Maximumprinzip, Gleichgewichtsbewegung und Marktzutritt

Von Ruprecht Witzel*

Anhand eines einfachen dynamischen Marktzutrittsmodells werden Beziehungen zwischen dem Maximumprinzip von Pontrjagin und der Methode der Gleichgewichtsbewegung von Lotka aufgezeigt.

1. In enger Anlehnung an *Gaskins* (1971) behandelt *Milde* ((1982), Kapitel IV) in einem deterministischen Modell die dynamischen Aspekte des Marktzutritts neuer Konkurrenten. Anhand dieses Modells sollen im folgenden Beziehungen zwischen dem Maximumprinzip und der Methode der Gleichgewichtsbewegung aufgezeigt werden und damit zusammenhängend sollen die Modellvariablen nach dem Schema „schnell" — „langsam" klassifiziert werden. Folgende Annahmen gelten: Der dominante Preisführer fixiert den Marktpreis; die restlichen tatsächlichen oder potentiellen Anbieter betrachten diesen Preis als Datum und verhalten sich wie Mengenanpasser, da ihr jeweiliger Marktanteil „außerordentlich klein" ist. Zur Bestimmung des für die dominante Unternehmung optimalen Preispfades wird das Maximumprinzip von *Pontrjagin* benutzt[1]. Bei Existenz einer inneren Lösung ergibt sich ein System, das als Approximationssystem nach der Methode der Gleichgewichtsbewegung von *Lotka*[2] interpretiert werden kann.

2. Die intertemporale Optimierungsaufgabe bei *Gaskins* (1971) bzw. *Milde* (1982) lautet:

$$\max_{p \geqq c} \int_0^\infty \pi(p, x) \cdot e^{-rt}\, dt \tag{1}$$

unter Beachtung von

$$\dot{x} = \alpha \cdot (p - b) \quad \text{und} \tag{2}$$

$$\pi(p, x) := (p - c) \cdot (y(p) - x) \quad \text{mit} \quad y_p < 0, y_{pp} \gtreqless 0 \ . \tag{3}$$

---

* Für die Anregung zu diesen Anmerkungen und hilfreiche Diskussionen möchte ich Hellmuth Milde herzlich danken.

[1] Vgl. z. B. *Takayama* (1974).

[2] Vgl. *Schlicht* (1978).

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.5.479 | Generated on 2025-07-25 16:59:32
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Hierbei gibt π die momentane Profitfunktion der dominanten Unternehmung wieder, die von deren konstanten Stückkosten c, dem Güterpreis p und dem Konkurrenzoutput x abhängt; mit $y(p)$ wird in (3) die Marktnachfrage beschrieben. Der Marktanteil der Konkurrenz ändere sich durch Zu- bzw. Abgang im Laufe der Zeit gemäß der Differentialgleichung (2) [DG], in der mit b die konstanten Stückkosten der Konkurrenten bezeichnet werden und mit α ein konstanter Reaktionskoffizient. Aufgrund angenommener Kostenvorteile für den dominanten Anbieter gelte $b > c$. Die konstante Diskontierungsrate r sei ebenso wie α, b und c positiv.

Zur Lösung des Problems wird auf das Maximumprinzip von *Pontrjagin* zurückgegriffen, wobei der Konkurrenzoutput x die Zustandsvariable und der Güterpreis p die Kontrollvariable ist. Nach *Takayama*[3] ist es charakteristisch, daß für die Zustandsvariablen *DGn* vorliegen (sogenannte Übergangsgleichungen), während zeitliche Ableitungen der Kontrollvariablen weder in den Zielfunktionen noch in den Nebenbedingungen vorkommen. Mit der Kozustandsvariablen λ lautet die Hamiltonfunktion H

$$H(p, x, \lambda, t) := \pi(p, x) \cdot e^{-rt} + \lambda \cdot \alpha \cdot (p - b) \ . \tag{4}$$

Die optimale Steuerung bestimmt sich aus

$$H^* = \max_{p \geqq c} H, \quad \dot{x} = H^*_\lambda \ , \ \lambda = -H^*_x \tag{5}$$

unter Berücksichtigung der Anfangs- und Endbedingung

$$x(0) = x_0, \ \lambda(\infty) = 0 \ . \tag{6}$$

Aufgrund der speziellen Strukturen der momentanen Zielfunktion und der Nebenbedingung läßt sich das System (5) unter den zusätzlichen Annahmen, daß die Hamiltonfunktion in p strikt konkav ist und daß eine innere Lösung vorliegt, auf das nachstehende *autonome* System reduzieren:

$$\bar{H}_p = 0, \quad \dot{x} = \bar{H}_\Phi, \ \dot{\Phi} = -\bar{H}_x + r\Phi \ , \tag{7}$$

$$\bar{H}_{pp} < 0 \ , \tag{8}$$

$$x(0) = x_0 \ , \quad \lim_{t \to \infty} \Phi(t) \cdot e^{-rt} = 0 \tag{9}$$

mit

$$\bar{H} \equiv \bar{H}(p, x, \Phi) := \pi(p, x) + \Phi \cdot \alpha \cdot (p - b) \ , \quad \Phi := \lambda \cdot e^{-rt} \ .$$

[3] *Takayama* (1974), 602.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.5.479 | Generated on 2025-07-25 16:59:32
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Für das vorliegende Beispiel ergibt sich für (7) bzw. (8):

(10a) $$\pi_p + \alpha \cdot \Phi = 0 \ ,$$

(10b) $$\dot{x} = \alpha \cdot (p - b) \ ,$$

(10c) $$\dot{\Phi} = - \pi_x + r \cdot \Phi \ ,$$

(11) $$\pi_{pp} = (p - c) \cdot y_{pp} + 2 \cdot y_p < 0 \ .$$

Wegen $p \geq c$, $y_{pp} \gtreqless 0$ und $y_p < 0$ stellt (11) eine Bedingung an die Profitfunktion $\pi(p, x)$ dar.

3. Das System (10) besteht aus einer Gleichung und zwei *DGn* erster Ordnung für die drei Variablen p, x und Φ. Es hat somit die gleiche formale Struktur wie ein Approximationssystem nach der Methode der Gleichgewichtsbewegung von Lotka. Ein solches System wird in seiner ursprünglichen Darstellung i. a. durch n Gleichgewichtsbedingungen (vgl. (10a)) und m *DGn* (vgl. (10b, c)) für $n + m$ Variablen (vgl. p, x und Φ) beschrieben. Die Variablen, für die explizite *DGn* vorliegen, werden *langsame Variablen* genannt, und diejenigen, zu deren Bestimmung die Gleichgewichtsbedingungen benutzt werden, heißen *schnelle Variablen*. Annahmegemäß führen „unendlich schnelle" Reaktionen der schnellen Variablen dazu, daß in jedem Zeitpunkt die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind. Letztere sind also als Approximation von expliziten *DGn* für die schnellen Variablen zu interpretieren. Eine geeignete Dynamisierung der Optimalitätsbedingung (bzw. „Gleichgewichtsbedingung") (10a) wird beispielsweise durch die *DG*

(12) $$\dot{p} = \gamma \cdot (\pi_p + \alpha \cdot \Phi) \quad \text{mit} \quad \gamma > 0 \quad \text{und} \quad \gamma \to \infty$$

geliefert. (Auf die Bestimmung des Vorzeichens von γ kommen wir weiter unten zurück.) Im Rahmen der Methode der Gleichgewichtsbewegung wird das System (10) als Approximation des *DG*-Systems (10b, c) und (12) für $\gamma \to \infty$ interpretiert. Dabei bedeutet der Grenzübergang $\gamma \to \infty$ in (12) den Übergang zur Gültigkeit der Gleichgewichtsbedingung (10a) in jedem Zeitpunkt. Es läßt sich zeigen[4], daß eine sinnvolle Anwendung dieses Approximationsverfahrens die Stabilität der durch die *DG* (12) beschriebenen „unendlich schnellen" Reaktionen voraussetzt. In (12) muß deshalb $\pi_{pp} < 0$ gelten, was nach (11) gewährleiset ist. Hierdurch wird auch das Vorzeichen von γ eindeutig festgelegt. Falls p einen Vektor darstellt, so ist einerseits die Stabilität der Matrix $\bar{H}_{pp}$ zu fordern, während andererseits die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung für ein inneres Maximum die negative Definitheit der Matrix $\bar{H}_{pp}$ verlangt.

---

[4] Vgl. *Schlicht* (1978) bzw. ausführlicher *Witzel* (1982).

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.5.479 | Generated on 2025-07-25 16:59:32
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Verallgemeinernd können wir also festhalten, daß unter geeigneten Voraussetzungen die Anwendung des Maximumprinzips von *Pontrjagin* zu Systemen führt, die ihrerseits als Approximationssysteme gemäß der Methode der Gleichgewichtsbewegung von *Lotka* interpretiert werden können. Die Zustands- und Kozustandsvariablen sind hierbei langsame Variablen, während die Kontrollvariablen die schnellen Variablen wiedergeben. Die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für ein inneres Maximum der entsprechend reduzierten Hamiltonfunktion $\bar{H}$, d. h. $\bar{H}_p = 0$, werden vergleichbar mit den Gleichgewichtsbedingungen bei der Methode der Gleichgewichtsbewegung. Die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung, d. h. die negative Definitheit von $\bar{H}_{pp}$, gewährleistet darüber hinaus die Stabilität einer geeigneten Dynamisierung der „unendlich schnellen" Reaktionen der Kontrollvariablen, die für die permanente Erfüllung der Optimalitätsbedingungen sorgen. Auf die Eigenschaft der Kontrollvariablen, „unendlich schnelle" Reaktionen ausführen zu können, weist auch *Takayama* (1974) in der Fußnote 10, S. 626, hin: „It is important to note that the bang-bang solution assumes that the jump in the control is ... 'inertialess'." Wie wir sehen, ist die Annahme „unendlich schneller" Reaktionsmöglichkeiten in den Kontrollvariablen nicht nur für Bang-Bang-Lösungen, sondern auch für Systeme, die eine innere Lösung besitzen, charakteristisch. Sprünge in den Kontrollvariablen können bei inneren Lösungen typischerweise lediglich in Form von Impakt-Reaktionen auftreten, d. h. „sofort" nach exogenen Störungen (siehe weiter unten).

4. Unter der üblichen Beschränkung auf die linearen Anteile wenden wir uns nun einer eingehenden Analyse des Systems (10) zu[5]. Aus der Gleichung (10a) erhalten wir die (schnelle) Kontrollvariable p als Funktion der (langsamen) Zustands- und Kozustandsvariable x und Φ:

$$p = f(x, \Phi) \quad \text{mit} \tag{13}$$

$$p_x \equiv f_x = \frac{1}{\pi_{pp}} < 0 \,, \tag{14a}$$

$$p_\Phi \equiv f_\Phi = -\frac{\alpha}{\pi_{pp}} > 0 \,. \tag{14b}$$

Berücksichtigen wir dies im *DG*-System (10b, c), so zeigt sich, daß eine Sattelpunktinstabilität vorliegt. Da der positive Eigenwert der zugehörigen Systemmatrix größer als r ist, muß wegen der Transversalitätsbedingung in (9) der Anfangspunkt (x_0, Φ_0) auf dem stabilen

[5] Es handelt sich hierbei um die detaillierte Analyse des Systems (36) von *Milde* (1982).

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.5.479 | Generated on 2025-07-25 16:59:32
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Ast liegen, für den $\Phi = \beta \cdot x$ mit $0 < \beta < 1/\alpha$ gilt. Die dominante Unternehmung setzt also in $t = 0$ den Preis auf

$$p_0 = f(x_0, \Phi_0) \ , \tag{15}$$

wobei $\Phi_0 = \beta \cdot x_0$ und $x(0) = x_0$ zu beachten ist. Falls vor dem Zeitpunkt $t = 0$ ein anderer Preis geherrscht hat, so liegt für $t = 0$ ein Preissprung vor, der dadurch bestimmt wird, daß die Kontrollvariable p für die permanente Gültigkeit der Optimierungsbedingung (10a) bei bei gegebenen Werten der Zustands- und Kozustandsvariable x und Φ sorgt. Im Rahmen der Gleichgewichtsbewegung wird dieser Sprung als Impakt-Reaktion bezeichnet.

Gilt $x_0 > x^*$, so folgt $\dot{x}(0) < 0$ und $\dot{\Phi}(0) < 0$, da sowohl der Anfangspunkt (x_0, Φ_0) als auch der langfristige Gleichgewichtspunkt (x^*, Φ^*) auf dem stabilen Ast liegen, der positive Steigung hat. Nachdem die dominante Firma den Preis für $t = 0$ gemäß (15) gesetzt hat, sinkt also der Marktanteil der Konkurrenz und der Kozustand. Hierdurch würde eigentlich die Optimierungsbedingung (10a) verletzt, wenn die dominante Unternehmung den Preis p nicht „unendlich schnell" unter Beachtung der *DG* (12) bzw. der Relationen (14) ändern würde. Eine Verringerung des Marktanteils der Konkurrenz führt demnach zu einer Preiserhöhung, während die Senkung des Kozustands, d. h. des Schattenpreises einer zusätzlichen Outputeinheit der Konkurrenz, eine Preissenkung auslöst. Diese beiden entgegengesetzten Preisreaktionen finden gleichzeitig und „unendlich schnell" statt, so daß die Optimierungsbedingung (10a) in keinem Zeitpunkt verletzt wird. Da die Bewegung entlang des stabilen Astes $\Phi = \beta \cdot x$ erfolgt, gilt $d\Phi = \beta \cdot dx$ mit $0 < \beta < 1/\alpha$. Für die gesamte optimale Preisreaktion der dominanten Firma auf eine Verringerung des Marktanteils der Konkurrenz erhalten wir somit

$$\left.\frac{dp}{dx}\right|_{\Phi = \beta \cdot x} = p_x + p_\Phi \cdot \frac{d\Phi}{dx} = \frac{1 - \alpha \cdot \beta}{\pi_{pp}} < 0 \ , \tag{16}$$

d. h. bei gleichzeitiger Beachtung der beiden partiellen Preisreaktionen überwiegt die direkte, die eine Preiserhöhung impliziert. Typischerweise gilt dieses Preissetzungsverhalten und seine Interpretation für alle Zeitpunkte $t > 0$. Das führt dazu, daß der dominante Anbieter den Preis im Laufe der Zeit allmählich vom Anfangspreis p_0 auf den langfristig gleichgewichtigen Preis p^* anhebt.

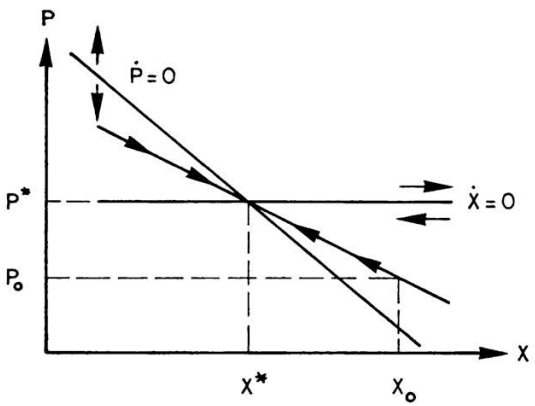
Den zugehörigen Anpassungspfad veranschaulichen wir im nachstehenden Phasendiagramm in der (x, p)-Ebene. Hierzu eliminieren wir in (10) die Variablen Φ und $\dot{\Phi}$ und gelangen zu

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.5.479 | Generated on 2025-07-25 16:59:32
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

(17a) $$\dot{p} = [r \cdot \pi_p + \alpha \cdot \pi_x + \alpha \cdot (p - b)]/\pi_{pp} \ ,$$

(17b) $$\dot{x} = \alpha \cdot (p - b)$$ [6].

Selbstverständlich ergibt sich wieder ein Sattelpunkt, dessen stabiler Ast diesmal wegen (16) die negative Steigung $(1 - \alpha \cdot \beta)/\pi_{pp}$ aufweist.



Phasendiagramm zu (17)

Zusammenfassung

Bei gewissen (recht üblichen) Strukturen der Zielfunktionen und der Übergangsgleichungen führt beim Vorliegen einer inneren Lösung die Anwendung des Maximumprinzips von *Pontrjagin* zu einem autonomen System, das sich als Approximationssystem nach der Methode der Gleichgewichtsbewegung von *Lotka* interpretieren läßt. Die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für ein inneres Maximum sind mit Gleichgewichtsbedingungen vergleichbar, und die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung garantiert die Stabilität der entsprechenden „unendlich schnellen" Reaktionen.

Summary

Under customary assumptions *Pontryagin*'s Maximum Principle leads to an autonomous system which may be interpreted as an approximation-system of the *Lotka* Moving Equilibrium type. The necessary first order conditions for an inner maximum are comparable with equilibrium conditions, and the sufficient second order condition guarantees the stability of the corresponding "infinitely fast" reactions.

[6] Vgl. (37) bei *Milde* (1982).

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.5.479 | Generated on 2025-07-25 16:59:32
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Literatur

Gaskins, D. W. (1971), Dynamic Limit Pricing: Optimal Pricing under Threat of Entry. Journal of Economic Theory 3, 306 - 322.

Milde, H. (1982), Limitpreisbildung unter Sicherheit und Unsicherheit. Zeitschrift für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften 4, 453 - 477.

Schlicht, E. (1978), Die Methode der Geichgewichtsbewegung als Approximationsverfahren, in: E. Helmstäder (Hrsg.), Neuere Entwicklungen in den Wirtschaftswissenschaften, Schriften des Vereins für Socialpolitik, N. F., 98, Berlin.

Takayama, A. (1974), Mathematical Economics. Hinsdale.

Witzel, R. (1982), Eine Erweiterung des Approximationsverfahrens gemäß der Methode der Gleichgewichtsbewegung. Unveröffentlichtes Manuskript, Universität Konstanz.

DOI https://doi.org/10.3790/schm.102.5.479 | Generated on 2025-07-25 16:59:32
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/