammen. Das Modell lautet dann

$$y_i = X_i\beta + e\alpha_i + u_i; \qquad i = 1,2,\ldots,N, \tag{32}$$

wobei e ein $(1 \times T)$-Einheitsvektor ist.

Für die Störgrößen u_i treffen wir die klassischen Annahmen

$$E(u_i) = 0; \qquad E(u_i u_i') = \sigma^2 I_T; \qquad E(u_i u_j') = 0 \qquad \text{für} \quad i \neq j.$$

5.1. Das Modell fester Effekte

In diesem Fall werden die α_i als konstante Parameter betrachtet und mit Hilfe von 0,1-Variablen für jeden einzelnen Haushalt mitgeschätzt.

Die KQ-Schätzung dieses Systems von N-Gleichungen mit über die Gleichungen konstanten Parametern β erhält man durch zweistufige Minimierung von

$$S = \sum_{i=1}^{N} u_i' u_i = \sum_{i=1}^{N} (y_i - X_i\beta - e\alpha_i)'(y_i - X_i\beta - e\alpha_i)$$

zunächst bezüglich α_i und dann nach Substitution von $\hat{\alpha}_i$ in S bezüglich β. Die Lösungen sind

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_i &= \bar{y}_i - \beta'\bar{x}_i \quad \text{mit} \quad \bar{y}_i = \sum_t y_{it}/T; \qquad \bar{x}_i = \sum_t x_{it}/T \\ \hat{\beta} &= \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left(x_{it} - \bar{x}_i\right)\left(x_{it} - \bar{x}_i\right)' \right]^{-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left(x_{it} - \bar{x}_i\right)\left(y_{it} - \bar{y}_i\right). \end{aligned} \tag{33}$$

Die 0,1-Variablen bewirken bei der Schätzung von β nur eine Korrektur der Daten um den personenbezogenen Mittelwert. Die Schätzung von β ist eine KQ-Schätzung von

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_N \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \vdots \\ \tilde{X}_N \end{bmatrix} \beta + \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \text{mit } \tilde{y}_i = y_i - \bar{y}_i,\ \tilde{X}_i = X_i - \bar{X}_i.$$

Man bezeichnet diesen Schätzer als *„internen" Schätzer,* da er nur die Abweichungen vom personenbezogenen Mittel benutzt. Er ist identisch mit einer KQ-Schätzung der transformierten Gleichung (*Hsiao* 1986)

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

(34) $$Qy_i = QX_i\beta + Qe\alpha_i + Qu_i \quad \text{mit} \quad Q = Q'Q = I_T - \frac{1}{T}ee',$$

d.h. $$\hat{\beta} = \left[\sum_{i=1}^{N} X_i'QX_i\right]^{-1} \sum_{i=1}^{N} X_i'Qy_i.$$

5.2. Das Modell zufälliger Effekte (Varianz-Komponenten-Modell)

Im Modell zufälliger Effekte betrachtet man α_i als Zufallsvariable mit

$$E(\alpha_i) = 0; \quad E(\alpha_i^2) = \sigma_\alpha^2; \quad E(\alpha_i\alpha_j) = 0 \quad \text{für } i \neq j; \quad E(\alpha_i u_{it}) = 0.$$

Das Modell lautet dann

(35) $$y_i = X_i\beta + v_i \qquad \text{mit } v_i = e\alpha_i + u_i$$

$$E(v_iv_i') = \Omega = \sigma^2 I_T + \sigma_\alpha^2 ee' \qquad \text{und}$$

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}\left[I_T - \Theta_\alpha ee'\right]; \qquad \Theta_\alpha = \sigma_\alpha^2 / \left(\sigma^2 + T\sigma_\alpha^2\right).$$

Eine Aitken-Schätzung gibt formal eine ähnliche Lösung wie zuvor mit Θ_α an Stelle von $1/T$. Durch die Zerlegung

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}\left[Q + \frac{\Theta}{T}ee'\right] \qquad \text{mit} \quad \Theta = \sigma / \left(\sigma^2 + T\sigma_\alpha^2\right)$$

läßt sich der Aitken-Schätzer $\hat{\beta}_A$ wie folgt darstellen:

(36) $$\hat{\beta}_A = \left[\sum_{i=1}^{N}\left(X_i'QX_i + \frac{\Theta}{T}\bar{X}_i'\bar{X}_i\right)\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(X_i'Qy_i + \frac{\Theta}{T}\bar{X}_i'\bar{y}_i\right)\right].$$

Der Aitken-Schätzer ist also ein *gemischter Schätzer* des „internen" Schätzers für das Modell fester Effekte und des „externen" Schätzers, der eine KQ-Schätzung des Modells

$$\bar{y}_i = \bar{X}_i\beta + \bar{u}_i$$

ist. Für $T \to \infty$ ($\Theta = 0$) liefern beide Modelle identische Ergebnisse.

Neuere Vorschläge laufen darauf hinaus, das Modell zufälliger Effekte um einen Satz nur über die Individuen variierender Variablen Z_i zu erweitern:

$$y_{it} = X_{it}'\beta + Z_i'\alpha + \alpha_i + u_{it}.$$

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Dieses Modell wird dann mit Hilfe von Instrumentvariablen geschätzt. Dabei wird das Modell zunächst wieder in ein Modell mit skalarer Kovarianzmatrix transformiert:

$$\Omega^{-1/2} y_i = \Omega^{-1/2} X_i \beta + \Omega^{-1/2} Z_i \gamma + \Omega^{-1/2} (\alpha_i + u_i). \tag{37}$$

Die Variablen-Matrizen $X_i = (X_{1i}, X_{2i})$ und $Z_i = (Z_{1i}, Z_{2i})$ werden so partitioniert, daß X_{1i} und Z_{1i} nicht mit α_i korrelieren. *Hausman / Taylor* 1981 schätzen Gleichung (37) mit den Instrumentvariablen

$$A = (Q, X_{1i}, Z_{1i}).$$

Amemiya / MaCurdy 1986 verwenden demgegenüber als Instrumente

$A^* = (Q, X_{1i}^{\bullet}, Z_{1i})$ wobei $X_{1i}^{\bullet}$ eine Matrix mit T Zeilen $[X_{1,i1}, X_{1,i2}, \ldots, X_{1,iT}]$ ist.

Breusch / Mizon / Schmidt 1989 schlagen hingegen als Instrumente

$$A^{**} = (QX_i, ee'X_{1i}, (QX_i)^*, Z_{1i}) \text{ vor.}$$

Sie zeigen, daß der letzte Schätzer asymptotisch eine größere Effizienz besitzt.

Es ist also die bei Paneldaten meist geringe Anzahl der Beobachtungsperioden (T), die das Modell zufälliger Effekte attraktiv macht. Im Modell fixer Effekte sind die Parameter α_i nicht konsistent schätzbar, da mit $N \to \infty$ die Zahl dieser Parameter gegen unendlich geht. Das Modell zufälliger Effekte erlaubt es, die Zahl der Parameter des Modells über die strengen Verteilungsannahmen für α_i drastisch zu reduzieren. Dies könnte im Modell fester Effekte auch durch Annahme kohortenspezifischer α_i geschehen.

Eine alternative Interpretation betrachtet das Modell fixer Effekte als Inferenz nur für die gegebene Stichprobe, während erst durch die Verteilungsannahme über α_i eine Inferenz bezüglich der Grundgesamtheit ermöglicht wird. Dies ist bei der einfachen Verteilungsannahme zumindest blauäugig, wenn man bedenkt, daß Paneldaten meist aus mehrstufigen, mehrfach geschichteten Stückproben gewonnen werden. Mehr als eine vereinfachte Beschreibung des vorliegenden Panels kann man bei dieser Art der Analyse wohl ohnehin nicht erwarten.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

5.3. Schätzung des Tobitmodells mit fixen Effekten

Die zu maximierende logarithmierte Likelihoodfunktion des Tobitmodells mit festen Effekten lautet

$$\ln L = \sum_i \sum_t \left(1 - d_{it}\right) \ln \phi \left(\frac{-\alpha_i - \beta' x_{it}}{\sigma} \right) + \sum_i \sum_t d_{it} \left[-\frac{1}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \left(y_{it} - \alpha_i - \beta' x_{it} \right)^2 \right] \tag{38}$$

$$\text{mit } d_{it} = \begin{cases} 1 & \text{für } y_{it}^* > 0 \\ 0 & \text{für } y_{it}^* \leq 0 \end{cases}.$$

Heckmann / MaCurdy 1980 maximieren diese Likelihoodfunktion analog zum obigen Regressionsmodell mit fixen Effekten in zwei Schritten mittels des Newton-Raphson-Verfahren (vgl. *Judge* u. a. 1985, 955), nämlich

1. bezüglich α_i (bei gegebenen Anfangswerten für β und σ)
2. bezüglich β und σ^2 bei gegebenen $\hat{\alpha}_i$ des ersten Schrittes.

Dabei müssen die Haushalte, für die $d_{it} = 0$ (alle t) gilt, aus der Stichprobe eliminiert werden, da α_i für diese Haushalte nicht existiert. *Börsch-Supan* 1990 hat diesen Ansatz u. a. zur Analyse der Wohnungswahl verwendet.

5.4. Schätzung des Tobitmodells mit zufälligen Effekten

Heckmann / MaCurdy 1980 argumentieren, daß das Modell mit zufälligen Effekten zwar für eine Probitanalyse nicht aber für eine Tobitanalyse geeignet sei, da die Variablen α_i mit den erklärenden Variablen x_i korrelieren. *Chamberlain* 1985 und *Jacubson* 1988 verwenden ein Modell, das eine solche Abhängigkeit der α_i von X_i mit $\alpha_i = \sum_{s=1} c_s x_{is}$ unterstellt.

$$y_{it}^* = \beta' x_{it} + \sum_{s-1}^{T} c_s x_{is} + v_{it} \qquad \text{mit} \quad E(v_{it} v_{is}) = \sigma_{ts} \tag{39}$$

$$\text{bzw. } y_{it}^* = \sum_{s=1}^{T} \Pi_{st} x_{is} + v_{it}$$

mit den Restriktionen

$$\Pi_{st} = \begin{cases} c_s & \text{für} \quad t \neq s; \\ c_s + \beta' & \text{für} \quad t = s \end{cases} \qquad s, t = 1, \ldots, T.$$

Chamberlain 1985 schätzt zunächst die unrestringierte reduzierte Form durch gleichungsweise ML-Schätzung und oktroyiert die Restriktionen auf

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Π_{st} mittels einer „minimum-distance"-Schätzung (*Malinvand* 1970) in einem zweiten Schritt. Für $\delta = (\beta', c_1, \ldots, c_T)$ mit den Restriktionen $\Pi = f(\delta)$ minimiert man im 2. Schritt

$$[\hat{\Pi} - f(\delta)]' \, \hat{\Omega}^{-1} \, [\hat{\Pi} - f(\delta)]$$

bezüglich δ. Dies läuft auf ein iteratives Verfahren gemäß

$$\delta^{(i+1)} = \delta^{(i)} + \lambda [F' \hat{\Omega}(\hat{\delta}^{(i)})^{-1} F]^{-1} F' \hat{\Omega}(\hat{\delta}^{(i)})^{-1} \hat{\Pi} \tag{40}$$

mit $F = \partial f / \partial \delta'$ hinaus.

Jacubson 1988 hat diesen Ansatz für die Schätzung eines individuellen Lebenszyklus-Arbeitsangebotsmodells verwendet.

Hujer / Schnabel 1990 haben u.a. diesen Ansatz verwendet, um anhand des sozioökonomischen Panels ein entsprechendes Tobit-Modell für das individuelle Arbeitsangebotsverhalten in der Bundesrepublik zu schätzen.

5.5. Dynamische Analysen anhand von Paneldaten

Paneldaten sind Zeitreihen von Querschnitten. Die beobachteten Zustände der vorhergehenden Perioden sind daher ein wesentlicher Erklärungsfaktor für den heutigen Zustand, d.h. der latente Modellteil sollte die folgende Form haben:

$$y^*_{it} = \beta_o y_{i,t-1} + \beta' x_{it} + \alpha_i + u_{it}.$$

Die Probleme einer Schätzung dieses Modells sprengen den vorliegenden Rahmen. Der interessierte Leser sei insbesondere auf die Arbeiten von *Anderson / Hsiao* 1982 sowie von *Bhargava / Sargan* 1983 verwiesen. *Hsiao* 1986 behandelt diesen Fall in Form einer Lagverteilung der x_{it}.

Ein alternatives Instrument der dynamischen Analyse ist die Modellierung der Dauer bestimmter Ereignisse (T) wie z.B. der Erwerbslosigkeit mit Hilfe eines Hazardratenmodells. Die Hazardrate $\lambda^i(t)$ ist der Grenzwert der Wahrscheinlichkeit dafür, daß die i-te Person im Zeitintervall $\{t, t + \Delta t\}$ den Zustand (z.B. der Erwerbslosigkeit) verläßt, bezogen auf das infinitesimale Zeitintervall Δt:

$$\lambda^i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P\left(t \leq T < t + \Delta t \mid T \geq t \right), \tag{41}$$

wobei $T (T \geq 0)$ die Dauer des Ereignisses ist und $F(t) = P(T \leq t)$ bzw. $f(t)$ die zugehörige Verteilungs- bzw. Dichtefunktion bezeichnet.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Das bekannteste Beispiel ist zweifellos die Zeitspanne bis zum nächsten Ereignis, wenn in jedem infinitesimalen Zeitintervall Δt die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ($x = 0$ oder 1) einem Poissonprozeß mit

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

folgt. Die Dauer bis zum nächsten Ereignis ist dann dadurch gekennzeichnet, daß in $(t-1)$ Zeiträumen der Länge Δt keine Zustandsänderung (Ereigniswechsel) auftritt ($x = 0$) aber im t-ten Zeitraum ein Zustandswechsel auftritt. Diese Wahrscheinlichkeitsdichte $f(t)$ ist wegen der Unabhängigkeit der Ereignisse im Poissonprozeß die folgende Exponentialverteilung:

$$(42) \qquad f(t) = \left[\prod_{i=1}^{t-1} \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} \right] \cdot \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \qquad \text{mit} \quad \lambda = c \cdot \Delta t \quad \text{und} \quad t > 0.$$

Der Exponentialverteilung liegt also eine konstante Hazardrate λ zugrunde. Die Überlebensfunktion (bzw. 1-Verteilungsfunktion) der Exponentialverteilung ist

$$S(t) = P(T > t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}.$$

Damit gilt auch $f(t) = \lambda S(t)$ bzw. $\lambda = f(t)/(1 - F(t))$.

Die Annahme einer konstanten Hazardrate ist für empirische Analysen z. B. der Dauer der Arbeitslosigkeit zu restriktiv. Eine einfache Verallgemeinerung ist die Annahme

$$\lambda(t) = f(t)/(1 - F(t)) = \lambda \alpha t^{\alpha-1}$$

bzw. die Annahme einer Weibull-Verteilung (*Lancaster* 1979) mit

$$(43) \qquad f(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^{\alpha}}; \; F(t) = 1 - e^{-\lambda t^{\alpha}}.$$

Eine höhere Flexibilität erhält man durch die Annahme einer von anderen beobachteten Merkmalen x_i des Individuums i abhängigen Hazardrate gemäß

$$(44) \qquad \lambda^i(t \mid x_i) = \lambda(t) \cdot \exp(\beta' x_i) \qquad \text{mit} \quad \lambda(t) = \alpha t^{\alpha-1}$$

wie bei *Lancaster* 1979, *Heckmann / Borjas* 1980 oder *Flinn / Heckmann* 1982. Für die Analyse einer über die Zeit variierenden Harzardrate ist die folgende Beziehung wichtig, die sich aus der Integration der Hazardrate und Einsetzen von $\lambda(t) = f(t)/(1 - F(t))$ ergibt:

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

$$P(T > t) = S(t) = \exp\left(-\int_o^t \lambda(z)\,dz\right) \quad \text{bzw.}$$

$$P(T_i > t_i) = S_i(t_i \mid x_i) = \exp\left(-\exp(\beta' x_i)\int_o^{t_i} \lambda(z)\,dz\right).$$

Es gilt dann

$$f_i(t_i) = \lambda^i(t_i)e^{-\lambda^i(t_i)}. \tag{45}$$

Beobachtungen von Ereignissen sind nun dadurch gekennzeichnet, daß der Anfang bzw. das Ende eines Ereignisses (z.B. der Erwerbslosigkeit) für einzelne Individuen nicht beobachtet sind. Man spricht dann von links- bzw. rechtszensierten Daten. Nehmen wir zur Vereinfachung an, daß die Daten nur rechtszensiert sind. Diese Zensierung muß dann bei der Schätzung des Modells berücksichtigt werden, um verzerrte Schätzungen zu vermeiden. Dies geschieht über die entsprechende Likelihoodfunktion, die als Produkt der Likelihoodfunktion der n nicht zensierten Individuen und der $N - n$ zensierten Individuen geschrieben wird (vgl. *Amemiya* 1985).

$$\begin{aligned} L &= \prod_{i=1}^{n} f_i(t_i \mid x_i) \cdot \prod_{i=n+1}^{N} S_i(t_i \mid x_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \lambda^i(t_i \mid x_i) \prod_{i=1}^{N} S_i(t_i \mid x_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i)\ \exp(\beta' x_i) \prod_{i=1}^{N} \exp\left[-\exp(\beta' x_i)\int_o^{t_i} \lambda(z)\,dz\right] \\ &= \prod_{i=1}^{n} \exp(\beta' x_i)\,\lambda(t_i) \exp\left[-\sum_{i=1}^{N} \exp(\beta' x_i)\int_o^{t_i} \lambda(z)\,dz\right] \end{aligned} \tag{46}$$

Eine Maximierung dieser Likelihoodfunktion kann nicht nur bezüglich der Parameter β erfolgen sondern muß auch bezüglich der Funktion $\lambda(t_i)$ erfolgen. *Cox* 1975 hat zur Vereinfachung die Maximierung eines nur von β abhängigen Teils der Likelihoodfunktion (L_1) vorgeschlagen.

$$L_1 = \prod_{i=1}^{n} \left[\exp(\beta' x_i) \Big/ \sum_{h \varepsilon R(t_i)} \exp(\beta' x_i)\right] \tag{47}$$

Der Nenner dieses Ausdrucks normiert die „partielle" Likelihoodfunktion auf alle diejenigen Individuen, die zwar nicht zensiert sind, deren Ausgangszustand aber unmittelbar vor t_i noch nicht beendet ist. Man kann zeigen, daß dieser Cox-Schätzer nicht die volle Effizienz besitzt (*Amemiya* 1985).

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Anwendungen dieses Ansatzes für die Bundesrepublik finden sich u.a. in *Blossfeld / Hamerle / Mayer* 1989 für das Berufswechselverhalten von Männern, in *Hujer / Schneider* 1988 und *Möller* 1990 sowie *Galler* u.a. 1990 über die Dauer der Arbeitslosigkeit und in *Wagner* 1989 über die räumliche Mobilität von Individuen. Dabei verwendet Möller Daten der Bundesanstalt für Arbeit über die Dauer der Arbeitslosigkeit.

6. Zusammenfassung

Der vorliegende Beitrag sollte auf ausgewählten Gebieten der Ökonometrie einen Überblick über neuere Entwicklungen vermitteln. Die Fülle der Publikationen erlaubt es einem Einzelnen kaum, alle Forschungsgebiete der Ökonometrie zu verfolgen. Es wurde daher versucht, eine reine Aufzählung der neueren Literatur zu vermeiden und die ausgewählten Gebiete soweit darzustellen, daß der Leser einen Einstieg in das Studium der zitierten theoretischen wie auch empirischen Arbeiten findet. Dabei wurden Gebiete ausgewählt, die in Nachschlagewerken wie in *Judge* et al. 1985 nach meiner Einschätzung zu kurz kommen. Außerdem wurde Wert darauf gelegt, die neuen Methoden gegenüber den geläufigen Methoden abzugrenzen.

Literatur

Alexander, V. (1990), Fiscal Policy and Potential Output in a Model with Rational Expectations. Weltwirtschaftliches Archiv 126, 432 - 455.

Amemiya, T. (1974), The Nonlinear Two-Stage Least-Squares Estimator. Journal of Econometrics 2, 105 - 110.

— (1979), The Estimation of a Simultaneous Equation Tobit-Model. International Economic Review 20, 169 - 181.

— (1984), Tobit models: A Survey. Journal of Econometrics 24, 3 - 61.

— (1985), Advanced Econometrics. Oxford.

Amemiya, T. / *MaCurdy,* T. E. (1986), Instrumental Variable Estimation of an Error Component Model. Econometrica 54, 869 - 881.

Anderson, T. W. / *Hsiao,* C. (1982), Formulation and Estimation of Dynamic Models Using Panel Data. Journal of Econometrics 18, 67 - 82.

Baille, R. T. / *Selover,* D. D. (1987), Cointegration and Models of Exchange Rate Determination. International Journal of Forecasting 3, 43 - 51.

Banerjee, A. / *Dolado,* J. / *Hendry,* D. F. / *Smith,* G W. (1986), Exploring Equilibrium Relationships in Econometrics through Static Models: Some Monte Carlo Evidence. Oxford Economic Papers 48, 253 - 277.

Bartenwerfer, J. (1990), Mikroökonometrische Querschnittsanalysen des individuellen Erwerbsverhaltens. Frankfurt, Bern.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Bera, A. K. / *Jarque,* G. M. / *Lee,* L. F. (1984), Testing the Normality Assumption in Limited Dependent Variable Models. International Economic Review 25, 563 - 578.

Berndt, E. R. / *Hall,* B. H. / *Hall,* R. H. / *Hausman,* J. A. (1974), Inference in Nonlinear Structural Models. Annals of Economics and Social Measurement 3/4, 653 - 665.

Bewley, R. A. (1979), The Direct Estimation of the Equilibrium Response in a Linear Dynamic Model. Economics Letters 3, 357 - 362.

Bhargava, A. / *Sargan,* J. D. (1983), Estimating Dynamic Random Effect Models From Panel Data Covering Short Time Periods. Econometrica 51, 1635 - 59.

Blossfeld, H.-P. / *Hamerle,* H. / *Mayer,* K. U. (1989), Hazardraten-Modelle in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften. Allgemeines Statistisches Archiv 73, 213 - 238.

Blundell, R. W. (ed.) (1987), Specification Testing in Limited and Discrete Dependent Variable Models. Journal of Econometrics 34, 1 - 274.

— (1988), Consumer Behavior, Theory and Empirical Evidence – A Survey. The Economic Journal, 88, 16 - 65.

Blundell, R. W. / *Ham,* J. / *Meghir,* C. (1987), Unemployment and Female Labor Supply. The Economic Journal 87, 44 - 64.

Blundell, R. W. / *Walker,* I. (1982), Modelling the Joint Determination of Household Labour Supplies and Commodity Demands. The Economic Journal 82, 351 - 364.

Börsch-Supan, A. (1990a), Panel Data Analysis of Housing Choices. Regional Science and Urban Economics 20, 65 - 82.

— (1990b), Panel Data Analysis of the Beveridge-Curve: Is there a Macroeconomic Relation between the Rate of Unemployment and the Vacancy Rate? Discussion Paper, Universität Mannheim.

Breusch, T. S. / *Mizon,* G. E. / *Smith,* P. (1989), Efficient Estimation using Panel Data. Econometrica 57, 695 - 700.

Broze, L. / *Gourieroux,* C. / *Szarfaz,* A. (1985), Solutions of Linear Rational Expectations Models. Econometric Theory 1, 341 - 368.

Buscher, H. S. (1986), Modelle der neuen klassischen Makroökonomie. Theoretische Darstellung und empirische Ergebnisse. München.

Canarella, G. / *Pollard,* S. K. / *Lai,* K. S. (1990), Cointegration between Exchange Rates and Relative Prices: Another View. European Economic Review 34, 1303 - 1322.

Carruth, A. / *Schnabel,* K. (1990), Empirical Modelling of Trade Union Growth in Germany, 1956 - 1986: Traditional versus Cointegration and Error Correction Methods. Weltwirtschaftliches Archiv 126, 326 - 346.

Chamberlain, G. (1985), Panel Data, in: Z. Griliches and M. Intriligator, Handbook of Econometrics 2. Amsterdam, 1248 - 1318.

Cochrane, J. H. (1988), How Big is the Random Walk in GNP? Journal of Political Economy 96, 893 - 920.

Corbae, D. / *Ouliaris,* S. (1988), Cointegration and Tests of Purchasing Power Parity. Economics Letters 22, 508 - 511.

Cox, D. R. (1975), Partial Likelihood, Biometrika 62, 269 - 276.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Cumby, R. E. / *Huizinga,* J. / *Obstfeld,* M. (1983), Two-Step Two-Stage Least Squares Estimation in Models with Rational Expectations. Journal of Econometrics 21, 333 - 355.

Davidson, J. / *Hall,* S. (1989), Cointegration in Recursive Systems: The Structure of Wage and Price Determination in the United Kingdom. Discussion Paper No. EM/89/191, London School of Economics.

Dickey, D. A. / *Fuller,* W. A. (1979), Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root. Journal of the American Statistical Association 74, 427 - 431.

— / — (1981), Likelihood Ratio Tests for Autoregressive Time Series with a Unit Root. Econometrica 49, 1057 - 1072.

Enders, W. (1988), ARIMA and Cointegration Tests of PPP under Fixed and Flexible Exchange Rate Regimes. Economics Letters 22, 504 - 508.

Engle, R. F. / *Granger,* C. W. (1987), Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing. Econometrica 55, 251 - 276.

Engle, R. F. / *Hendry,* D. / *Richard,* J. F. (1983), Exogeneity. Econometrica 51, 277 - 304.

van Essen, U. / *Kaiser,* H. / *Spahn,* P. B. (1988), Verteilungswirkungen der Einkommenssteuerreform 1986 - 1990. Eine Simulationsstudie für die Bundesrepublik Deutschland auf der Basis des Sozioökonomischen Panels. Finanzarchiv 46, 56 - 84.

Flinn, C. J. / *Heckman,* J. J. (1982), Models for the Analysis of Labor Force Dynamics. Advances in Econometrics 1, 35 - 95.

Franz, W. (1985), An Economic Analysis of Female Work Participation, Education and Fertility: Theory and Empirical Evidence for the FRG. Journal of Labor Economics 3, 218 - 234.

Fuller, W. A. (1976), Introduction to Statistical Time Series. New York.

Galler, H. P. / *Poetter,* U. (1990), Unobserved Heterogeneity in Models of Unemployment Duration, in: K. U. Mayer / N. Tuma (ed.), Event History Analysis in Life Course Research, Madison, 226 - 240.

Hansen, G. (1986), Der konjunkturelle Einfluß der Geld- und Fiskalpolitik in der Bundesrepublik Deutschland 1972 - 1982. Kyklos 39, 180 - 208.

— (1988), Analyse ökonomischer Gleichgewichte und cointegrierter Zeitreihen. Allgemeines Statistisches Archiv 72, 337 - 358.

— (1991a), Tests of Some Business Cycle Hypotheses under Rational Expectations. Weltwirtschaftliches Archiv 127 (forthcoming).

— (1991b), Hysteresis und Arbeitslosigkeit. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 208, 272 - 298.

Hansen, L. P. (1982), Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators. Econometrica 50, 1029 - 1054.

Hansen, L. P. / *Singleton,* K. L. (1982), Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectations Models. Econometrica 50, 1269 - 1286.

Harvey, A. C. (1985), Trends and Cycles in Macroeconomic Time Series. Journal of Business and Economic Statistics 3, 216 - 227.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Hatanaka, M. (1975), On the Global Identification of the Dynamic Simultaneous Equations Model with Stationary Disturbances. International Economic Review 16, 545 - 554.

Hausman, J. A. (1978), Specification Tests in Econometrics. Econometrica 46, 1251 - 1271.

Hausman, J. A. / *Taylor,* W. E. (1981), Panel Data and Unobservable Individual Effects. Econometrica 49, 1377 - 1398.

Hauschulz, W. (1991), Hysteresis und Cointegration. Diskussionspapier, Institut für Statistik und Ökonometrie der Universität Kiel.

Heckmann, J. J. (1976), The Common Structure of Statistical Models of Truncation, Sample Selection, and Limited Depended Variables and a Simple Estimator for such Models. Annals of Economic and Social Measurement 5, 475 - 492.

— (1984), Econometric Duration Analysis. Journal of Econometrics 24, 63 - 132.

Heckmann, J. J. / *Borjas,* G. J. (1980), Does Unemployment Cause Future Unemployment? Definition, Questions and Answers From a Continuous Time Model of Heterogenity and State Dependence. Economica 47, 247 - 283.

Heckmann, J. J. / *MaCurdy,* T. E. (1980), A Life-Cycle Model of Female Labor Supply. Review of Economic Studies 47, 47 - 74.

Hendry, D. F. / *Mizon,* G. E. (1990), Evaluating Dynamic Models by Encompassing the VAR. Applied Economics Discussion Paper Series. No. 102 University of Oxford.

Hsiao, C. (1986), Analysis of Panel Data. Cambridge (England).

Hujer, R. / *Schnabel,* R. (1990), Specification and Estimation of Life-Cycle Models of Labor Supply – A Microeconometric Analysis using West-German Panel Data and Regional Indicators. Working Paper, University of Frankfurt.

Hujer, R. / *Schneider,* H. (1988), Unemployment Duration as a Function of Individual Characteristica and Economic Trends, in: K. U. Mayer u. N. B. Tuma (ed.), Event History Analysis in Life Course Research. Madison (Wisconsin).

Jacubson, G. (1988), The Sensitivity of Labor Supply Parameter Estimates to Unobserved Individual Effects: Fixed- and Random-Effects Estimates in an Nonlinear Model Using Panel Data. Journal of Labour Economics 6, 302 - 329.

Jansen, D. (1991), Geld- und Fiskalpolitik und ihre konjunkturelle Wirkung. Ein empirischer Vergleich verschiedener Theorien. Frankfurt/M.

Johansen, S. (1988), Statistical Analysis of Cointegration Vectors. Journal of Economic Dynamics and Control 12, 231 - 254.

Judge, G. G. / *Griffiths,* W. E. / *Lütkepohl,* H. / *Lee,* T.-S. (1985), The Theory and Practice of Econometrics. New York.

Kaiser, H. (1989). Zur Messung allokativer und distributiver Effekte wohlfahrtsstaatlicher Maßnahmen. Sonderforschungsbereich 3, Arbeitspapier 283. Frankfurt, Mannheim.

Kaiser, H. / *van Essen,* U. / *Spahn,* P. B. (1989), Einkommenssteuerreform, Arbeitsangebot und ökonomische Wohlfahrt. Eine mikroökonomische Simulationsstudie für die Bundesrepublik Deutschland. Arbeitspapier Nr. 277, Sonderforschungsbereich 3. Frankfurt, Mannheim.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Ketterer, K.-H. / *Vollmer,* R. (1981), Tobin's q und private Investitionsausgaben. Einige analytische Aspekte und empirische Ergebnisse. ZWS 101, 153 - 180.

King, R. / *Plosser,* C. / *Stock,* J. / *Watson,* M. (1987), Stochastic Trends and Economic Fluctuations. Center for Economic Research Working Paper 79, University of Rochester.

Kirchgässner, G. (1988), Die Abhängigkeit der deutschen und schweizerischen von den internationalen Mineralölpreisen. Allgemeines Statistisches Archiv 72, 213 - 247.

Kohn, W. (1991), Eine ökonometrische Analyse von Wechselkursmodellen unter Berücksichtigung nichtstationärer Zeitreihen. Frankfurt/M.

Kudiß, R. (1984), Die Bestimmung des Produktionspotentials in Theorie und Empirie. Europäische Hochschulschriften. Frankfurt, New York.

Kugler, P. / *Müller,* U. (1987), Nonneutral Technical Change, Adjustment Costs and Rational Expectations: Empirical Results for West Germany, Paper presented at the Econometric Society Meeting. Copenhagen.

Kunst, R. / *Neusser,* K. (1990), Cointegration in a Macroeconomic System. Journal of Applied Econometrics 5, 351 - 365.

Lancaster, T. (1979), Econometric Methods for the Duration of Unemployment. Econometrica 47, 939 - 956.

Leidermann, L. (1980), Output Supply in the Open Economy: Some International Evidence. Review of Economics and Statistics 62, 180 - 189.

Loef, A. E. (1987), Reale Wechselkurse und realer zyklischer Output. Theoretisches Modell und empirische Analyse für die Bundesrepublik. Kredit und Kapital 20, 22 - 47.

Lübbers, R. (1981), Inflation, Beschäftigung und rationale Erwartungen, in: F. Voigt (Hrsg.), Untersuchungen über das Spar-, Giro- und Kreditwesen, Bd. 114.

Maddala, G. S. (1987), Limited Dependent Variable Models Using Panel Data. Journal of Human Resources 22, 307 - 337.

Malinvaud, E. (1970), Statistical Methods of Econometrics. Amsterdam.

McCallum, B. (1976), Rational Expectations and the Natural Rate Hypothesis: Some Consistent Estimates. Econometrica 44, 43 - 52.

McFadden, D. L. (1984), Econometric Analysis of Qualitative Response Models, in: Griliches, Z. / Intriligator, M. D. (ed.), Handbook of Econometrics Vol. II. North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford.

Merz, J. (1990), Female Labor Supply: Labor Force Participation, Market Wage Rate and Working Hours of Married and Unmarried Women in the Federal Republic of Germany. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 206, 240 - 270.

Möller, G. (1990), Unemployment and Deterioration of Human Capital. Empirical Economics 15, 199 - 215.

Monfort, A. / *Rabemananjara,* R. (1990), From a VAR Model to a Structural Model, with an Application to the Wage-Price Spiral. Journal of Applied Econometrics 5, 203 - 228.

Mosconi, R. / *Giannini,* C. (1990), Non-Causality in Cointegrated Systems: Representation, Estimation and Testing. Rapporto Interno, Politechnikum Mailand.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Nelson, C. R. / *Plosser,* C. I. (1982), Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series. Journal of Monetary Economics 10, 139 - 162.

Neumann, M. J. M. (1981), Der Beitrag der Geldpolitik zur konjunkturellen Entwicklung in der Bundesrepublik Deutschland 1973 - 1980. Kyklos 34, 405 - 431.

Olsen, R. J. (1978), Note on the Uniqueness of the Maximum Likelihood Estimator for the Tobit Model. Econometrica 46, 1211 - 1215.

Paarsch, H. J. (1984), A Monte Carlo Comparison of Estimators for Censored Regression Models. Journal of Econometrics 24, 197 - 213.

Pagan, A. R. / *Vella,* F. (1989), Diagnostic Tests for Models Based on Individual Data: A Survey. Journal of Applied Econometrics 4, 25 - 59.

Pagan, A. R. / *Wickens,* M. R. (1989), A Survey of Recent Econometric Methods. The Economic Journal 89, 962 - 1025.

Park, J. Y. (1990), Maximum-Likelihood Estimation of Simultaneous Cointegrated Models. Aarhus University, Institute of Economics, Discussion Paper.

Park, J. Y. / *Phillips,* P. C. B. (1988), Statistical Inference in Regression with Integrated Processes: Part 1. Econometric Theory 4, 468 - 497.

— / — (1989), Statistical Inference in Regression with Integrated Processes: Part 2. Econometric Theory 5, 95 - 131.

Perron, P. (1988), Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series. Journal of Economic Dynamics and Control 12, 297 - 332.

Pesaran, M. H. (1987), The Limits to Rational Expectations. Oxford, New York.

Phillips, P. C. B. / *Hansen,* B. (1990), Statistical Inference in Instrumental Variable Regression with I(1) Processes. Review of Economic Studies 57, 99 - 126.

Phillips, P. C. B. / *Park,* J. Y. (1988), Asymptotic Equivalence of Ordinary Least Squares in Regressions with Integrated Regressors. Journal of the American Statistical Association 83, 111 - 115.

Phillips, P. C. B. / *Perron,* P. (1988), Testing for a Unit Root in Time Series Regression. Biometrika 75, 335 - 346.

Pohlmeier, W. (1989), Simultane Probit- und Tobitmodelle, Theorie und Anwendungen auf Fragen der Innovationsökonomik. Berlin, Heidelberg.

Powell, J. L. (1986), Symmetrically Trimmed Least Squares Estimation for Tobit Models. Econometrica 54, 1435 - 1460.

Reimers, H. E. / *Lütkepohl,* H. (1989), The Term Structure of Interest Rates in the U.S. and West Germany, Causality Analysis in Cointegrated Systems. Discussion Paper No. 50/89, Institut für Statistik und Ökonometrie, Universität Kiel.

Reinsel, G. C. / *Ahn,* S. K. (1988), Asymptotic Distribution of the Likelihood-Ratio-Test for Cointegration in the Nonstationary, Vector AR-Model. Technical Report, Dep. of Statistics, University of Wisconsin, Madison.

Rüdel, T. (1989), Kointegration und Fehlerkorrekturmodelle. Heidelberg.

Sargan, J. D. / *Bhargava,* A. (1983), Testing Residuals from Least Squares Regression for Being Generated by the Gaussian Random Walk. Econometrica 51, 153 - 174.

Sauer, C. (1989), Alternative Theories of Output, Unemployment and Inflation in Germany: 1960 - 1985. Heidelberg, New York.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Sims, C. A. (1980), Macroeconomics and Reality. Econometrica 48, 1 - 48.

— (1988), Bayesian Scepticism on Unit Root Econometrics. Journal of Economic Dynamics and Control 12, 463 - 474.

Smith, R. J. (1987), Testing the Normality Assumption in Multivariate Simultaneous Limited Decendent Variable Models. Journal of Econometrics 34, 105 - 123.

Stock, J. H. (1987), Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of Cointegrating Vectors. Econometrica 55, 1035 - 1056.

Wagner, M. (1989), Räumliche Mobilität im Lebensverlauf. Eine empirische Untersuchung sozialer Bedingungen der Migration. Stuttgart.

Wales, T. J. / *Woodland,* A. D. (1980), Sample Selectivity and the Estimation of Labor Supply Functions. International Economic Review 2, 437 - 468.

Weber, A. A. (1988), Neue Klassische Makroökonomie, rationale Erwartungen und kontemporäre Informationen: Theoretische Analyse, ökonometrische Testprobleme und empirische Evidenz für die Bundesrepublik Deutschland unter Verwendung des Kalman-Filters. Frankfurt.

Wegener, R. (1987), Makroökonometrische Investitionsmodelle auf der Grundlage der neoklassischen Theorie – Eine empirische Untersuchung der Bruttoinvestitionsausgaben der Wirtschaftssektoren der Bundesrepublik Deutschland. Krefeld.

West, K. D. (1988), Asymptotic Normality when Regressors have a Unit Root. Econometrica 56, 1397 - 1417.

Wickens, M. R. (1982), The Efficient Estimation of Econometric Models with Rational Expectations. Review of Economic Studies 49, 817 - 838.

— (1986), The Estimation of Rational Expectation Models with Future Rational Expectations by Efficient and Instrumental Variable Estimation Methods. Centre for Economic Policy Research Discussion Paper 111, London.

— (1990), Rational Expectations and Integrated Variables. Discussion Paper, Universities of Florida and Southampton.

Wickens, M. R. / *Breusch,* T. S. (1988), Dynamic Specification, the Long-run and the Estimation of Transformed Regression Models, Economic Journal 98, 189 - 205.

White, H. (1982), Maximum Likelihood Estimation in Misspecified Models. Econometrica 50, 1 - 25.

Wolters, J. / *Kirchgässner,* G. (1990), Uncovered Interest Parity, Interest Rate Linkage or Independence? Jahrbuch für Sozialwissenschaft 41, 289 - 311.

— / — (1990a), Sind die Realzinsen stationär. Kredit und Kapital 23, 468 - 495.

— / — (1990b), Uncovered Interest Parity Condition Between the United States and Europe under Different Exchange Rate Regimes, in: Frowen (ed.), Monetary Theory and Policy. London.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.111.3.337 | Generated on 2025-07-23 21:07:17
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/