Input-Output-Analysen mit unvollständigen Input-Output-Tabellen

Von Gunter Lorenzen

Unvollständig bekannte Input-Output-Tabellen werden üblicherweise aufgrund bekannter Randsummen durch mechanische Verfahren (MODOP, RAS) komplettiert. Die mit Hilfe komplettierter Tabellen erzielten Resultate sind notwendig ungenau, ohne daß über den Grad der Genauigkeit Aussagen gemacht werden. In vorliegender Arbeit wird für ausgewählte Fragen der Input-Output-Analyse gezeigt, wie eine Fehlerabschätzung vorgenommen werden kann.

1. Einleitung

Soll die Input-Output-Analyse ein brauchbares Hilfsmittel der Wirtschaftspolitik sein, ist zu fordern, daß eine möglichst detaillierte sektorale Disaggregation für das produzierende Gewerbe vorgenommen wird. Entsprechende Input-Output-Tabellen zu erstellen, scheitert in der Regel an der Nichtverfügbarkeit der statistischen Informationen über die Vorleistungsverflechtungen. Beispielsweise gilt für die großen Input-Output-Tabellen des DIW mit 56 intermediären Sektoren, daß nur für die Erstellung der Tabellen für die Jahre 1954 und 1967 aufgrund des in diesen Jahren durchgeführten Zensus im produzierenden Gewerbe ausreichend Information zur Verfügung stand. Für die Tabelle des Jahres 1958 gilt dagegen, daß von den 3 136 Felderwerten der Matrix der interindustrieleln Lieferungen nur 1 949 originär ermittelt werden konnten[1]. Zwar ist die Informationsmenge für spätere Perioden größer — immerhin konnten für die Tabelle des Jahres 1972 die Werte von 2 446 Feldern originär ermittelt werden[2,3] — die fehlende Informationsmenge aber ist immer noch beträchtlich.

Um trotzdem Tabellen mit detaillierter Sektorengliederung im intermediären Bereich erstellen zu können, werden die fehlenden Tabellenwerte geschätzt. Die hierfür benutzten Methoden gehen typischerweise

---

[1] *Stäglin / Wessels* (1969), 21.
[2] *Pischner / Stäglin / Wessels* (1975), 16.
[3] Ich verdanke dem Referenten dieser Zeitschrift den Hinweis, daß diese veröffentlichten Zahlen nicht unmittelbar miteinander verglichen werden können, da in unterschiedlichem Ausmaß Nullelemente mitgezählt wurden.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.103.1.43 | Generated on 2025-07-25 04:54:01
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

davon aus, daß die Zeilen- und Spaltensummen der Matrix der Vorleistungsverflechtung auch dann bekannt sind, wenn nicht alle Felderwerte bekannt sind. Für Input-Output-Tabellen, die — wie die DIW-Tabellen — mit der Sektorenbildung in der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung kompatibel sind, ist diese Annahme gerechtfertigt, da für die Zeilen- und Spaltensummen der Matrix der Vorleistungsverflechtungen dann zusätzlich Informationsquellen zur Verfügung stehen. Ausgehend von den bekannten Randsummen werden unvollständige Input-Output-Tabellen dann mit Hilfe mechanischer Verfahren komplettiert[4].

Löst man nun Probleme der Input-Output-Analyse mit Hilfe derartig komplettierter Input-Output-Tabellen, so sind die Ergebnisse notwendig ungenau, ohne daß über die Genauigkeit Aussagen gemacht werden. Dies gibt Veranlassung zur Fragestellung, wie empfindlich eigentlich die Ergebnisse der Input-Output-Analyse auf Fehler bei der Komplettierung der Input-Output-Tabelle reagieren. In Untersuchungen, die diesem Problem gewidmet sind[5], werden nun aber mehr oder weniger willkürliche Annahmen über die Fehler in der Input-Output-Tabelle gemacht, auch wenn erkannt wird, daß Annahmen über Fehler ‚eigentlich' konsistent sein müßten mit den vorgegebenen Randsummen der Input-Output-Tabelle[6].

Es soll daher in dieser Arbeit an einigen ausgewählten Problemen der Input-Output-Analyse gezeigt werden, wie ungenau — bzw. wie überraschend genau in manchen Fällen — die Ergebnisse sind, wenn die Analyse auf einer Input-Output-Tabelle basiert, bei der nur ein Teil der Felderwerte originär ermittelt werden konnte. Wir werden hierbei ausgedehnt Gebrauch machen von der Annahme, daß die Randsummen der Input-Output-Tabelle bekannt sind.

Die Problemstellung dieser Arbeit unterscheidet sich also von einer verwandten Problemstellung, bei der mit Hilfe der Input-Output-Analyse Aussagen über eine (z. B. zukünftige) Periode gemacht werden sollen, für die auch die Randsummen der Matrix der Vorleistugnsverflechtungen nicht bekannt sind. Führt man in diesem Fall die Analyse mit einer Tabelle durch, die für eine andere Periode erstellt worden war, so stellt sich das Problem, wie empfindlich die Ergebnisse der Analyse auf Änderungen der Inputkoeffizienten im Zeitablauf reagieren. Für diese Fragestellung sind die angeführten Studien[7] sicherlich

---

[4] MODOP und RAS sind die bekanntesten, vgl. z. B. *Stäglin* (1972), und *Friedmann* (1978).
[5] Z. B. *Schintke* (1976) und *Maaß* (1980).
[6] Vgl. hierfür ausführlich *Lorenzen* (1980).
[7] *Schintke* (1976), *Maaß* (1980).

DOI https://doi.org/10.3790/schm.103.1.43 | Generated on 2025-07-25 04:54:01
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

hilfreich[8], sehr ausführlich über die für diese Fragestellung nützliche Mathematik unterrichtet *Dück* (1970).

Im nächsten Abschnitt werden wir das offene statistische Leontief-Modell für unsere Fragestellung einrichten. Die folgenden beiden Abschnitte sind jeweils einem Problem der Input-Output-Analyse gewidmet. Im dritten Abschnitt sollen die Konsequenzen einer Änderung der Endnachfrage für den Vektor der Bruttoproduktion abgeschätzt werden, und im vierten Abschnitt wird abgeschätzt, welche Konsequenzen eine Änderung der Endnachfrage für die Nachfrage nach einem bestimmten primären Produktionsfaktor hat.

2. Das offene statische Leontief-Modell als Ausgangspunkt

Wir gehen davon aus, daß n intermediäre Sektoren gebildet wurden und bezeichnen mit Z die (nxn)-Matrix der interindustriellen Lieferungen. Wir gehen ferner davon aus, daß Z nur teilweise bekannt ist und bezeichnen mit Z_B diesen bekannten Teil. Mit Z_F werde die unbekannte Restmatrix bezeichnet, von der wir allerdings annehmen, daß die Zeilen- und Spaltensummen gegeben sind.

$$Z = Z_B + Z_F \tag{1}$$

Üblicherweise wird Z_F mit Hilfe mechanischer Verfahren (MODOP, RAS) spezifiziert, worauf wir vollständig verzichten wollen. Insbesondere benötigen wir also auch keine vollständig bekannte Basistabelle, die als Grundlage für die Spezifikation von Z_F zu dienen hätte. Das in dieser Arbeit vorgeschlagene Verfahren, mit unvollständig bekannten Input-Output-Tabellen zu arbeiten, wird dadurch universell anwendbar. Es entfällt der Zwang, mit unzureichenden Informationen eine komplette Input-Output-Tabelle erstellen zu müssen.

Es ist wichtig, sich klar zu machen, daß die additive Zerlegung von Z in zwei nichtnegative Matrizen Z_B und Z_F zuläßt, daß von Z nicht ein einziges Element vollständig bekannt ist. Gleichzeitig impliziert diese Überlegung, daß in Z_B nur tatsächliche Lieferströme erfaßt werden. Überschätzungen einiger Elemente von Z_B würden nämlich zu negativen Elementen in Z_F führen, was ausdrücklich ausgeschlossen sein soll. Durch Z_B werden lediglich Untergrenzen für die Elemente von Z festgelegt. Obergrenzen für die Elemente von Z ergeben sich ausschließlich aus den bekannten Randsummen. Um diese Randsummen handlich darstellen zu können, führen wir mit $e' = (1, \ldots, 1)$ einen $(1\,xn)$-Vektor ein, dessen Elemente alle den Wert 1 haben, $e'Z$

[8] Vgl. hierzu auch *Kogelschatz* (1978).

DOI https://doi.org/10.3790/schm.103.1.43 | Generated on 2025-07-25 04:54:01
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

sind dann die Spaltensummen und Ze sind die Zeilensummen der Matrix Z.

Wir benötigen das vollständige offene Leontief-System. Sei f der $(nx\,1)$-Vektor der Endnachfrage, x der $(nx\,1)$-Vektor der Bruttoproduktion und sei P' der $(1\,xn)$-Vektor der von den Sektoren verbrauchten primären Produktionsfaktoren, dann gilt:

$$Z_B\,e + [Z_F\,e] + f = x \tag{2a}$$

sowie

$$e'\,Z_B + [e'\,Z_F] + P' = x' \tag{2b}$$

Gleichung (2b) impliziert, daß in der Matrix Z die Werte der interindustriellen Lieferungen erfaßt werden und nicht die Mengen. Wir werden hierauf am Schluß der Arbeit zurückkommen. Um ganz deutlich zu machen, daß Z_F unbekannt und nur die Randsummen $Z_F\,e$ und $e'\,Z_F$ bekannt sind, wurden diese Vektoren eckig eingeklammert.

Mit A bezeichnen wir die Matrix der Inputkoeffizienten ($Ax = Ze$), die analog zur Aufteilung der Matrix Z in einen bekannten Teil A_B und einen unbekannten additiven Rest A_F zerlegt wird.

$$A = A_B + A_F \tag{3}$$

Die Entsprechung zu Gleichungssystem (2) ist dann das Gleichungssystem (4), wobei p' den Vektor der primären Inputkoeffizienten bezeichnet.

$$A_B\,x + [A_F\,x] + f = x \tag{4a}$$

$$e'\,A_B + [e'\,A_F] + p' = e' \tag{4b}$$

Wieder gilt, daß zwar A_F unbekannt ist, aber die Spaltensummen $[e'\,A_F]$ von A_F sind vermöge (4b) bekannt. Ferner ist $[A_F\,x] = [Z_F\,e]$ bekannt.

Die Leontief-Inverse C möge existieren.

$$C = (I - (A_B + A_F))^{-1} \tag{5}$$

Diese Inverse gestattet bekanntlich die Darstellung

$$C = I + (A_B + A_F) + (A_B + A_F)^2 + \ldots \tag{6}$$

Mit C_B bezeichnen wir die Leontief-Inverse der bekannten Matrix A_B (die wegen (6) und $A_B \leq A_B + A_F$ existieren muß)

$$C_B = (I - A_B)^{-1} \quad (= I + A_B + A_B^2 + \ldots) \tag{7}$$

C_F sei der unbekannte additive Rest der Inversen C

DOI https://doi.org/10.3790/schm.103.1.43 | Generated on 2025-07-25 04:54:01
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

(8) $$C = C_B + C_F$$

Für C_F ergibt sich aus (6) und (7), daß diese Matrix jedenfalls keine negativen Elemente enthält. Diese Eigenschaft ist für das weitere entscheidend.

Durch die Beziehungen (1) bis (8) ist das offene Leontief-System für unsere Zwecke noch nicht ausreichend beschrieben. Aus (4a), (5) und (8) ergibt sich

(9) $$x = C_B f + [C_F f]$$

Beziehung (4a) läßt sich unter Benutzung von $[A_F x] = [Z_F e]$ wie folgt schreiben

$$[Z_F e] + f = (I - A_B) x$$

Durch Multiplikation mit C_B wird hieraus unter Benutzung von (9)

(10) $$[C_F f] = C_B [Z_F e]$$

Auf ähnliche Weise gewinnen wir eine Beziehung für $[p' C_F]$

Aus (4b), (5) und (8) ergibt sich

(11) $$p' C_B + [p' C_F] = e'$$

Beziehung (4b) läßt sich wie folgt schreiben

$$[e' A_F] + p' = e' (I - A_B)$$

Durch Multiplikation mit C_B wird hieraus unter Benutzung von (11)

(12) $$[p' C_F] = [e' A_F] C_B$$

Die Gleichungen (10) und (12) sind für unsere folgenden Abschätzungen fundamental. Diese Beziehungen wurden in *Lorenzen* (1981) benutzt, um Abschätzungen für die Zeilen- und Spaltensummen der Leontief-Inversen C vornehmen zu können. In vorliegender Arbeit wollen wir uns konkreten Fragestellungen der Input-Output-Analyse zuwenden. Wir beginnen damit, die Konsequenzen einer Nachfrageänderung für den Vektor der Bruttoproduktion abzuschätzen.

3. Abschätzungen der Konsequenzen einer Nachfrageänderung für den Vektor der Bruttoproduktion

Wir wollen annehmen, daß analysiert werden soll, wie sich eine zusätzliche Endnachfrage Δf auf den Vektor der Bruttoproduktion auswirkt, wobei $\Delta f \geq 0$ gelten möge, d. h. wir wollen nicht zulassen, daß Δf negative Elemente enthält. (Der Fall, daß Δf keine positiven Ele-

DOI https://doi.org/10.3790/schm.103.1.43 | Generated on 2025-07-25 04:54:01
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

mente enthält, ist analog zu dem Fall $\Delta f > 0$ abzuhandeln, sind dagegen einige Elemente von Δf positiv und einige Elemente negativ, so müssen die Abschätzungen getrennt für die positiven und für die negativen Nachfrageänderungen vorgenommen werden.) Konstitutiv für die Input-Output-Analyse ist die Annahme ,daß sich die Wirkung zusätzlicher Endnachfrage anhand der Leontief-Inversen C bestimmen läßt.

$$\Delta x = C_B \Delta f + C_F \Delta f \tag{13}$$

Das Problem ist, daß C_F unbekannt ist, was üblicherweise mit Hilfe mechanischer Verfahren zur Erstellung einer Matrix Z_F kaschiert wird. Wir wollen jetzt Abschätzungen für $C_F \Delta f$ vornehmen, bei denen wir uns der abgeleiteten Beziehung (10) bedienen. Sei f_i das i-te Element des Vektors f und Δf_i das i-te Element des Vektors Δf. Man definiere zwei Skalare Φ_u und Φ_o durch

$$\Phi_u = \operatorname*{Min}_i \left[\frac{\Delta f_i}{f_i} \right] \tag{14a}$$

$$\Phi_o = \operatorname*{Max}_i \left[\frac{\Delta f_i}{f_i} \right] \tag{14b}$$

(Damit wir uns Komplikationen ersparen, die in keiner Relation zu ihrer Relevanz stehen, soll im folgenden angenommen werden, daß der Vektor der Endnachfrage keine Nullelemente enthält, für Δf_i dagegen darf natürlich gelten $\Delta f_i = 0$, wodurf sich $\Phi_u = 0$ ergeben würde).

Aus (14a) und (14b) folgt

$$\Phi_u f \leq \Delta f \leq \Phi_o f$$

Wegen $\Delta f \geq 0$ und weil C_F keine negativen Elemente enthalten kann, ergibt sich

$$\Phi_u [C_F f] \leq C_F \Delta f \leq \Phi_o [C_F f] \tag{15}$$

Hieraus gewinnt man mit Hilfe von (10) und (13) die folgende Abschätzung für die zusätzliche Bruttoproduktion Δx

$$C_B \Delta f + \Phi_u C_B [Z_F e] \leq \Delta x \leq C_B \Delta f + \Phi_o C_B [Z_F e] \tag{16}$$

Der Unsicherheitsbereich, d. h. die Intervallänge für diese Abschätzung, beträgt also

$$(\Phi_o - \Phi_u) C_B [Z_F e]$$

Es gibt somit zwei Grenzfälle, in denen genaue Kenntnis über Δx möglich ist:

DOI https://doi.org/10.3790/schm.103.1.43 | Generated on 2025-07-25 04:54:01
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

a) wenn $\Phi_o = \Phi_u$, d. h. wenn der Vestor der zusätzlichen Endnachfrage ein skalares Produkt des Vektors f ist und

b) wenn $[Z_F e]$ ein Nullvektor ist, d. h. wenn die Matrix der interindustriellen Lieferungen vollständig bekannt ist.

Vielleicht interessanter als die Bedeutung dieser Spezialfälle ist die Untersuchung der Frage, welche Komponenten des Vektors Δx durch (16) ‚gut' abgeschätzt werden. Hierfür nutzen wir aus, daß die Matrix C_B eine dominante Hauptdiagonale hat. Dies hat zur Konsequenz, daß diejenigen Komponenten von Δx, denen in $[Z_F e]$ eine Null oder ein kleiner Wert entspricht tendenziell besser abgeschätzt werden als die Komponenten, denen in $[Z_F e]$ ein großer Wert entspricht. Die Bruttoproduktion derjenigen Industrien, deren Lieferungen an andere Industrien in der Matrix Z_B annähernd vollständig erfaßt wurden, wird also durch die Abschätzung (16) genauer errechnet als die Bruttoproduktion der Industrien, deren Lieferungen an andere nicht oder nur unvollkommen bekannt sind. Bemerkenswert ist, daß die Werte der Spaltensummen $[e' Z_F]$ in der Abschätzung (16) unmittelbar keine Rolle spielen.

Die Frage nach den Konsequenzen einer zusätzlichen Endnachfrage für die Bruttoproduktion ist häufig nur eine Zwischenfrage für das eigentlich interessierende Problem, wieviel zusätzliche primäre Produktionsfaktoren benötigt werden, um diese zusätzliche Endnachfrage befriedigen zu können. Im folgenden Abschnitt wollen wir zeigen, wie man bei dieser Fragestellung zu Abschätzungen für die Ergebnisse kommen kann, wenn wiederum nur die Information benutzt wird, die tatsächlich vorhanden ist.

4. Abschätzungen der Konsequenzen einer Nachfrageänderung für den Bedarf an primären Produktionsfaktoren

Bislang haben wir die Inputkoeffizienten für alle primären Produktionsfaktoren in einem Vektor p' zusammengefaßt, ohne auf die Komponenten dieses Vektors zu achten. Im folgenden muß eine Komponentenzerlegung erfolgen, denn natürlich interessiert bei der Analyse der Konsequenzen einer Nachfrageänderung der zusätzliche Bedarf getrennt für die verschiedenen primären Produktionsfaktoren. Es interessiert beispielsweise der zusätzliche Importbedarf an Rohstoffen oder es interessiert der zusätzliche Bedarf an Arbeitskräften.

Wir brauchen uns hinsichtlich der Anzahl der Komponenten von p' nicht festzulegen. Es genügt, daß wir die i-te Komponente als für uns wichtig auswählen. Den Vektor der Inputkoeffizienten für diesen i-ten

DOI https://doi.org/10.3790/schm.103.1.43 | Generated on 2025-07-25 04:54:01
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

primären Produktionsfaktor bezeichnen wir mit p_i' und offenbar gilt $p_i' \leq p'$.

Wieder nehmen wir an, daß für den Vektor der zusätzlichen Endnachfrage Δf gilt $\Delta f \geq 0$.

Der zusätzliche Bedarf beim i-ten primären Produktionsfaktor wird gegeben durch

$$p_i' \Delta x = p_i' C_B \Delta f + p_i' C_F \Delta f \tag{17}$$

Wieder können wir diesen Ausdruck nicht ermitteln, weil C_F nicht bekannt ist. Wir kennen aber aus dem vorigen Abschnitt schon eine Abschätzung für $C_F \Delta f$. Mit Hilfe der Ungleichung (15) sowie der Gleichung (10) ergibt sich somit als erste Abschätzung für $p_i' \Delta x$.

$$p_i' C_B \Delta f + \Phi_u p_i' C_B [Z_F e] \leq p_i' \Delta x \leq p_i' C_B \Delta f + \Phi_o p_i' C_B [Z_F e] \tag{18}$$

Wir kennen auch schon die Spezialfälle, in denen das Abschätzungsintervall der Ungleichung (18) Null wird: a) wenn $\Phi_o = \Phi_u$ und b) wenn $[Z_F e]$ ein Nullvektor ist.

Die Ungleichung (18) ist nun nicht die einzige Abschätzung, die sich für $p_i' \Delta x$ gewinnen läßt. Während diese Abschätzung auf der Abschätzung (15) für $C_F \Delta f$ basiert, gewinnt man eine zweite Abschätzung für $p_i' \Delta x$ durch eine Abschätzung für $p_i' C_F$.

Mit p_{ij} $(j = 1, \ldots, n)$ wollen wir die Elemente des Vektors p und mit $p_{.j}$ die Elemente des Vektors p' bezeichnen. Man definiere jetzt zwei Skalare Π_u und Π_o durch

$$\Pi_u = \operatorname*{Min}_j \left(\frac{p_{ij}}{p_{.j}} \right) \tag{19a}$$

$$\Pi_o = \operatorname*{Max}_j \left(\frac{p_{ij}}{p_{.j}} \right) \tag{19b}$$

wobei wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit unterstellen dürfen, daß $p_{.j} > 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$ erfüllt ist. Aus (19a) und (19b) ergibt sich

$$\Pi_u p' \leq p_i' \leq \Pi_o p'$$

Da C_F keine negativen Elemente enthält, folgt hieraus

$$\Pi_u [p' C_F] \leq p_i' C_F \leq \Pi_o [p' C_F] \tag{20}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (12) und (17) ergibt sich somit als zweite Abschätzung für $p_i' \Delta f$ die Ungleichung

DOI https://doi.org/10.3790/schm.103.1.43 | Generated on 2025-07-25 04:54:01
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

$$(21)\quad p_i' C_B \Delta f + \Pi_u [e' A_F] C_B \Delta f \leq p_i' \Delta x \leq p_i' C_B \Delta f + \Pi_o [e' A_F] C_B \Delta f$$

Auch für die Abschätzung (21) läßt sich sofort angeben, für welche Spezialfälle $p_i' \Delta x$ exakt ermittelt wird:

a) wenn $\Pi_u = \Pi_o$,d. h. wenn der Vektor p_i' proportional zum Vektor p' ist

und

b) wenn $[e' A_F]$ ein Nullvektor ist, d. h. wenn die Matrix der Vorleistungsverflechtungen vollständig bekannt ist.

Die Ungleichungen (18) und (21) stellen jetzt zwei konkurrierende Abschätzungen dar, die beispielsweise auch verbunden werden können zu der Abschätzung

$$(22)\quad p_i' C_B \Delta f + \Pi_u [e' A_F] C_B \Delta f \leq p_i' \Delta x \leq p_i' C_B \Delta f + \Phi_o p_i' C_B [Z_F e]$$

In (22) wurde die Untergrenze für den Wert $p_i' \Delta x$ der Abschätzung (21) entnommen und die Obergrenze stammt aus der Abschätzung (18). Ganz analog ist es natürlich auch möglich, die Obergrenze von (21) mit der Untergrenze von (18) zu einer Abschätzung zusammenzufassen.

Welche dieser somit vier Abschätzungen jetzt die beste ist, kann a priori nicht angegeben werden. Abschätzung (18) wird c. p. ‚gut', wenn Φ_o dicht bei Φ_u liegt, d. h. wenn Δf (wenigstens nahezu) ein Skalarprodukt von f ist. Die Abschätzung (21) wird c. p. ‚gut', wenn Π_o dicht bei Π_u liegt, d. h. wenn p_i' (wenigstens nahezu) ein Skalarprodukt von p' ist. Formal ergibt sich natürlich die beste Abschätzung, indem man das Maximum der aus (18) und (21) stammenden Untergrenzen kombiniert mit dem Minimum der aus den Ungleichungen stammenden Obergrenzen. Dies hat zur Konsequenz, daß sich auch in Fällen, die keineswegs als trivial erkennbar sind, relativ ‚gute' Abschätzungen für $p_i' \Delta x$ ergeben können. Aus (22) ergibt sich beispielsweise als Intervallänge für die Abschätzung

$$\Phi_o p_i' C_B [Z_F e] - \Pi_u [e' A_F] C_B \Delta f$$

Auch wenn man annimmt, daß C_B eine dominante Hauptdiagonale besitzt, ist analytisch kaum zu durchschauen, wann dieses Intervall ‚klein' wird.

Einige Spezialfälle sind erkennbar:

a) der Fall $[Z_F e] = [e' A_F] =$ Nullvektor, in diesem Fall hat das Intervall trivialerweise die Länge Null.

b) der Fall $p_i' = \Pi_u [e' A_F]$ und gleichzeitig $\Delta f = \Phi_o [Z_F e]$ auch in diesem Fall hat das Intervall die Länge Null.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.103.1.43 | Generated on 2025-07-25 04:54:01
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Es gibt weitere Spezialfälle, die ähnlich aufgebaut sind wie b) und die aufzuführen ermüdend wäre. Informativer als die Analyse dieser Spezialfälle dürfte die Behandlung eines einfachen numerischen Beispiels sein, mit dessen Hilfe natürlich nichts ‚bewiesen' werden, das lediglich einen allerersten Eindruck von den Größenverhältnissen bei den Abschätzungen (18), (21) und (22) vermitteln soll. (Das gleiche Zahlenbeispiel diente in *Lorenzen* (1981) zur Abschätzung der Zeilen- und Spaltensummen der Leontief-Inversen.) Wir betrachten eine Wirtschaft mit nur zwei intermediären Sektoren. Die Gesamtsumme der interindustriellen Lieferungen betrage 220, von denen nur genau die Hälfte einzelnen Feldern der Matrix Z zurechenbar sei. Die weiteren Angaben entnehme man dem folgenden Tabellenschema.

	Z_B		$Z_B e$	$Z_F e$	f	x
Z_B	20	30	50	70	80	200
	40	20	60	40	100	200
$e' Z_B$	60	50				
$e' Z_F$	30	80				
P'	110	70				
x'	200	200				

Hieraus ergibt sich:

$$C_B = \begin{pmatrix} 1.15 & 0.19 \\ 0.26 & 1.15 \end{pmatrix}$$

$$e' A_F = (0.15 \quad 0.40)$$

$$p' = (0.55 \quad 0.35)$$

Wir wollen jetzt annehmen, daß analysiert werden soll, wie eine Erhöhung der Endnachfrage beim zweiten Sektor sich auf einen i-ten primären Produktionsfaktor auswirkt. Es gilt also

$$\Delta f = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ und es möge gelten } p_i' = (0.22 \quad 0.28)$$

Dann folgt

$$\Phi_u = 0 \; ; \quad \Phi_o = 0.1 \; ; \quad \Pi_u = 0.4 \quad \text{und} \quad \Pi_o = 0.8$$

und es ergeben sich folgende Abschätzungen

DOI https://doi.org/10.3790/schm.103.1.43 | Generated on 2025-07-25 04:54:01
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

(18) $$3{,}64 \leq p_i' \Delta x \leq 7{,}37$$

(21) $$5{,}57 \leq p_i' \Delta x \leq 7{,}51$$

und hieraus gewinnt man als optimale Abschätzung

(22) $$5{,}57 \leq p_i' \Delta x \leq 7{,}37$$

bzw. $$p_i' \Delta x = 6.47 \pm 0.9$$

Es steht jetzt nicht zur Diskussion, ob solche Abschätzungen für ‚praktische Zwecke' ausreichen. Vielmehr ist zu betonen, daß man genauere Kenntnisse über die Konsequenzen einer Nachfrageänderung nicht haben kann, wenn der Ausgangspunkt richtig ist, daß über die Matrix Z_F außer den Randsummen nichts bekannt ist.

Wir müssen abschließend noch auf zwei Mängel der abgeleiteten Abschätzungen eingehen. Zuweilen wird man zum einen zusätzliche Annahmen über die Matrix Z_F in die Analyse einbringen wollen, beispielsweise wird man sich einiger Nullelemente in der Matrix Z_F sicher sein. A priori-Information dieser Art kann in die Abschätzungen dieser Arbeit leider nicht eingebaut werden, was insbesondere dann ein Nachteil ist, wenn man relativ viele Elemente der Matrix Z_F vorab als Nullelemente spezifizieren zu können meint. Offenbar sind die hier entwickelten Abschätzungen in diesem Fall ‚grob' in dem Sinne, daß vorhandene Information nicht vollständig genutzt wird. Zu beachten ist allerdings, daß die Kenntnis *vollständiger* Nullspalten oder Nullzeilen in obigen Abschätzungen berücksichtigt wird, denn natürlich dürfen Elemente von $[Z_F\, e]$ oder $[e'\, A_F]$ Null sein.

Ein anderes Problem wurde im zweiten Abschnitt schon kurz angesprochen. Die für uns wichtigen Beziehungen (2b) und (4b) gelten nur für Wertetabellen. Soll die Input-Output-Analyse auf preisbereinigten Wertetabellen basieren, und erfolgt die Preisbereinigung — wie üblich — zeilenweise, so gelten die Beziehungen (2b) und (4b) nicht mehr. Man kann sich auch nicht damit trösten, daß dann andere Beziehungen gelten, die entsprechend ausgewertet werden könnten. Die eigentliche Crux ist, daß man die Spaltensummen der Matrix Z und somit die Spaltensummen der Matrix Z_F nicht kennen kann, es sei denn man hätte die ganze Matrix Z, dies aber ist ein Widerspruch zu unserer Problemstellung. Die Zeilensummen dagegen sind auch für die zeilenweise deflationierten Wertetabellen bekannt, da diese sich ja durch Deflationierung der ursprünglichen Zeilensummen ergeben. Bei zeilenweiser Deflationierung gelten also Beziehungen analog zu (2a) und (4a) mit der Konsequenz, daß die Ergebnisse des dritten Abschnitts und die Abschätzung (18) des vierten Abschnitts analog gelten. Die Abschätzung

DOI https://doi.org/10.3790/schm.103.1.43 | Generated on 2025-07-25 04:54:01
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

(21) des vierten Abschnitts und somit die Abschätzung (22) sind in diesem Fall nicht gültig.

Wird die Deflationierung der Wertetabelle sogar felderweise vorgenommen, oder steht tatsächlich eine reine Mengentabelle zur Verfügung, dann würden zwar (2a) und (4a) mit analoger Interpretation immer noch gelten, aber es wäre nicht mehr sinnvoll zu unterstellen, daß die Zeilensummen $[Z_F e] = [A_F x]$ bekannt sind, zumindest liefert die volkswirtschaftliche Gesamtrechnung — wie bislang unterstellt — diese Information in diesem Fall nicht.

Die in dieser Arbeit entwickelten Abschätzungsverfahren versagen also genau in den Fällen, in denen auch die mechanischen Komplettierungsverfahren (MODOP, RAS) nicht anwendbar sind. Diese Abschätzungsverfahren treten somit einerseits in Konkurrenz zu den Komplettierungsverfahren, insofern sie in Spezialfällen die Komplettierung der Input-Output-Tabelle überflüssig machen, andererseits dienen sie zur Ergänzung der mit komplettierten Tabellen gewonnenen Ergebnissen, da sie es erlauben, den maximalen Fehler der mit komplettierten Tabellen erzielten Ergebnisse anzugeben.

Zusammenfassung

Aus statistischen Quellen lassen sich in der Regel nur unvollständige Input-Output-Tabellen gewinnen. Auch für unvollständig bekannte Input-Output-Tabellen kennt man aber häufig die Zeilen- und Spaltensummen. In vorliegender Arbeit wird gezeigt, mit welcher Genauigkeit typische Fragestellungen der Input-Autput-Analyse mit Hilfe dieser tatsächlich vorhandenen Information beantwortet werden können. Mechanische Komplettierungsverfahren (MODOP, RAS) werden hierdurch entweder überflüssig, bzw. es erweist sich, mit welcher Unsicherheit Ergebnisse behaftet sind, die mit Hilfe mechanisch komplettierter Input-Output-Tabellen gewonnen wurden.

Summary

Usually, input-output tables can be derived from statistical data only partially, but sometimes the row sums and column sums are known, when even the table itself is not known completely. In this paper some inequalities are derived which inform about the accuracy of the results of some well-defined problems of input-output analysis, when this analysis is based on the information actually available. Thus methods conceived to complete incomplete input-output tables (MODOP, RAS) are shown to be sometimes redundant. If these methods are not to be abandoned, it is possible to calculate by the inequalities of this paper the maximal inaccuracy involved, when problems of input-output analysis are solved with mechanically completed input-output tables.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.103.1.43 | Generated on 2025-07-25 04:54:01
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Literatur

Dück, W. (1970), Numerische Methoden der Wirtschaftsmechanik I, Berlin.

Friedmann, R. (1978), Zur Aktualisierung von Input-Koeffizienten, Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 134, 144 - 165.

Kogelschatz, H. (1978), Outputeffekte von Produktivitätsänderungen und Prozeßsubstitutionen im statischen offenen Input-Output-Modell, Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 134, 133 - 143.

Lorenzen, G. (1980), Fehlerrechnung in Input-Output-Analysen, Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik 116, 195 - 203.

— (1981), Abschätzungen für die Zeilen- und Spaltensummen der Leontief-Inversen bei unvollständiger Kenntnis der Matrix der interindustriellen Lieferungen, Statistische Hefte 22, 321 - 328.

Maaß, S. (1980), Die Reagibilität von Prognosen mittels Input-Output-Modellen auf Fehler im Datenmaterial, Berlin.

Pischner, R., R. *Stäglin* und H. *Wessels* (1975), Input-Output-Rechnung für die Bundesrepublik Deutschland 1972, DIW-Beiträge zur Strukturforschung 38, Berlin.

Schintke, J. (1976), Sensitivitätsanalysen im statischen offenen Leontief-Modell, DIW-Beiträge zur Strukturforschung 42, Berlin.

Stäglin, R. (1972), MODOP — Ein Verfahren zur Erstellung empirischer Transaktionsmatrizen, in: H. H. Aßmuß, P. Bruckner, J. Frohn u. a. (Hrsg.): Anwendung statistischer und mathematischer Verfahren auf sozialwissenschaftliche Probleme, Würzburg.

— und H. *Wessels* (1969), Input-Output-Tabellen und Input-Output-Analysen für die Bundesrepublik Deutschland, DIW-Beiträge zur Strukturforschung 6, Berlin.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.103.1.43 | Generated on 2025-07-25 04:54:01
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/