Betriebswirtschaftliche Forschungsergebnisse

Band 127

Optionspreise und optimale Portfolios auf unvollständigen Kapitalmärkten

Von

Alois Paul Knobloch

Duncker & Humblot · Berlin

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

ALOIS PAUL KNOBLOCH

Optionspreise und optimale Portfolios auf unvollständigen Kapitalmärkten

Betriebswirtschaftliche Forschungsergebnisse

Begründet von

Professor Dr. Dr. h. c. mult. Erich Kosiol (1899 – 1990)

Fortgeführt von dessen Schülerkreis

Herausgegeben von

Prof. Dr. Ernst Troßmann
Universität Hohenheim

in Gemeinschaft mit

Professor Dr. Oskar Grün
Wirtschaftsuniversität Wien

Professor Dr. Wilfried Krüger
Justus-Liebig-Universität Gießen

Professor Dr. Hans-Ulrich Küpper
Ludwig-Maximilians-Universität München

Professor Dr. Gerhard Schewe
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Professor Dr. Axel von Werder
Technische Universität Berlin

Band 127

Optionspreise und optimale Portfolios auf unvollständigen Kapitalmärkten

Von

Alois Paul Knobloch

Duncker & Humblot · Berlin

Die Fakultät Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
der Universität Hohenheim hat diese Arbeit im Jahre 2003
als Habilitationsschrift angenommen.

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in
der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische
Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Fotoprint: Berliner Buchdruckerei Union GmbH, Berlin
Printed in Germany

ISSN 0523-1027
ISBN 3-428-11630-5

Gedruckt auf alterungsbeständigem (säurefreiem) Papier
entsprechend ISO 9706 ♾

Internet: http://www.duncker-humblot.de

Pro amore parentum gratus
librum matri patrique decesso dedico

Vorwort

Am schönsten ist immer die Belohnung nach den Mühen. Und diese Belohnung wäre für mich, wenn dieses Buch aus Sicht des Lesers, also aus Ihrer Sicht, imstande ist, Erkenntnisgewinn zu schenken, die Gedanken auf neue Ideen zu richten und vielleicht noch den einen oder anderen Beitrag zum wissenschaftlichen Fortschritt zu leisten. Die Thematik scheint mir allemal lohnend: Die in Theorie und Praxis gängigen Methoden der Optionsbewertung und der Gestaltung von Portfolios greifen auf das Konstrukt idealer Kapitalmärkte zurück, welches realen Gegebenheiten auch als Näherung nicht standhält. Welchen Wert aber besitzen Ansprüche, welche zwar relativ zu vorhandenen Kapitalmarktpapieren formuliert werden, die aber mit diesen nicht (vollständig) nachgebildet werden können? Wie kann eine dynamische Portfolio-Optimierung unter Handelsrestriktionen aussehen? Diese Fragestellungen charakterisieren die vorliegende Arbeit, welche im Sommersemester 2003 als schriftliche Habilitationsleistung von der Fakultät Wirtschafts- und Sozialwissenschaften der Universität Hohenheim angenommen wurde.

„Dem Verdienste seine Kronen“[1] reichend danke ich mit großer Freude allen, welche zum Entstehen dieses Buches beigetragen haben. Zunächst gilt mein besonders herzlicher Dank meinem lieben Doktor- und Habilitationsvater, Herrn Professor (em.) Dr. Wolfgang Eisele. Er war mir, fachlich und persönlich, über die vielen gemeinsamen Jahre hinweg immer ein wertvoller Rückhalt und unterstützte mich in jeder Hinsicht bei der Bewältigung des steinigen Weges zum Hochschullehrer. Ebenfalls besonders herzlich danke ich Herrn Professor Dr. Ernst Troßmann, der in Zeiten zusätzlich hoher Beanspruchung durch das universitäre Prorektorat die Mühe des Korreferats wie selbstverständlich auf sich genommen hat. Ihm und den Mitherausgebern danke ich für die Aufnahme der Schrift in die Reihe „Betriebswirtschaftliche Forschungsergebnisse“. Herrn Professor (em.) Günter Dufey, MA, DBA, danke ich nicht minder herzlich dafür, dass ich einen Sommer lang sein Gast an

[1] *Friedrich Schiller*, An die Freude (1785).

der Business School der University of Michigan in Ann Arbor sein durfte, und für die anregenden Diskussionen mit ihm ebendort.

Ich bin dankbar, meiner lieben Mutter für alles Gute danken zu können, das ich von ihr erfahren habe. Gleiches würde ich gern meinem lieben, verstorbenen Vater tun.

Stuttgart, im September 2004 Alois Paul Knobloch

Inhaltsverzeichnis

Tabellen- und Abbildungsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

Abb.	Abbildung
abnehm.	abnehmend
AktG	Aktiengesetz
Aufl.	Auflage
Ausüb.	Ausübung
Ausz.	Auszahlung
bel.	beliebig(e,er,es)
bspw.	beispielsweise
bzw.	beziehungsweise
c.p.	ceteris paribus
Def.	Definition
d.h.	das heißt
ebd.	ebenda
ed.	editor/edition
eds.	editors
EStG	Einkommensteuergesetz
EUR	Euro
evtl.	eventuell
f.	folgende
ff.	fortfolgende
f.i.	fast immer
Fn.	Fußnote
f.s.	fast sicher
GewStG	Gewerbesteuergesetz
ggf.	gegebenenfalls
Gl.	Gleichung(en)
GmbHG	Gesetz betreffend die Gesellschaften mit beschränkter Haftung
HARA	hyperbolic absolute risk aversion
Hrsg.	Herausgeber
i.A.	im Allgemeinen
i.d.R.	in der Regel
i.e.S.	im engeren Sinne
i.H.v.	in Höhe von
inkl.	inklusive
insbes.	insbesondere
i.o.S.	in obigem Sinne
i.S.v./d.	im Sinne von/des,der
i.V.m.	in Verbindung mit
i.W.	im Wesentlichen
i.w.S.	im weiteren Sinne
KAAG	Gesetz über Kapitalanlagegesellschaften

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

konst.	konstant(e,er,es)
KStG	Körperschaftsteuergesetz
lit.	litera
m.w.N.	mit weiteren Nachweisen
Nr.	Nummer
Nutzenfkt.	Nutzenfunktion(en)
o.a.	oder andere(s)
o.Ä.	oder Ähnliches
o.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
PDE	partielle Differentialgleichung (partial differential equation)
P.-Option	Preisoption
Prod.	Produktion
Prod.-Prozess	Produktionsprozess
resp.	respektive
s.	siehe
S.	Seite(n)
s.d.f.s.	so dass fast sicher
s.o.	siehe oben
s.u.	siehe unten
Tab.	Tabelle
u.a.	und andere
u.a.m.	und andere(m,s) mehr
Ungl.	Ungleichung(en)
usf.	und so fort
u.U.	unter Umständen
u.v.a.m.	und vieles andere mehr
v.	von
Verf.	Verfall
Verpfl.	Verpflichtung
vgl.	vergleiche
Vol.	Volume
z.B.	zum Beispiel
z.T.	zum Teil
zunehm.	zunehmend
zzgl.	zuzüglich

Symbolverzeichnis

Die aufgeführten Symbole können z.T. durch Indizes noch näher spezifiziert und z.T. auch kontextspezifisch sein. Sofern sich durch eine Differenzierung über Zusätze, wie z.B. „˜, ˆ“, oder die Indizierung keine Symbole mit grundsätzlich neuer Bedeutung ergeben, wird diese nicht separat gekennzeichnet.

$a[(.)]$	transformierte[r] Matrix[prozess] $(= \sigma[(.)]\sigma'[(.)])$ (u.a.)
$A(.)$	Prozess endlicher Variation
$\mathcal{A}_{.}(.;.)$	Menge (ggf. restringiert) zulässiger Konsum-/Portfolio-Prozesspaare; Algorithmus
$ARA(.)$	absolute Risikoaversion
$b_{(.)}(.)$	(ggf. mehrdimensionaler) Driftprozess (u.a.)
$B_{.}^{.}(.)$	Bedingter Anspruch bzw. Auszahlungsprozess des bedingten Anspruches
$\mathcal{B}$	Borel σ-Algebra
$c_{...}(.)$	Konsumprozess; Funktion der relevanten Intervallgrenze für „rectangular constraint“
$C_{.}$	Kostenprozess
$C^{1,2}(Q)$	Menge der im ersten Argument einmal, im zweiten (und weiteren) zweimal stetig differenzierbaren Funktionen über der Menge Q
d	Anzahl der Unsicherheitsquellen (Wiener-Prozesse) am Markt
$d_{1/2}^{.}$	Auswertungsstellen für die Verteilungsfunktion zur Standardnormalverteilung
$\mathcal{D}_{(0)}^{(b)}$	Schattenpreismenge
ds_0	Anfangswert für diskontierten Aktienkursprozess
$DS(.)$	diskontierter Aktienkursprozess
$e_{.}$	Vektor einer Basis/der kanonischen Basis
$(\mathcal{E}_{.})$	Problem der Endvermögensoptimierung
$f_{.}(...)$	Hilfsfunktion im konvexen Optimierungsproblem; Diskontierungsfunktion zur „rectangular constraint“; Funktionensymbol
$F(...)$	Funktion der finalen Kosten im Problem der stochastischen Steuerung
$\mathcal{F}_{(.)}$	σ-Algebra über Ω bzw. Element der Filtration zum Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$	Filtration zum Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
$g_{.}(.)$	Funktion zur Charakterisierung einer Nebenbedingung
$G_{.}(.)$	Gewinn-/Verlust-Prozess; Hilfsfunktionen
$h_{...}^{...}(...)$	Optionswert; als Variable: Obergrenze für Wert der *Sharpe ratio*
$\mathcal{H}$	Menge progressiv-messbarer Prozesse $X(.)$ mit $\int_0^T X_t^2\,dt < \infty,\ P$-fast sicher
$H_{0/\nu}(.)$	Zustandspreis-Dichte-Prozess
$H(.)$	(Cross-)Entropie

I	Betrachtungszeitraum; Indexmenge
$I_{(.)}^{(L)}(.)$	stochastisches Integral; Umkehrfunktion zu $U'(...)$; Vorleistungswertprozess (des betrachteten Unternehmens/Zulieferers)
$I_0^{(L)}$	Anfangswert der Vorleistungen des betrachteten Unternehmens/ Zulieferers
I_h	Basispreis der Preisoption
I_k	$k \times k$-Einheitsmatrix
$J(...)$	Gesamtkosten-Funktional im Problem der stochastischen Steuerung
$\mathcal{J}$	Indexmenge
$K_{(+/-)}$	Restriktionenmenge zum Portfolio-Prozess in Relativbeträgen
$\tilde{K}_{(+/-)}$	Menge zu betrachtender Schattenpreise mit $\zeta(\nu) < \infty$
$\mathcal{K}(\sigma)$	Kern zu der durch σ bestimmten linearen Abbildung
$(\mathcal{K}_.)$	Problem der Entnahmeoptimierung
$KB(.)$	Kursprozess eines Kuponbonds
$(\mathcal{KE}_.)$	Problem der simultanen Entnahme- und Endvermögensoptimierung
$L(...)$	Lagrangefunktion; Funktion der laufenden Kosten im Problem der stochastischen Steuerung (u.a.)
$\mathcal{L}$	Menge progressiv-messbarer Prozesse $X(.)$ mit $E\left[\int_0^T X_t^2\,dt\right] < \infty$
m_i	Diskontierungsfaktor zu einer Zahlung i.H.v. 1 in Umweltzustand i
$M_.(.)$	(lokales) Martingal
$M^{unv/Lv/vst}$	Kennzeichnung der Marktsituation in Bezug auf eine Aktie als unvollständig i.e.S./einem Leerverkaufsverbot unterliegend/ vollständig
$\mathcal{M}^{vst/unvst}$	spezifizierter vollständiger/unvollständiger (Kapital-)Markt
$\mathcal{M}_\nu$	Schattenmarkt zum Schattenpreisprozess $\nu(.)$
n	Anzahl risikobehafteter Wertpapiere (Aktien) am Markt
$N(.,.)$	Normalverteilung
$\mathcal{N}$	Nullmenge (Menge aller Ereignisse mit Wahrscheinlichkeit null)
$\bar{O}$	Abschluss der Menge O
∂O	Rand der Menge O
$P_{(0,\nu)}[(.)]$	Wahrscheinlichkeitsmaß
$p_.$	Eintrittswahrscheinlichkeit im diskreten Fall
$(p_0(.), p'(.))'$	Portfolio-Prozess in Relativbeträgen
$P_.$	Menge von Preissystemen
$(P_.)$	(Teil-)Optimierungsprobleme
$(\mathcal{P}_{KS})$	Problem der Konzernstrukturierung
$(\mathcal{PS})$	statisches Optimierungsproblem
$\mathbb{P}(Q)$	Potenzmenge zur Menge Q
$q_.$	Pseudo-Wahrscheinlichkeit im diskreten Fall
$Q[(.)]$	Wahrscheinlichkeitsmaß (u.a.)
$r(.)$	Prozess der kontinuierlichen, risikolosen Verzinsungsrate (risikoloser Zinssatzprozess)
$R_.(.)$	Risikoprozess

$\mathcal{R}(\sigma)$	Vektorraum der Bilder zu der durch σ bestimmten linearen Abbildung
$RB(.)$	Kursprozess eines risikolosen Bonds (bei stochastischer Zinsstruktur)
$RRA(.)$	relative Risikoaversion
$s_.$	Wertpapierpreis für diskreten Fall
$S_i(.)$	Kursprozess der Aktie $i \in \{1, \ldots, n\}$ bzw. des risikolosen Bonds $i = 0$
$\mathcal{S}$	Steuersystem; Menge von Stoppzeiten
t	Zeitindex
T	Planungshorizont
$\mathcal{T}$	Menge, insbesondere (restringiert) zulässiger Portfolio-Prozesse
$u_{(.)}^{(.)}(.)$	Steuerungsprozess im Problem der stochastischen Steuerung; Hilfsvariable/-funktion bei der Ermittlung von Preisgrenzen
$U_.$	offene Menge; Untervektorraum
$U(...)$	Nutzenfunktion
$\tilde{U}(.)$	konvexes Dual zur Nutzenfunktion $U(.)$
$v_{...}$	Wertpapierrückfluss(matrix) im diskreten Fall
$V_{(.)}(.,.)$	(totale) Variation; Wertfunktion; Output-Wertprozess
$\tilde{V}(.)$	konvexes Dual zur Wertfunktion $V(.)$
V_0	Anfangswert des Outputs des betrachteten Unternehmens
$w_i(.)$	lineare Abbildungsfunktion zum (Teil-)Optimierungsproblem (P_i)
$W_{(0,\nu)}$	(mehrdimensionaler) Wiener-Prozess (Brown'sche Bewegung)
W_i	Abbildungsmatrix zum (Teil-)Optimierungsproblem (P_i)
$WP_.$	Wertpapier
x	Anfangsvermögen (u.a.)
$X_{...}^{...}(.)$	Vermögensprozess; Zufallsvariable
$\mathcal{X}_.^.(.)$	Betragsfunktion
$y^.$	(Vektor/Matrix der) Investitionsbeträge in ein/sämtliche Wertpapier/e im diskreten Fall
$\mathcal{Y}_.^.(.)$	Umkehrfunktion zur Betragsfunktion
z	Vektor von Zustandspreisen im diskreten Fall (Preissystem; u.a.)
$Z_{0/\nu}(.)$	Hilfsprozess für den Wechsel auf das Wahrscheinlichkeitsmaß P_0 bzw. P_ν, so dass $Z_{0/\nu}(T)$ der Radon-Nikodým-Ableitung $\frac{dP_0}{dP}$ bzw. $\frac{dP_\nu}{dP}$ entspricht.
$ZB(.)$	Kursprozess eines Zerobonds
$\alpha_{(.)}[(.)]$	(Vektor der) untere(n) Intervallgrenze(n); beleihungsfähiger Anteil eines Wertpapieres
$\beta_{(.)}$	(Vektor der) obere(n) Intervallgrenze(n); Variable zur Kennzeichnung der „Power-type"-Nutzenfunktion
$\gamma^{(.)}[(.)]$	Vorgabe für den Anteil des Reinvermögen an den gesamten Aktiva; Funktion zur Abbildung des Faktors zum Portfolio-Prozess nach Nutzenfunktion sowie mit/ohne Steuern (u.a.)
$\delta_{(.)}(.)$	(ggf. mehrdimensionaler) Dividendenprozess
$\Delta_.(.)$	Differenz(prozess)
$\zeta_.(\nu[(.)])$	Hilfsfunktion über den Schattenpreis(vektor) ν zur Modifikation der Kursprozesse für die Kapitalmarktpapiere
$\theta_{(\nu)}(.)$	Risiko-Marktpreisprozess

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

κ	Verschuldungsobergrenze
$\lambda_{(.)}$	Verschuldungsgrad; Schattenpreis(vektor); Eigenwert
$\mu[(.)]$	Maß; Schattenpreis(vektor)
$\nu(.)$	Schattenpreisprozess
$\xi_{(.)}$	(stochastisches) Endvermögen
$(\pi_0(.), \pi'(.))'$	Portfolio-Prozess in Absolutbeträgen
Π	Zerlegung
$\rho_{(.)}[(.)]$	Korrelation[sprozess] (u.a.)
$\sigma_{(.)}(.)$	Volatilitätsprozess
$\sigma\{.\}$	generierte σ-Algebra
$\tau_.$	Stoppzeit
$(\varphi_0(.), \varphi'(.))'$	Handelsprozess; stochastischer Prozess
$\Phi^{[.]}(.[, .])$	Menge von Handelsprozessen; Verteilungsfunktion zur [bivariaten] Standard-Normalverteilung
$\psi_{(.)}(.)$	Integrandenprozess in Martingaldarstellung
$\Psi^{(lm/fv)}(.)$	Semimartingal/lokales Martingal/Prozess mit endlicher Variation
ω	Element aus Ω [Umweltentwicklung]
Ω	Menge [der (Umwelt-)Entwicklungen]
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen
$0_{k,l}$	$k \times l$-Matrix mit sämtlichen Einträgen identisch null
$\mathbf{0}_n$	n-dimensionaler Vektor, dessen Komponenten ausschließlich den Wert 0 aufweisen
$\mathbf{1}_n$	n-dimensionaler Vektor, dessen Komponenten ausschließlich den Wert 1 aufweisen
$[X, X]_.$	quadratische Variation des Prozesses $X(.)$
$[X, Y]_.$	quadratische Kovariation der Prozesse $X(.)$ und $Y(.)$
$\square$	Kennzeichnung für das Ende eines Beispieles oder Beweises

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

1. Einführung

Auf den Schultern der Arbitragefreiheit glaubte man lange Zeit, auch unter Unsicherheit einen stabilen Boden für die Bewertung bedingter Ansprüche zu spüren. Das hierauf basierende Duplikationsprinzip scheint überzeugend: Wenn durch Transaktionen auf dem Kapitalmarkt das Auszahlungsprofil des bedingten Anspruches (Option) für sämtliche relevanten Umweltlagen nachgebildet werden kann, muss der Gegenwartswert des Anspruches dem zur Nachbildung notwendigen Ausgangsvermögen entsprechen. Der gedankliche Unterbau für dieses Bewertungsargument, welcher darin besteht, Zahlungen zeit- und zustandsabhängig zu begreifen, wurde durch *Arrow* (1953) und *Debreu* (1959) gelegt[1]. Über deren diskrete Modellierung von Zeit und Zuständen ging die Entwicklung schnell hinaus zur Abbildung zeit- und zustands-kontinuierlicher stochastischer Kursprozesse. Bis heute von herausragender Bedeutung für die Modellierung von Aktienkursprozessen ist hierbei die geometrisch Brown'sche Bewegung (*Samuelson* (1965)), welche die kontinuierliche Aktienkursrendite über eine deterministische Zeitdrift und eine normalverteilte Streuung um diesen Trend beschreibt[2]. Sie liegt dem grundlegenden Bewertungsmodell der Optionspreistheorie von *Black/Scholes* (1973) zugrunde. Danach kann das Auszahlungsprofil einer europäischen Aktien-Kaufoption durch ein Portfolio aus einer Position im risikolosen Bond und einer Position in der optierten Aktie nachgebildet werden. Der für das Duplikationsportfolio zu Beginn benötigte Betrag entspricht dem Gegenwartspreis der Option. Das Portfolio ist in seiner Zusammensetzung zeitkontinuierlich an die Entwicklung des Aktienkurses anzupassen. Damit allerdings der dergestalt festgelegte Optionspreis in diesem Sinne eindeutig ist, also sowohl von einem potentiellen Käufer als auch von einem potentiellen Verkäufer, jeweils mit beliebiger Risikopräferenz, gleichermaßen akzeptiert wird, müssen sowohl eine Short-Position in der Option durch eine Long-Position im Portfolio als auch umgekehrt eine Short-Position in diesem Portfolio über eine Long-Position in der Option hedgebar sein. Insgesamt erfordert dies ideale Marktbedingungen: Zum einen garantiert

[1] Zu der auf *Arrow* und *Debreu* zurückgehenden Zeit-Zustands-Präferenztheorie vgl. bspw. auch *Zimmermann* (1998) sowie *Magill/Quinzii* (1996).

[2] Die Bedeutung dieses Beschreibungsmodells ergibt sich aus der Kombination von akzeptabler respektive akzeptierter Beschreibungsgüte von Aktienkursbewegungen und seiner Handhabbarkeit im Hinblick auf die Herleitung von Bewertungs- und sonstigen Ergebnissen. Die geometrisch Brown'sche Bewegung stellt eine Modifikation der arithmetisch Brown'schen Bewegung dar, welche die *absoluten* anstelle der *relativen*, sich auf die Rendite beziehenden Änderungen der betrachteten Prozessvariablen über eine Zeitdrift und eine normalverteilte Zufallsvariable beschreibt; vgl. bereits *Bachelier* (1900).

Marktvollkommenheit einen unbegrenzten (bezüglich Volumen und Vorzeichen), friktionslosen (u.a. keine Transaktionskosten) und kontinuierlichen Handel in den Kapitalmarktpapieren. Zum anderen wird die Duplikation erst dadurch möglich, dass sich der unrestringierte Handel in der Aktie auf dieselbe Risikoquelle bezieht, die der Option unterliegt, und zugleich eine geeignete Steuerung des Portfolio-Risikos im Hinblick auf das Optionsrisiko erlaubt (Vollständigkeit des Marktes). *Harrison/Kreps* (1979) und *Harrison/Pliska* (1981) vertieften die arbitragefreie Bewertung unter solchen idealen Kapitalmarktbedingungen und verallgemeinerten sie auf beliebige bedingte Ansprüche: Danach existiert auf dem idealen Kapitalmarkt ein eindeutiges System arbitragefreier Preise[3]; darüber hinaus ist ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß mit der Eigenschaft gegeben, dass der Preis eines bedingten Anspruches dessen (diskontiertem) Erwartungswert unter diesem Wahrscheinlichkeitsmaß entspricht. Ausgehend von diesem Betrag lässt sich ein Portfolio konstruieren und dynamisch fortentwickeln, welches den bedingten Anspruch dupliziert und dabei stets eine Budgetbedingung in der Form einhält, dass der (diskontierte) Erwartungswert des Portfoliowertes zu einem beliebigen Zeitpunkt bis zur Fälligkeit des Anspruches (höchstens) dem Ausgangswert entspricht. Der sich daraus ergebende Vermögensprozess ist ein *(Super-)Martingal*[4]. Angesichts der Möglichkeit, Vermögensprozesse zu generieren, welche bedingte Ansprüche duplizieren, erscheint es nahe liegend, die Steuerung von Vermögensprozessen auch in anderer Hinsicht zu verfolgen. *Merton* (1969, 1971) führte hierzu die Optimierung von Portfolio(-Prozessen) im Hinblick auf die Maximierung des Erwartungsnutzens aus Entnahmen und Endvermögen, also eine dynamische Portfolio-Optimierung, erstmals auf Basis kontinuierlicher stochastischer Prozesse ein[5]. Die sowohl für duplizierende als auch für nutzenoptimierende Vermögensprozesse zunächst unterstellten idealen Marktbedingungen weichen naturgemäß von realen Kapitalmarktverhältnissen ab, so dass in verschiedener Hinsicht bereits Abwandlungen des Idealmarktes untersucht wurden. Dies betrifft z.B. die Berücksichtigung von Transaktionskosten, welche bei der duplizierenden respektive optimierenden Portfolio-Bildung entstehen. Da es im fokussierten Themengebiet einer Richtungsvorgabe für die weitere Untersuchung bedarf, wird die aus der Existenz von Transaktionskosten entstehende Unvollkommenheit des Marktes mit den

---

[3] Auf verschiedene stochastische Inhalte des Begriffes „eindeutig" soll an dieser Stelle noch nicht eingegangen werden. Auch nachfolgend angesprochene stochastische Begriffe und Zusammenhänge werden erst im darauf folgenden Kapitel präzisiert.

[4] Der Begriff wird auf S. 35 erklärt.

[5] Im Weiteren ist der Begriff der „Portfolio-Optimierung" (fast durchweg) dynamisch und nicht im Sinne der statischen Portfolio-Optimierung von *Markowitz* (1952, 1959) — vgl. zur Monographie aus 1959 die zweite Auflage *Markowitz* (1991) — zu verstehen, die natürlich gleichwohl grundlegend ist; vgl. zu dieser stellvertretend für viele Quellen *Breuer/Gürtler/Schuhmacher* (1999), *Copeland/Weston/Shastri* (2005), S. 101 ff., *Ross/Westerfield/Jaffe* (2002), S. 242 ff. Dies gilt in gleicher Weise für Aspekte der Portfolio-Steuerung nach Risikomaßgrößen, wie demjenigen des Value-at-Risk, im Rahmen des Risikomanagements; vgl. hierzu etwa *Eisele/Knobloch* (2000), S. 166 ff.

sich daraus ergebenden Konsequenzen in Bezug auf die Portfolio-Optimierung und die Bewertung bedingter Ansprüche nicht weiterverfolgt[6].

Untersucht werden in der vorliegenden Arbeit die dynamische Portfolio-Optimierung und Bewertungskonzepte für bedingte Ansprüche, welche in der folgenden, zugleich den Ablauf der weiteren Untersuchung wiedergebenden Hinsicht behandelt werden: Die Portfolio-Optimierung in ihrer (nahezu) ursprünglichen Form wird zunächst durch die Einführung eines Steuersystems und die Darstellung des sich für die Portfolio-Strukturierung daraus ergebenden Effektes ergänzt. Voraussetzung hierfür sowie für das Folgende ist die Präsentation der Portfolio-Optimierung und der Bewertung bedingter Ansprüche auf idealen Kapitalmärkten, welche ihrerseits eine Einführung in stochastische Grundlagen erfordert. Beides erfolgt zusammen mit der Steuererweiterung im *zweiten Kapitel.* Die dieses abschließenden Ausführungen zu Realoptionen sind bestimmt, den — nachfolgend angesprochenen — eigenen Beitrag zur Bewertung von Realoptionen auf unvollständigen Märkten vorzubereiten.

Im *dritten Kapitel* wird die ideale Welt aufgegeben und es werden in Bezug auf die Portfolio-Optimierung speziell diejenigen Ansätze weiterverfolgt, welche sich auf Beschränkungen der Handelbarkeit der Kapitalmarktobjekte, wie bspw. durch Leerverkaufsrestriktionen, konzentrieren. Damit bewegt man sich nunmehr auf Kapitalmärkten, welche eine Duplikation beliebiger Ansprüche nicht mehr garantieren, d.h. auf solchen, die *unvollständig* sind. Die als Ausgangspunkt herangezogenen Ansätze fußen auf einem Dualansatz, welcher eine fiktive Vervollständigung des Marktes durch die Einführung eines (mehrdimensionalen) Schattenpreisprozesses unterlegt und damit an die auf dem Martingalkonzept beruhende Portfolio-Optimierung des vollständigen Kapitalmarktes anzuknüpfen vermag. Grundlegende Beiträge wurden hierzu von *Karatzas/Lehoczky/Shreve/Xu* (1991)[7], *He/Pearson* (1991) sowie *Cvitanić/Karatzas* (1992) erbracht. Neben „kleineren“ Ergänzungen der Ergebnisse des diesbezüglichen Schrifttums liegen eigenständige Beiträge vor allem in der Erweiterung des Spektrums auswertbarer Restriktionen, indem eine Beschränkung des Verschuldungsgrades zusätzlich zum Verbot von Aktienleerverkäufen der Portfolio-Optimierung auferlegt wird, und in der algorithmischen Bestimmung optimaler Schattenpreisprozesse unter dieser sowie einer weiteren im Schrifttum eingeführten Restriktionenklasse vor. Darüber hinaus wird auch für den unvollständigen Kapitalmarkt die Wirkung des für den vollständigen Markt eingeführten Steuersystems untersucht.

Bezüglich der Beurteilung bedingter Ansprüche auf unvollständigen Kapitalmärkten werden Ansätze zur Herleitung von Preisgrenzen (z.B. *El Ka-*

---

[6] Insofern soll der Verweis auf die ausführliche Behandlung der jeweils entstehenden Problemstellung bei *Nietert* (1996) bzw. *Reiß* (1997) — jeweils m.w.N. — genügen.

[7] Beachte zudem die Dissertation *Xu* (1990), zitiert nach *Karatzas/Shreve* (1998), S. 318, sowie als Ausgangspunkt des Dualansatzes *Bismut* (1975).

roui/Quenez (1991, 1995)), zur präferenzabhängigen Ermittlung eines eindeutigen Optionswertes (z.B. *Davis* (1997)) sowie des (partiellen) Hedging (z.B. *Föllmer/Schweizer* (1991)) vorgestellt und diskutiert. Die im Schrifttum vorzufindenden Ergebnisse zur Bestimmung von Arbitragegrenzen für bedingte Ansprüche bilden dann den Ausgangspunkt für weiterführende Überlegungen, denen eine Interpretation des bedingten Anspruches als Realoption zugrunde liegt. Hierbei wird der im Wesentlichen neue Aspekt einer *differenzierten Unvollständigkeit* des Marktes eingebracht. Dahinter verbirgt sich eine Marktstruktur, welche für verschiedene Wirtschaftssubjekte in ungleicher Weise unvollständig ist. Dies kann bspw. dann der Fall sein, wenn der Zulieferer eines (Vor-)Produktes in diesem short gehen könnte, indem er Lieferverpflichtungen eingeht, die Möglichkeit hierzu für seinen Abnehmer jedoch nicht besteht. Für unterschiedliche Ausprägungen dieser differenzierten Unvollständigkeit wird gezeigt, dass das Intervall arbitragefreier Preise für den betrachteten Anspruch durch Verträge in Gestalt von Abnehmeroptionen verengt werden kann und dadurch eine Steigerung des Mindestwertes der (Real-)Option erzielbar ist.

Die mit der vorliegenden Arbeit verfolgte Intention besteht somit in vor allem ökonomisch motivierten Ergänzungen verschiedener, für das Themengebiet grundlegender Ansätze und der Einbringung eines im Wesentlichen neuen Aspektes im Kontext der Bewertung von Realoptionen auf unvollständigen Kapitalmärkten[8]. Zur Vorgehensweise sei noch angemerkt, dass die als Ausgangspunkt dienenden Ansätze zwar auf einer zunächst allgemein gehaltenen Modellierung beruhen, eine Konkretisierung stochastischer Prozesse sich aber oft nicht vermeiden lässt und dann zumeist in Richtung deterministischer Prozesse für den risikolosen Zinssatz und/oder die Aktienkurse weist. Diesbezüglich werden insbesondere unterschiedliche Zinsmodelltypen nicht vertieft[9]. Darüber hinaus bleibt die Modellierung der Kapitalmarktwelt auf stetige Prozesse beschränkt; Sprungprozesse, welche der Abbildung von Diskontinuitäten aufgrund plötzlich eintretender „stark“ wertrelevanter Ereignisse dienen, werden somit nicht betrachtet.

[8] Die hierbei angestellten Überlegungen bieten zugleich einen Erklärungsansatz für Vertragskonstruktionen zwischen rechtlich und wirtschaftlich eigenständigen Unternehmungen in der Wertschöpfungskette.

[9] Diesbezüglich seien *Rudolf* (2000) sowie *Branger/Schlag* (2004) als Referenzen — wiederum m.w.N. — angeführt.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

2. Unsichere Investitionsrückflüsse bei idealen Kapitalmärkten

Gegenstand der folgenden Betrachtungen ist die Bepreisung bedingter, d.h. zustandsabhängiger Ansprüche und die dynamische Strukturierung optimaler Portfolios unter den idealen Bedingungen eines vollkommenen und vollständigen Kapitalmarktes. Die Betrachtung bedingter Ansprüche wird unter den Idealmarktbedingungen zudem auf eine Reihe bzw. einen Strom bedingter Zahlungen ausgedehnt, mittels welcher ein Sach- bzw. Finanz-Investitionsobjekt repräsentierbar ist[10]. Für die entscheidungsrelevanten Charakteristika der Investitions- bzw. Handelsobjekte wird ein Beschreibungsmodell eingeführt, welches mit der konkret unterstellten Marktstruktur abzustimmen ist.

Die Spezifikation des Beschreibungsmodells und der Marktstruktur setzt gewisse Grundkenntnisse der Stochastik voraus. Um die Darstellung (weitgehend) aus sich selbst heraus verständlich zu gestalten, bietet *Abschnitt 2.1.1* deshalb zunächst eine Einführung in die notwendigen stochastischen Grundlagen, soweit sie eine allgemeine Charakterisierung stochastischer Prozesse — mit einer Konkretisierung für Aktienkursprozesse — sowie die Besonderheiten des stochastischen Kalküls betreffen. Diese Grundlagen werden in *Abschnitt 2.1.2* um die Steuerung von Vermögensprozessen ergänzt, so dass unmittelbar eine formale Charakterisierung des unterstellten Marktes angegeben werden kann. Insgesamt sollten damit auch die Voraussetzungen zum Verständnis der formalen Ausführungen zur Bewertung bedingter Ansprüche und zur Portfolio-Optimierung gelegt sein.

Im Rahmen der *Investitionseinzelentscheidungen* werden zustandsabhängige Investitionszahlungen bewertet, welche als *vorgegeben* in dem Sinne zu betrachten sind, dass sie vom Investor nicht beeinflussbar sind. Die Bewertung dieser bedingten Zahlungen wird hier lediglich vor dem Hintergrund der konkreten Marktmodellierung und in der gebotenen Kürze besprochen (*Abschnitt 2.2.2*). Dies hängt vor allem damit zusammen, dass sich das Entscheidungsproblem bereits ohne allzu weit gehende Spezifikation der Investorpräferenzen im Grundsatz lösen lässt. Unter den Idealmarktbedingungen wird sich für sämtliche, u.U. an bestimmte Umweltentwicklungen anknüpfende Zahlungen in der Zukunft ein eindeutiger Preis zu jedem vorausgehenden Zeitpunkt einstellen. Damit lässt sich ein konsistenter Markt- bzw. Ertragswert zu

[10] Eine solche Erweiterung ist auf unvollständigen Kapitalmärkten nicht ohne weiteres möglich.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

jedem zukünftigen Zahlungsbündel ableiten, welcher seinerseits in beliebiger Weise zustandsabhängig in die Zukunft transferierbar ist.

Im Mittelpunkt dieses Kapitels steht demgegenüber die optimale Strukturierung von Portfolios im Zeitablauf (dynamische Portfolio-Optimierung, *Abschnitt 2.2.3*). Hierbei konzentriert sich die Betrachtung im Wesentlichen auf Handelsobjekte oder allgemeiner auf solche Gegenstände, die sich aus Sicht der Investoren wie Aktien charakterisieren lassen. Für die Repräsentation eines Handelsobjektes wird deshalb auf ein Modell der Wertentwicklung abgestellt, das dem im Schrifttum bevorzugt verwendeten Modell zur Beschreibung von zeitstetigen, stochastischen Aktienkursentwicklungen entspricht (und sich im einfachsten Fall auf eine geometrisch Brown'sche Bewegung reduziert). Die Wahl für die Ausrichtung dieses Beschreibungsmodells lässt sich zunächst damit begründen, dass Aktien bereits selbst unmittelbare Objekte von *Finanzinvestitionen* sind. Dass sie dabei letztlich Ansprüche auf *Sachinvestitionen* vermitteln, verdeutlicht, dass ein zur Beschreibung der realen Wertentwicklung von Aktien akzeptiertes Modell zugleich akzeptabel sein muss, um die Wertentwicklung von Sachinvestitionen (zumindest in einem Konglomerat von Einzelinvestitionen) zu repräsentieren[11]. Damit erstreckt sich die Portfolio-Optimierung nicht nur auf Finanzinvestitionen in einem engen Sinne, sondern zudem auf durch diese repräsentierte Ansprüche aus Sachinvestitionen. Inwieweit hierdurch auch „kleine" Investitionen i.S. solcher Vorhaben erfasst sind, die sich nicht auch im Rahmen einer eigenen, auf den Gütermärkten auftretenden Unternehmung mit möglicher Bewertung durch den Finanzmarkt realisieren lassen, ist allerdings fraglich. Sie werden um einer notwendigen Eingrenzung des Untersuchungsobjektes willen implizit von der Betrachtung ausgeschlossen[12]. Die mit Aktien üblicherweise verbundene Vorstellung einer jederzeitigen Handelbarkeit wird, ohne der Definition der vorausgesetzten Marktgegebenheiten allzu sehr vorgreifen zu wollen, damit gleichfalls unterstellt. Betrachtet man Aktien wiederum stellvertretend auch für realiter nicht durch Effekten repräsentierte Ansprüche auf Sachinvestitionen, so bedeutet dies, dass aus Sicht eines beliebigen Zeitpunktes innerhalb der Laufzeit von Investitionen zukünftige Ansprüche aus diesen in irgendeiner Weise am Markt bepreisbar sind, da identische Ansprüche generiert werden können. Deren Gegenwartswerte können insgesamt zu einem Ertragswert des betrachteten Zeitpunktes, mithin zum Wert der (virtuellen) Aktie zusammengefasst werden. Für die diesem Kapitel zugrunde liegenden Idealmarktbedingungen erscheint die Verdichtung eines Zahlungsstromes auf einen Einzelwert angesichts der Vorbemerkung zu den Investitionseinzelentscheidungen als zulässige Vorstel-

[11] Das hier zugrunde liegende und vom Schrifttum bevorzugte Beschreibungsmodell erfüllt zudem plausible Charakteristika, welche die dynamische Entwicklung eines (aggregierten) Investitionsobjektes kennzeichnen. Zu grundsätzlichen Überlegungen den betrieblichen Wachstumsprozess betreffend vgl. *Eisele* (1974), insbesondere auch S. 2 f.

[12] Es erfolgt damit zunächst bspw. auch keine weitere Differenzierung danach, wie sich dieser Wert aus Entwicklungen von Absatzpreisen und Beschaffungspreisen für Produktionsfaktoren ergibt; vgl. hierzu in einem einfachen Fall *Dixit/Pindyck* (1994), S. 179 ff.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

lung, wenngleich die Abbildung der Wertentwicklung im jeweils unterstellten Aktienkursprozess als weitere idealisierende Annahme zu begreifen ist. Letztlich bedeutet dies dann, dass auch Sachinvestitionen in Form von verschiedenen Aktien handelbar sind.

Abschnitt 2.2.4 knüpft an die Beurteilung von Einzelansprüchen an. Allerdings werden nun keine vorgegebenen, vom Investor nicht beeinflussbaren Zahlungen betrachtet, vielmehr geht es um bedingte Zahlungen, welche aus Handlungs*möglichkeiten* im Bereich von Sachinvestitionen entstehen. Die bedingten Zahlungsansprüche werden als *Realoptionen* bezeichnet. Optionale Elemente im Rahmen einer Investitionsentscheidung können im Verschieben des Investitionsbeginns, in einer von der Entwicklung der Rahmenbedingungen abhängigen Fortführung oder Beendigung der Investition, einer vorübergehenden Stilllegung u.a.m. bestehen. Der Bewertung von Realinvestitionen kommt in zweierlei Hinsicht Bedeutung zu: Zum einen lässt sich eine Handlungsempfehlung im Hinblick auf die Ausübung oder Nicht-Ausübung der Option ableiten, zum anderen erhöhen Handlungsoptionen den Wert des Investitionsobjektes Unternehmung, so dass sie im Rahmen einer Unternehmensbewertung nicht vernachlässigbar sind[13]. *Abschnitt 2.2.4* dient jedoch im Wesentlichen der Vorbereitung auf die Behandlung von Realoptionen im darauf folgenden Kapitel, so dass lediglich eine knapp gehaltene Einführung in die Thematik erfolgt, zumal im Schrifttum bereits zahlreiche Abhandlungen zur Bewertung von Realoptionen auf idealen Märkten zu finden sind.

Die Ausführungen setzen mit einer Darstellung der stochastischen Grundlagen ein, auf deren Gerüst die dynamische Portfolio-Optimierung und die Bewertung bedingter Ansprüche, einschließlich Realoptionen, aufbauen.

2.1 Zur Beschreibung stochastischer Wertentwicklungen und Spezifizierung des Marktes

Als Grundlage für die weiteren Betrachtungen dient ein Modell zur Abbildung zeitkontinuierlich sich entwickelnder, zufallsabhängiger Werte von Handelsobjekten, die zusammen mit einer risikolosen Anlage- bzw. Verschuldungsmöglichkeit den Markt für Investitionen konstituieren. Es werden zunächst die Grundlagen zum Verständnis der Stochastik des Marktes gelegt, bevor dieser formal charakterisiert wird. Dabei wird zur Veranschaulichung der stochastischen Grundbegriffe teils noch auf zeit- und zufallsdiskrete Prozesse zurückgegriffen.

[13] Vgl. *Lucke* (2001), S. 1 f.

2.1.1 Relevante Grundlagen aus der Stochastik

Der erste Teil der stochastischen Grundlagen ist allgemeinen stochastischen Prozessen gewidmet; er schließt mit der Beschreibung des für die Modellierung von Aktienkursentwicklungen zentralen Wiener-Prozesses (*Abschnitt 2.1.1.1*). Die Modellierung der Aktienkurse ist Gegenstand des darauf folgenden *Abschnittes 2.1.1.2*. In *Abschnitt 2.1.1.3* wird der stochastische Kalkül, im Kern über die Definition des Itô-Integrals und die Itô-Formel, vorgestellt.

2.1.1.1 Stochastische Prozesse

Zur Abbildung der Risikosituation und deren zeitlicher Entwicklung wird der *Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ eingeführt[14]. Ausgehend von einer gegebenen Menge Ω repräsentiert $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω. Dabei ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω genau dann, wenn Folgendes gilt:

1. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$,
3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Das Paar $(\Omega, \mathcal{F})$ wird als *messbarer Raum* und jedes Element von $\mathcal{F}$ als *Ereignis* bezeichnet.

P ist ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$, d.h. $P: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ ist eine Funktion mit den Eigenschaften:

1. $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$,
2. für disjunkte $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ gilt : $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Enthält $\mathcal{F}$ alle Mengen A mit $\inf\{P(F) \mid F \in \mathcal{F}, A \subseteq F\} = 0$, dann heißt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum*. Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein spezieller *Messraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, dessen *Maß* μ eine wie folgt definierte Funktion ist: $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ mit

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. für disjunkte $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ gilt : $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Die Menge $\mathcal{F}$ kennzeichnet unterscheidbare Ereignisse, deren Auftreten mit dem Maß P eine Wahrscheinlichkeitsbewertung erfährt. Mit dem bisher eingeführten Wahrscheinlichkeitsraum bleibt die Darstellung der Stochastik allerdings statisch. Zur Beschreibung der *Entwicklung* stochastischer Variablen und daran (unmittelbar) anknüpfender Handlungen des Investors ist die Dynamik des Informationsstandes, d.h. der im Zeitablauf zunehmende Grad an Differenzierbarkeit von Ereignissen, abzubilden. Hierzu wird das folgende Hilfsmittel eingeführt:

[14] Zum Folgenden vgl. *Bingham/Kiesel* (2004), S. 30-53, *Dothan* (1990), S. 156-181, *Karatzas/Shreve* (1991), S. 1-21, *Korn/Korn* (1999), S. 14-24, *Øksendal* (2003), S. 7-42.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Eine *Filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ ist eine Familie von σ-Algebren $\mathcal{F}_t$ mit: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t,\ s < t,\ s,t \in I$, wobei I eine geordnete Indexmenge repräsentiert.

Im Weiteren ist bei zeitkontinuierlicher Betrachtung I ein Zeitintervall der Gestalt $[0,T]$ oder $[0,\infty)$, bei diskreter Zeiteinteilung ist $I = \{1,2,\ldots,T\}$ ($T = \infty$ möglich); es wird zudem häufig $\mathcal{F}_0$ die σ-Algebra zur Menge $\{\emptyset,\Omega\}\cup\mathcal{N}$ sein, wobei die Elemente der Menge $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{F} \mid P(A) = 0\}$ als *Nullmengen* bezeichnet werden. Dies bedeutet, dass im Zeitpunkt $t = 0$ Ereignisse bzw. Umweltentwicklungen, denen eine positive Wahrscheinlichkeit zuzurechnen ist, nicht unterschieden werden können; umgekehrt sind die Ereignisse, die *fast sicher* nicht eintreten, d.h. denen eine Eintrittswahrscheinlichkeit von null beizumessen ist, bekannt. Erst im Zeitablauf werden auch Umweltentwicklungen mit positiver Eintrittswahrscheinlichkeit unterscheidbar. Der um eine Filtration erweiterte Wahrscheinlichkeitsraum heißt im Folgenden *filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega,\mathcal{F},P,\{\mathcal{F}_t\})$.

Manchmal ist es von Vorteil, sich die Elemente von Ω als Symbole für *(Umwelt-)Entwicklungen* vorzustellen, welche sich im Zeitablauf herauskristallisieren und dadurch voneinander unterscheidbar werden. Dabei wird der Fortschritt in der Kenntnis über den „wahren“, zugrunde liegenden Entwicklungsstrang in der Filtration zum Ausdruck gebracht[15]. Für bestimmte Zwecke nützlich erweist sich auch die Einführung des folgenden Begriffes:

Das Tupel $(\omega,t) \in \Omega \times I$ heißt *Zustand* (des Systems im Zeitpunkt t). Dabei mag ein Zustand nicht von einem anderen desselben Zeitpunktes unterscheidbar sein; ihre Unterscheidbarkeit bestimmt sich nach der zugrunde liegenden Filtration und ist dann gegeben, wenn es ein Element der Filtration mit positiver Wahrscheinlichkeit gibt, in dem die jeweils ersten Komponenten (ω) nicht zugleich enthalten sind[16]. Die bisher eingeführten Begriffe sollen an einem einfachen, zeit- und zufallsdiskreten Beispiel veranschaulicht werden.

Beispiel 2.1 *Ein diskretes Modell der Informationsentwicklung*
Es werden drei Umweltentwicklungen $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ als möglich erachtet. Ihre Eintrittswahrscheinlichkeiten sind durch $P(\{\omega_1\}) = 0,5, P(\{\omega_2\}) = P(\{\omega_3\}) = 0,25$ gegeben. Um den Entwicklungen eine Bedeutung zu geben, die sich jedoch erst im Weiteren erschließt, werden sie wie folgt bezeichnet:

ω_1: Anfang gut, immer gut,
ω_2: Anfang schlecht, nachher besser,
ω_3: Anfang schlecht, nachher schlechter.

Die zugrunde liegende Filtration ist in Tab. 2.1 dargestellt.

[15] In manchen Fällen ist eine derartige Interpretation der Menge Ω jedoch zu eng, so dass die gedankliche Konstruktion nicht allgemein von Vorteil ist.
[16] Der Fall, dass diese Komponenten jeweils Elementen der σ-Algebra mit Wahrscheinlichkeit null angehören, soll vernachlässigt werden.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Tabelle 2.1
Informationsentwicklung in Beispiel 2.1

$t =$	0	1	2
$\mathcal{F}_t$	$\{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}\}$	$\{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ $\{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}\}$	$\{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2\},$ $\{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}\}$
	alles möglich	„immer gut“ differenzierbar	alles differenzierbar/ bekannt

In $t = 0$ kann keine Aussage darüber getroffen werden, in welcher Umweltentwicklung man sich befindet. Die Entscheidung der Natur liegt gewissermaßen im Verborgenen, wenn auch mit Hilfe des Maßes P wenigstens eine Wahrscheinlichkeitsaussage möglich ist. Bei Kenntnis der Informationsentwicklung kann zudem etwas über die Wahrscheinlichkeit des Eintritts der verschiedenen Informationsstände in $t = 1$ ausgesagt werden. So besteht aus Sicht von $t = 0$ eine Wahrscheinlichkeit von $0,5$, dass sich in $t = 1$ die tatsächliche Umweltentwicklung bereits aufgedeckt haben wird, nämlich dann, wenn es sich um ω_1 handelt ($P(\{\omega_1\}) = 0,5$). In $t = 1$ kann dann zwischen den Ereignissen $\{\omega_1\}$ und $\{\omega_2, \omega_3\}$ unterschieden und folglich das nicht Eingetretene ausgesondert werden. Eine Wahrscheinlichkeitsaussage ist ferner in $t = 1$ für die zukünftige Entwicklung des Informationsstandes möglich. Liegt das Ereignis $\{\omega_1\}$ vor, kann mit Wahrscheinlichkeit 1, also „sicher“ davon ausgegangen werden, dass diese Entwicklung(slinie) auch in $t = 2$ vorherrscht. Falls in $t = 1$ hingegen das Ereignis $\{\omega_2, \omega_3\}$ feststeht, wird sich aus Sicht dieses Zeitpunktes für $t = 2$ mit einer unter dieser Bedingung zu ermittelnden Wahrscheinlichkeit von $0,5$ die durch ω_2 und mit ebenso hoher Wahrscheinlichkeit die mit ω_3 gekennzeichnete Entwicklung(slinie) als zutreffend erweisen. Im Zeitpunkt $t = 2$ schließlich ist bekannt, welche Umweltentwicklung stattgefunden hat, denn es kann zwischen allen möglichen Entwicklungen $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}$ und $\{\omega_3\}$ unterschieden werden. Die Zustände des Systems zu verschiedenen Zeitpunkten sind in nahe liegender Weise gegeben, wobei die Zustände $(\omega_2, 1)$ und $(\omega_3, 1)$ ebenso wie die Zustände $(\omega_1, 0)$, $(\omega_2, 0)$ und $(\omega_3, 0)$ jeweils nicht voneinander unterschieden werden können. $\square$

Um Ereignissen Ergebnisse zuordnen zu können, wird der Begriff einer Zufallsvariablen eingeführt. Jede Zufallsvariable repräsentiert eine Funktion, die den Elementen des Ausgangsraumes Ω Werte (im Kontext: aus dem $\mathbb{R}^n$) zuordnet und dabei konsistent mit dem (aktuellen) Informationsstand ist, der durch eine σ-Algebra beschrieben wird. Das zweite Kriterium wird durch den Begriff der Messbarkeit einer Funktion umgesetzt. Ist $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, dann heißt die Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *$\mathcal{F}$-messbar*, wenn

$$X^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}, \quad \forall\, U \subseteq \mathbb{R}^n,\ U \text{ offen},$$

(bzw. wenn dies für alle Borel-Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt. Dabei ist, ausgehend von der Borel σ-Algebra $\mathcal{B}$, die (hier) als σ-Algebra über alle offenen Intervalle im $\mathbb{R}^n$ gebildet wird, jedes ihrer Elemente eine Borel-Menge.) Die Definition impliziert, dass zwei verschiedene Funktionswerte Urbilder haben müssen, für die Folgendes gilt: Jedes Urbild ist in einer Elementmenge aus $\mathcal{F}$, die nicht zugleich das andere Urbild enthält. Beide Urbilder müssen also hinsichtlich der Ereignismengen in $\mathcal{F}$ differenzierbar sein. Eine *Zufallsvariable* ist schließlich eine solche $\mathcal{F}$-messbare Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

In analoger Weise ist eine Funktion bezüglich einer σ-Algebra $\mathcal{F}_t$, die zu einer Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ gehört, messbar ($\mathcal{F}_t$-*messbar*). Folglich kann auch eine Zufallsvariable auf $\mathcal{F}_t$ definiert werden. Eine Zufallsvariable X definiert stets ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_X auf dem $\mathbb{R}^n$ über[17]:

$$\mu_X(B) = P(X^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

μ_X heißt *Verteilung* der Zufallsvariablen X.

Bisher wurde von einem abstrakt vorgegebenen Informationsstand, repräsentiert durch die σ-Algebra $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{F}_t$ $(t \in I)$, ausgegangen. An ihm hatte sich die Definition einer Zufallsvariablen über die Bedingung der Messbarkeit auszurichten[18]. Demgegenüber kann der Informationsstand aber gerade durch die unterscheidbaren Werte einer Zufallsvariablen charakterisiert sein. In diesem Fall macht es Sinn, die σ-Algebra auf die Zufallsvariable hin auszurichten und höchstens diejenigen Ereignisse differenzierbar zu machen, in denen die Zufallsvariable verschiedene Werte annimmt. Dies führt auf das Folgende[19]:

Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige Funktion, dann bezeichnet $\sigma\{X\}$ die durch X *generierte* σ*-Algebra*, welche die kleinste σ-Algebra auf Ω ist, die alle Mengen:

$$X^{-1}(U), \quad \forall\, U \subseteq \mathbb{R}^n,\ U \text{ offen},$$

enthält.

Von besonderer Bedeutung ist ferner, ob „Vorinformationen“ über den Eintritt bestimmter Ereignisse die Eintrittswahrscheinlichkeit anderer Ereignisse beeinflussen. Hierzu wird der Begriff der stochastischen Unabhängigkeit eingeführt[20]. Gegeben seien zwei messbare Ereignisse A und B aus einer Menge $\mathcal{F}$. A und B sind genau dann *(stochastisch) unabhängig*, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Eine Menge $\mathcal{A} = \{\mathcal{H}_i \mid i \in J\}$ von Familien $\mathcal{H}_i$ messbarer Mengen heißt *(stochastisch) unabhängig*, falls für alle Kombinationen $(H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots, H_{i_k}) \in \mathcal{H}_{i_1} \times \mathcal{H}_{i_2} \times \ldots \times \mathcal{H}_{i_k}$ mit beliebigen $i_1, i_2, \ldots, i_k \in J$; $i_j \neq i_l, \forall j, l \in \{1, \ldots, k\}$, $j \neq l$, gilt:

$$P(H_{i_1} \cap \ldots \cap H_{i_k}) = P(H_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(H_{i_k}).$$

[17] Vgl. *Øksendal* (2003), S. 9.

[18] Nach *Magill/Quinzii* (1996), S. 286, sollte bei exogen vorgegebener σ-Algebra nicht von einem Informationsstand gesprochen werden, vielmehr stellt sie rein formal den Definitionsbereich für das Wahrscheinlichkeitsmaß dar.

[19] Vgl. *Øksendal* (2003), S. 8.

[20] Vgl. *Øksendal* (2003), S. 10.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Dann heißt eine Menge von Zufallsvariablen $\{X_i\}_{i\in J}$ *(stochastisch) unabhängig*, falls die Menge der generierten σ-Algebren $\{\sigma\{X_i\} \mid i \in J\}$ unabhängig ist.

Im Weiteren wird entsprechend der Dynamisierung des Informationsstandes durch die Einführung einer Filtration auch die Bewertung, wie sie in diesem Sinne statisch durch eine Zufallsvariable erfolgt, dynamisiert. Dazu wird der Begriff eines Prozesses eingeführt. Eine Familie von $\mathbb{R}^n$-wertigen Zufallsvariablen $\{X_t\}_{t\in I}$, die auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definiert sind, heißt *stochastischer Prozess*, oder kurz *Prozess*. Ist $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ eine Filtration zu $\mathcal{F}$, dann heißt der Prozess *adaptiert* (an die Filtration), wenn für jedes $t \in I$ die Zufallsvariable X_t $\mathcal{F}_t$-messbar ist. (Wenn im Weiteren von einem Prozess gesprochen wird, so ist darunter ein adaptierter stochastischer Prozess zu verstehen, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird.) Ein Prozess beschreibt somit, welche Werte eine stochastische Variable unter verschiedenen Umweltentwicklungen im Zeitablauf annimmt. Der aus n reellwertigen Zufallsvariablen zusammengesetzte Prozess heißt auch *n-dimensionaler Prozess*. Das zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \in I$ gehörige Tupel von Zufallsvariablen wird als Spaltenvektor betrachtet. Ein *deterministischer Prozess* liegt vor, wenn die Ausprägung des Prozesses für jeden Zeitpunkt fast sicher, also mit Wahrscheinlichkeit eins, genau einen Wert aufweist. Über die Zeit hinweg kann sich der Wert der Variablen allerdings ändern. Ist er zudem noch zeitkonstant, soll von einem *konstanten Prozess* gesprochen werden. Ferner heißt ein stochastischer Prozess *vorhersagbar*, wenn er messbar bezüglich derjenigen σ-Algebra ist, welche durch adaptierte und linksseitig stetige Prozesse generiert wird[21]. Dies bedeutet, dass die Ausprägung des Prozesses in einem bestimmten Zustand aus dem zeitlich unmittelbar vorausgehenden Zustand ableitbar ist. In einer zeitdiskreten Modellierung mit $I = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ($n = \infty$ möglich) ist die einen vorhersagbaren Prozess $\{X_t\}_{t\in I}$ für den Zeitpunkt $\hat{t} \in \{1, \ldots, n\}$ charakterisierende Zufallsvariable $X_{\hat{t}}$ $\mathcal{F}_{\hat{t}-1}$-messbar[22].

Wird ein Prozess für ein fixes $\omega \in \Omega$ betrachtet, so entsteht eine Funktion:

$$t \rightarrow X_t(\omega), \quad \forall\, t \in I,$$

die als *Pfad* von $\{X_t\}_{t\in I}$ bezeichnet wird.

Zur Notation:

- Bei der Kennzeichnung eines Pfades wird die Abhängigkeit von ω zumeist nicht dargestellt. Dies gilt für sämtliche im Weiteren behandelten Prozesse.
- Statt X_t kann auch $X(t)$ bzw. $X(t, \omega)$ geschrieben werden.

Anstelle einer vorgegebenen Filtration kann über die Zufallsvariablen, aus denen der Prozess zusammengesetzt ist, eine Filtration generiert werden. Hier-

[21] Vgl. *v. Weizsäcker/Winkler* (1990), S. 25, 111 ff., insbesondere S. 112, sowie *Dothan* (1990), S. 250 ff., *Holtrode* (2000), S. 154.
[22] Vgl. hierzu etwa *Dothan* (1990), S. 54.

bei wird der aktuelle Informationsstand bestimmt durch die Ausprägungen aller zeitlich vorausgehenden Zufallsvariablen. Dies führt auf:

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X := \sigma\{X_s \mid s \leq t,\, s \in I\} = \bigcup_{s \leq t,\, s \in I} \sigma\{X_s\}, \quad \forall t \in I.$$

Erweitert man die Filtration $\mathcal{F}_t^X$ um die Nullmengen, ergibt sich die zum Prozess $\{X_t\}_{t \in I}$ gehörende *kanonische* oder *natürliche Filtration* $\mathcal{F}_t$ wie folgt[23]:

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{\mathcal{F}_t^X \cup \mathcal{N}\}, \quad \forall t \in I.$$

Im Zusammenhang von Prozessen ist zudem von Bedeutung, wann zwei Prozesse im stochastischen Sinne als verschieden bzw. als gleich zu betrachten sind. Hierzu werden die folgenden Begriffe eingeführt[24]:

Gegeben seien die $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0,\infty)}$-adaptierten Prozesse $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ und $\{Y_t\}_{t \in [0,\infty)}$, dann

- heißt $\{Y_t\}_{t \in [0,\infty)}$ eine *Modifikation* von $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$, wenn gilt:

$$P\left(\{\omega \mid X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}\right) = 1, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{und}$$

- beide Prozesse heißen *ununterscheidbar*, falls

$$P\left(\{\omega \mid X_t(\omega) = Y_t(\omega),\ \forall t \in [0,\infty)\}\right) = 1.$$

Sicherlich ist jeder ununterscheidbare Prozess auch eine Modifikation des anderen. Das Umgekehrte gilt unter der Voraussetzung, dass beide Prozesse fast sicher rechtsstetige Pfade besitzen[25].

Beispiel 2.2 *Zufallsvariable, Prozess, Pfad: Fortsetzung des Beispiels 2.1*
Auf der Grundlage des Wahrscheinlichkeitsraumes, der im vorausgehenden Beispiel eingeführt wurde, wird zunächst ein Aktienkursprozess S_t $(t = 0, 1, 2)$ beschrieben, der sich als Familie von diskreten Zufallsvariablen darstellt. Jede dieser Zufallsvariablen kennzeichnet die Werte, die die Aktie zu den Betrachtungszeitpunkten annehmen kann. Abb. 2.1 zeigt den *Aktienkursprozess*.

Zur Vereinfachung der Notation wurde dabei der Sachverhalt $S_0(\{\omega_1\}) = S_0(\{\omega_2\}) = S_0(\{\omega_3\}) = 105$ durch $S_0(\Omega) = 105$ beschrieben; analog steht $S_1(\{\omega_2, \omega_3\}) = 90$ für $S_1(\{\omega_2\}) = S_1(\{\omega_3\}) = 90$. Durch die Aktienkurse zu

[23] Vgl. *Korn/Korn* (1999), S. 15, die jedoch die natürliche Filtration ohne Erweiterung definieren, aus der erst die „P-Erweiterung“ der natürlichen Filtration hervorgeht.

[24] Vgl. zum Folgenden *Karatzas/Shreve* (1991), S. 2, mit einem weiteren „Verschiedenheits-/Gleichheitskriterium“ und *Korn/Korn* (1999), S. 16, mit Bezug auf unterschiedliche Filtrationen.

[25] Ein Beispiel für zwei nicht ununterscheidbare Prozesse, die Modifikationen voneinander sind, liegt nach *Karatzas/Shreve* (1991), S. 2, bei $t \geq 0$ mit den Prozessen $X_t \equiv 0$ und $Y_t = 0$ für $t \neq T$ und $Y_t = 1$ für $t = T$ vor, wobei T eine positive Zufallsvariable mit stetiger Verteilung repräsentiert. Zur umgekehrten Aussagerichtung vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 2.

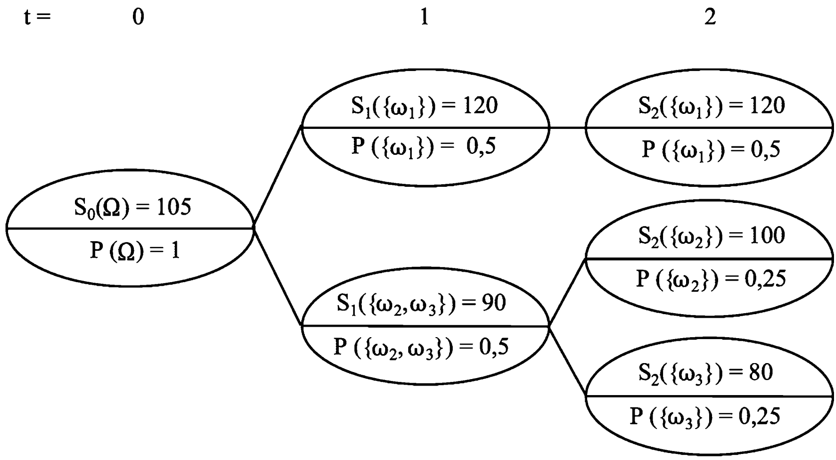

Abbildung 2.1: Aktienkursprozess im Beispiel

den Zeitpunkten $t = 1$ und 2 sind Zufallsvariablen S_1 bzw. S_2 gegeben[26], die zusammen mit S_0 den Prozess $S = \{S_t(\omega)\}_{t=0,1,2}$ bilden. Ein Pfad dieses Prozesses ist durch die Werte $S_0(\omega)$, $S_1(\omega)$ und $S_2(\omega)$ z.B. für ω_2 gegeben als: $S_0(\omega_2) = 105$, $S_1(\omega_2) = 90$ und $S_2(\omega_2) = 100$. Dieser Pfad entspricht einem gesunkenen Aktienkurs in $t = 1$, der sich in $t = 2$ wieder etwas erholt hat. Die sprachliche Charakterisierung der Umweltentwicklungen in Beispiel 2.1 erhält insofern ihren Sinn nur durch eine „Bewertung“ der alternativen Entwicklungen, wie sie durch den hier betrachteten Aktienkursprozess stattfindet. Im Unterschied zum dargestellten Prozess, der durch die Bezeichnung implizit als Beschreibung der Kursentwicklung einer Aktie gedeutet wurde, müsste ein Prozess, der auf einem Kapitalmarkt mit in $t = 0$ für den gesamten Betrachtungszeitraum vorbestimmten periodigen Zinssätzen die Wertentwicklung eines risikolosen, zweiperioden Zerobonds beschreibt, zu jedem Zeitpunkt in allen möglichen Umweltentwicklungen denselben Bondwert aufweisen. Der Kursprozess eines *risikolosen Zerobonds* $ZB = \{ZB_t(\omega)\}_{t=0,1,2}$ auf einem dergestalt festgelegten Kapitalmarkt könnte wie in Abb. 2.2[27] dargestellt aussehen.

Der Zerobond weist eine deterministische, jedoch nicht eine konstante Wertentwicklung auf; vielmehr nimmt sein Wert in jeder Periode um 10% zu. Dies entspricht gerade der Verzinsung des Zerobonds, die für ein solches Instrument (vor Fälligkeit) vollständig im Wertzuwachs zum Ausdruck kommt. Demgegenüber werden beim Kuponbond Zinsen ausbezahlt, die unter den idealen Bedingungen einer flachen Zinsstruktur — wie bereits beim Zerobond — und

[26] Formal ist auch S_0 als Zufallsvariable zu betrachten.
[27] Wahrscheinlichkeiten sind bei dieser und den späteren Abbildungen nicht angegeben.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

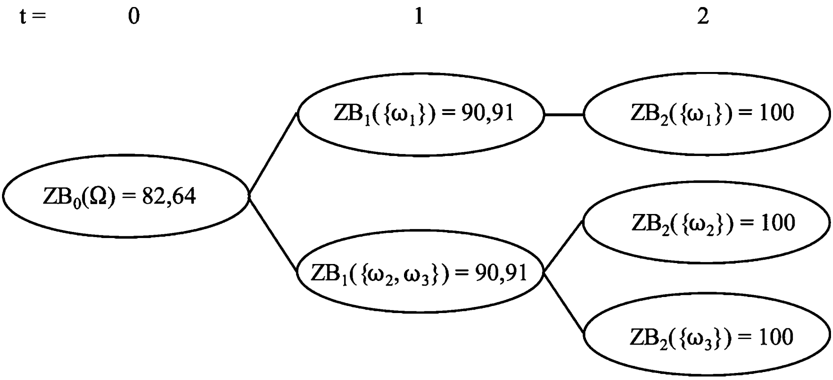

Abbildung 2.2: Wertentwicklung eines Zerobonds
bei deterministischer Zinsstruktur

bei Ausgabe und endfälliger Tilgung zu pari sowie konstantem Nominalzinssatz gerade der marktüblichen Verzinsung entsprechen und folglich zu keiner Wertänderung des Bonds selbst führen, sofern weiterhin von deterministischen Marktzinssätzen ausgegangen wird. Der Kursprozess eines *solchen risikolosen Kuponbonds* $KB = \{KB_t(\omega)\}_{t=0,1,2}$ sieht dann wie in Abb. 2.3 wiedergegeben aus.

Der Kuponbond wird also durch einen *konstanten Prozess* beschrieben. Die Investition in einen derartigen Kuponbond bewirkt freilich, dass dem Anleger nach jeder Periode noch Zinszahlungen in Höhe von 10 zufließen. Üblicherweise werden Kuponbonds jedoch nicht durch konstante Prozesse beschreibbar sein; dies gilt bereits dann, wenn bei der unterstellten Ausstattung des Bonds die Zinsstruktur nicht flach ist. Wenn insofern auch nicht zur Beschreibung der Wertentwicklung von Handelsobjekten selbst, finden deterministische oder sogar konstante Prozesse doch oftmals Verwendung bei der Modellierung von Marktparametern, wie Zinssätzen, Volatilitäten u.a. Anzumerken ist, dass die Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ gerade derjenigen entspricht, die durch den Aktienkursprozess generiert wird. Demgegenüber würde die durch den Kuponbond generierte Filtration die Gestalt $\tilde{\mathcal{F}}_t = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}\}$ $(\forall t)$ haben. Hinsichtlich des Kuponbonds müsste also gar nicht zwischen verschiedenen Umweltentwicklungen differenziert werden, da der Wert des Kuponbonds bereits in $t = 0$ für jeden Zustand innerhalb des Betrachtungszeitraumes bekannt ist. Gleiches gilt für den Zerobond. Ferner ist mit Hilfe der generierten Filtrationen leicht nachvollziehbar, dass der Aktienkurs zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \in \{0, 1, 2\}$ vom Wert des Zerobonds $ZB(t)$ bzw. des Kuponbonds $KB(t)$ unabhängig ist. Die dargestellte Wertentwicklung für den Zerobond ist allerdings nicht notwendig für die Risikolosigkeit eines Wertpapieres. Ein

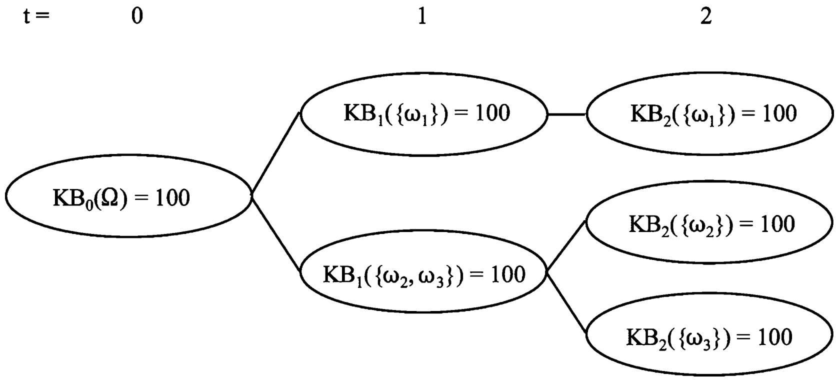

Abbildung 2.3: Wertentwicklung des Kuponbonds bei deterministischer Zinsstruktur

risikoloses Wertpapier liegt bereits dann vor, wenn dessen Wert im Zeitpunkt $t \in \{1,2\}$ mindestens im unmittelbar vorausgehenden Zeitpunkt $t-1$ bekannt ist. Man weiß also, was man nach der einperiodigen Anlage wiederbekommt. Dies schließt jedoch nicht aus, dass sich die Marktverzinsung im Zeitablauf und in Abhängigkeit der Umweltentwicklung ändert. Insofern kann die Wertentwicklung eines risikolosen Wertpapieres auch durch einen vorhersagbaren, jedoch nicht deterministischen Prozess beschreibbar sein. Einen derartigen Fall stellt der Kursprozess $RB = \{RB_t(\omega)\}_{t=0,1,2}$ in Abb. 2.4 dar. Das damit repräsentierte Wertpapier entspricht einer revolvierenden einperiodigen Anlage-/Verschuldungsmöglichkeit zum jeweils aktuellen Marktzinssatz. Dieser beträgt in $t = 0$ 5% für die erste Periode, in $t = 1$ bleibt der Marktzinssatz für die Folgeperiode bei diesem Wert unter ω_1. Bei den Umweltentwicklungen ω_2 und ω_3 hingegen steigt der Zinssatz für einperiodige Anlagen/Kredite auf 7% für die zweite Periode. Eine stochastische Zinsentwicklung vor Fälligkeit würde sich allerdings in Bezug auf den zuvor beschriebenen Zerobond (sowie den Kuponbond) im Wege der Diskontierung insbesondere in $t = 2$ anfallender Zahlungen in einem nicht vorhersagbaren Kursprozess niederschlagen. □

Die in Beispiel 2.2 beschriebenen Aktienkurs- und Bondwertentwicklungsprozesse dienen ebenso wie Entwicklungsprozesse von Marktparametern der Modellierung von Marktgegebenheiten. Sie werden hier insofern als gegebene, *natürliche Prozesse* bezeichnet. Demgegenüber können durch Handelsaktivitäten des betrachteten Investors, also aus der Zusammenstellung verschiedener Handelsobjekte, denen jeweils ein natürlicher Prozess zugrunde liegt, und deren Umschichtung neue, künstliche Prozesse gebildet werden. Sie werden *generierte* oder auch *gesteuerte Prozesse* genannt, da die dynamische Zusammenstellung im Rahmen der dynamischen Portfolio-Optimierung auf die

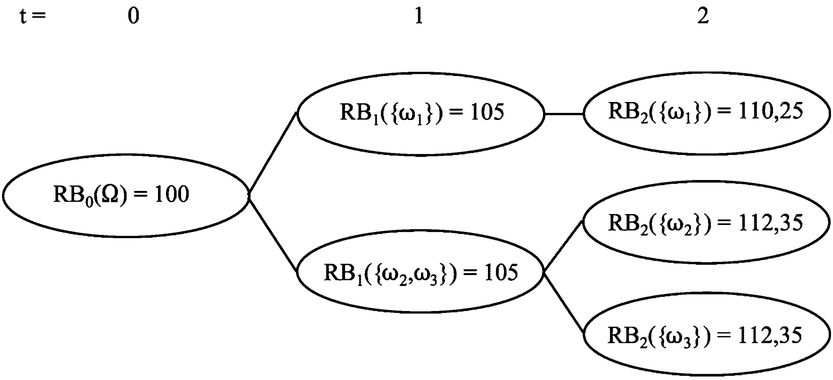

Abbildung 2.4: Kursprozess eines risikolosen Wertpapieres bei stochastischer Zinsstruktur

Erfüllung eines bestimmten Zielkriteriums hin ausgerichtet wird. Im vorausgegangenen Beispiel könnte bspw. mit einem Anfangsvermögen von 205 ein generierter Prozess durch Kauf einer Aktie und eines risikolosen Kuponbonds im Nennwert von 100 gebildet werden. Der generierte Prozess ergibt sich dann, sofern keine Umschichtungen im Zeitablauf erfolgen, „additiv“ aus den beiden dargestellten Prozessen der Aktie und des Kuponbonds.

Die bisherige Beschreibung von Prozessen und der sie konstituierenden Zufallsvariablen beschränkte sich darauf, zu differenzieren, welche Umweltentwicklungen im Zeitablauf unterscheidbar werden, welche Werte die Zufallsvariablen dabei annehmen können und welche Wahrscheinlichkeit dem Auftreten dieser Werte zuzumessen ist. Zur Charakterisierung von Prozessen sind demgegenüber auch Aussagen wünschenswert, die aus Sicht eines beliebigen Zeitpunktes während der Prozesslaufzeit die weitere, zukünftige Entwicklung bis zu einem anderen definierten Zeitpunkt der Laufzeit (oder bis zu deren Ende T) nicht mehr lediglich brutto i.S. aller Möglichkeiten, sondern komprimiert beschreiben. Hierzu gehört bspw. eine Aussage über die Richtung, in die sich die Werte eines Prozesses bewegen (*Trend*). Grundlegend für die Ableitung eines solchen Trends ist eine Statistik zu einer Zufallsvariablen, die ein (wahrscheinlichkeits)gewichtetes Mittel über die möglichen zukünftigen Ausprägungen der Zufallsvariablen repräsentiert. Diese Statistik wird als Erwartungswert bezeichnet. Der Erwartungswert lokalisiert in gewisser Weise die Verteilung der Zufallsvariablen[28]. Der Begriff des Erwartungswertes wird im Folgenden eingeführt; ihm wird für die weiteren Ausführungen eine zentrale Bedeutung zukommen.

[28] Vgl. *Bingham/Kiesel* (2004), S. 39.

Der *Erwartungswert* einer Zufallsvariablen $X_s(: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n)$ aus Sicht von $t = 0$ ($E[X_s]$) ist definiert als:

$$E[X_s] = \int_{\omega \in \Omega} X_s(\omega)\, dP(\omega),$$

sofern die rechte Seite *Lebesgue*-integrierbar ist ($\int_{\omega \in \Omega} \mid X_s(\omega) \mid dP(\omega) < \infty$). $E[X_s]$ kennzeichnet den Erwartungswert auf Basis des Informationsstandes in $t = 0$ und kann deshalb präziser als $E[X_s \mid \mathcal{F}_0]$ geschrieben werden. Analog hierzu kann aber auch zu jedem $t = 0$ nachgelagerten Zeitpunkt $t^\star$ $(0 < t^\star < T)$ ein Erwartungswert gebildet werden, der ein gewichtetes Mittel zur Zufallsvariablen X_s $(t^\star < s \leq T)$ aus Sicht des gegenüber dem Zeitpunkt $t = 0$ erweiterten Informationsstandes des Zeitpunktes $t = t^\star$ darstellt. Der erweiterte Informationsstand wird durch die Filtration $\mathcal{F}_{t^\star}$ beschrieben. Folglich kann zu jedem Ereignis $B \in \mathcal{F}_{t^\star}$, dessen Eintritt in $t = t^\star$ festgestellt wird, ein Erwartungswert über die Ausprägungen der Zufallsvariablen X_s gebildet werden, für den nur die auf Basis der Vorkenntnis noch möglichen Umweltentwicklungen in Betracht zu ziehen sind, d.h. alle $\omega \in B$. Er ergibt sich aus folgender Beziehung:

$$\int_{\omega \in B} E[X_s \mid B]\, dP(\omega) = \int_{\omega \in B} X_s(\omega)\, dP(\omega).$$

Hiermit kann unter den Voraussetzungen $X_s \geq 0,\ E[X_s] < \infty$ ein Maß[29] Q auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F}_{t^\star})$ definiert werden durch[30]:

$$Q(B) := E[X_s \mid B]P(B) = \int_{\omega \in B} X_s(\omega)\, dP(\omega) \quad \forall B \in \mathcal{F}_{t^\star}.$$

Dabei gilt $\forall B \in \mathcal{F}_{t^\star}$: $Q(B) = 0$, falls $P(B) = 0$. Gilt diese Beziehung zwischen den Maßen Q und P, so wird gesagt: Q ist *absolut kontinuierlich* bezüglich P, in Zeichen $Q \ll P$. Gelten $Q \ll P$ und $P \ll Q$, dann heißen beide Maße *äquivalent*. Dies bedeutet, dass sie dieselben Mengen mit Maß null („*Nullmengen*") besitzen. Damit ist das folgende „Theorem" anwendbar[31]:

Satz 2.1 *(„Theorem von Radon-Nikodým")*
Es gilt $Q \ll P$ auf der σ-Algebra $\mathcal{G}$ genau dann, wenn es eine $\mathcal{G}$-messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n_+$ gibt mit:

$$Q(B) = \int_{\omega \in B} f(\omega)\, dP(\omega), \quad \forall B \in \mathcal{G}.$$

f ist bis auf Bereiche mit Maß null eindeutig und heißt Radon-Nikodým-Ableitung von Q nach P ($f = \frac{dQ}{dP}$).

[29] Vgl. die Definition eines Maßes S. 24.
[30] Zum Folgenden vgl. insbesondere *Bingham/Kiesel* (2004), S. 42-48.
[31] Vgl. *Bingham/Kiesel* (2004), S. 43, *Dothan* (1990), S. 208.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Nach dem Theorem von *Radon-Nikodỳm* gibt es folglich eine nicht negative Funktion (Radon-Nikodỳm-Ableitung) $E[X_s \mid \mathcal{F}_{t^\star}] : \Omega \to \mathbb{R}^n_+$, die $\mathcal{F}_{t^\star}$-messbar ist und für die Folgendes gilt:

$$\int_{\omega \in B} E[X_s \mid \mathcal{F}_{t^\star}]\, dP(\omega) = \int_{\omega \in B} X_s(\omega)\, dP(\omega), \quad \forall B \in \mathcal{F}_{t^\star}.$$

Kann X_s auch negative Komponenten aufweisen, gilt aber $E[\| X_s \|] < \infty$, kann analog dem beschriebenen Vorgehen über die Zerlegung $X_s = X_s^+ - X_s^-$ (X_s^+, $X_s^- \geq 0$) die Funktion $E[X_s \mid \mathcal{F}_{t^\star}] : \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $E[X_s \mid \mathcal{F}_{t^\star}] = E[X_s^+ \mid \mathcal{F}_{t^\star}] - E[X_s^- \mid \mathcal{F}_{t^\star}]$ gebildet werden[32].

Die Funktion $E[X_s \mid \mathcal{F}_{t^\star}] : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt *bedingter Erwartungswert* von X_s bezüglich $\mathcal{F}_{t^\star}$[33]. Da der bedingte Erwartungswert $E[X_s \mid \mathcal{F}_{t^\star}]$ $\mathcal{F}_{t^\star}$-messbar ist, repräsentiert er eine Zufallsvariable auf $\mathcal{F}_{t^\star}$. Für $s = t^\star$ wäre demgegenüber keine Unsicherheit über den Wert von X_s gegeben, vielmehr ist die Ausprägung von X_s bekannt, so dass $E[X_s \mid \mathcal{F}_s] = X_s$ geschrieben werden kann.

Anmerkung 2.1
Gilt für das durch die Radon-Nikodỳm-Ableitung bestimmte Maß Q, dass $Q(\Omega) = 1$ ist, dann ist über die Ableitung ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß definiert. Dadurch wird ein Wechsel zwischen den Wahrscheinlichkeitsmaßen möglich, worauf später noch zurückgegriffen wird.

Für das Weitere wird eine Prozessklasse von großer Bedeutung sein, die wie folgt definiert wird: Ein stochastischer Prozess $\{X_t\}_{t \in I}$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ heißt *Martingal* (bezüglich $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ und P), wenn

1. X_t $\mathcal{F}_t$-messbar ist, $\forall t \in I$,
2. $E[\| X_t \|] < \infty$, $\forall t \in I$, und
3. $E[X_s \mid \mathcal{F}_t] = X_t$, $\forall s \geq t$, $t \in I$, fast sicher.

Gilt in 3.: $E[X_s \mid \mathcal{F}_t] \leq X_t$, dann wird $\{X_t\}_{t \in I}$ ein *Super-Martingal* genannt; gilt hingegen $E[X_s \mid \mathcal{F}_t] \geq X_t$, dann ist $\{X_t\}_{t \in I}$ ein *Sub-Martingal.*

Beispiel 2.3 *(Bedingter) Erwartungswert und Martingal: Fortsetzung des Beispiels 2.2*
Für den Aktienkursprozess des Beispiels 2.2 kann für die Zufallsvariable S_2 ein Erwartungswert im Zeitpunkt $t = 0$ sowie seinerseits als Zufallsvariable ein bedingter Erwartungswert für den Zeitpunkt $t = 1$ ermittelt werden. Beides wird in Abb. 2.5[34] wiedergegeben. $E[S_2 \mid \mathcal{F}_1](\{\omega_2, \omega_3\}) = 90$ steht wiederum kurz für $E[S_2 \mid \mathcal{F}_1](\{\omega_2\}) = E[S_2 \mid \mathcal{F}_1]\{\omega_3\}) = 90$, und $E[S_2]$ bedeutet

[32] Vgl. *Bingham/Kiesel* (2004), S. 47.
[33] Vgl. auch *Øksendal* (2003), S. 309 f.
[34] In der Abbildung ist das Symbol für die Filtration lediglich durch F in Kursivschrift angegeben.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

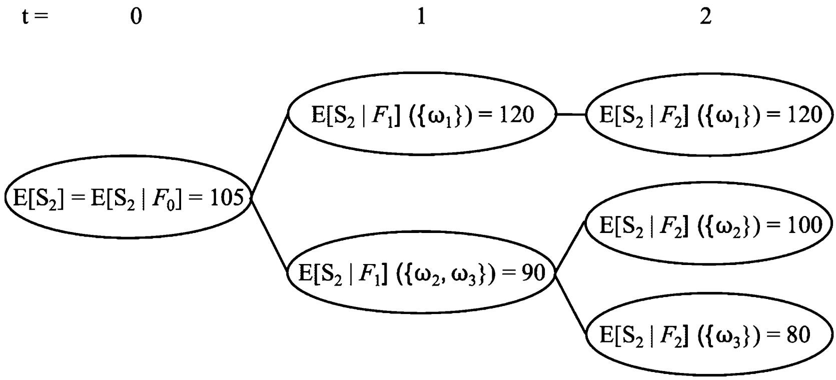

Abbildung 2.5: Bedingter Erwartungswertprozess zum Aktienkursprozess

bei dieser Kurzschreibweise $E[S_2 \mid \mathcal{F}_0](\Omega)$. Aus der Darstellung wird deutlich, dass mit Hilfe des bedingten Erwartungswertes einer Zufallsvariablen X_s ein (messbarer) Prozess $\{E[X_s \mid \mathcal{F}_t]\}_{t\in I,\, t\leq s}$ definiert werden kann. Bestimmt man noch den Erwartungswert der Zufallsvariablen S_1 als $E[S_1] = 105$, so zeigt sich, dass $\forall s, t \in I, s \geq t$ gilt: $E[S_s \mid \mathcal{F}_t] = S_t$. Der Aktienkursprozess des Beispiels ist folglich — S_t ist $\mathcal{F}_t$-messbar und $E[| S_t |] < \infty$ (jeweils $\forall t$) — ein Martingal. Darüber hinaus ist, wie sich leicht nachvollziehen lässt, auch der Prozess $\{E[S_2 \mid \mathcal{F}_t]\}_{t\in I,\, t\leq 2}$ ein Martingal. Es ist jedoch unmittelbar einsichtig, dass Letzteres generell gilt, wie im Folgenden gezeigt wird. □

Satz 2.2 *Bedingter Erwartungswertprozess als Martingal*
Für jede $\mathcal{F}$- bzw. $\mathcal{F}_s$ -messbare Zufallsvariable $X_{(s)}$ mit bedingtem Erwartungswert $E[X_{(s)} \mid \mathcal{F}_t]$, $t \in I\,(t \leq s)$, ist der hierdurch charakterisierte Prozess $\{E[X_{(s)} \mid \mathcal{F}_t]\}_{t\in I,\, t\leq s}$ ein Martingal.

Beweis:
Nach Definition ist der bedingte Erwartungswert $E[X_{(s)} \mid \mathcal{F}_t]$ $\mathcal{F}_t$-messbar ($\forall t$). Der übrige Beweisteil ergibt sich im Wesentlichen daraus, dass

$$E[E[X_{(s)} \mid \mathcal{F}_r] \mid \mathcal{F}_t] = E[X_{(s)} \mid \mathcal{F}_t], \text{ fast sicher,}$$

mit $t \leq r \leq s$ bzw. $t \leq r$ ist[35]. Denn nach Definition des bedingten Erwartungswertes muss für jedes $B \in \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_r$, $P(B) > 0$, gelten:

$$\int_{\omega\in B} E[E[X_{(s)} \mid \mathcal{F}_r] \mid \mathcal{F}_t]\, dP(\omega) = \int_{\omega\in B} X_{(s)}\, dP(\omega) = \int_{\omega\in B} E[X_{(s)} \mid \mathcal{F}_r]\, dP(\omega).$$

[35] *Bingham/Kiesel* (2004), S. 49 f. Zur Verdeutlichung sei deren sich auf diese Beziehung erstreckender Beweis, angepasst auf den gegebenen Kontext, wiederholt.

Aus der (fast sicheren) Eindeutigkeit der *Radon-Nikodým*-Ableitung ergibt sich folglich das unmittelbar vorausgehende Postulat. Damit gilt auch:

Aus der Voraussetzung des bedingten Erwartungswertes $E[|X_{(s)}|] < \infty$ folgt:

$$E[|E[X_{(s)} \mid \mathcal{F}_t]|] = E[|E[X_{(s)} \mid \mathcal{F}_t]| \mid \mathcal{F}_0]$$
$$\leq E[E[|X_{(s)}| \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_0] = E[|X_{(s)}| \mid \mathcal{F}_0] = E[|X_{(s)}|] < \infty. \quad \square$$

Eine weitere Charakterisierung eines stochastischen Prozesses ist durch die Frage möglich, ob die Eintrittswahrscheinlichkeit zukünftiger Ereignisse und damit zusammenhängender Prozesswerte bereits durch den gegenwärtigen Wert der Prozessvariablen vollständig beschrieben ist oder ob die bisherige Entwicklung bis zu diesem Wert eine weitergehende Information beinhaltet, die zu einer anderen Beurteilung über die (bedingten) Eintrittswahrscheinlichkeiten zukünftiger Ereignisse führt. Aus ökonomischer Sicht sind Marktprozesse oft sinnvollerweise so zu definieren, dass auf sie der erste Fall zutrifft. Denn dann könnte aus vergangenen Entwicklungen nicht auf den zukünftigen Verlauf von Marktparametern bzw. Handelsobjekten geschlossen werden; die Information aus der Vergangenheit ginge vollständig in den Gegenwartswert des Parameters bzw. Handelsobjektes ein. In einem solchen Fall liegt ein *schwach informationseffizienter* Markt[36] vor. Im Hinblick auf stochastische Prozesse wird die gerade formulierte Bedingung als *Markov*-Eigenschaft von Prozessen eingeführt.

Sind $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Borel(-messbare) Funktion und $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein n-dimensionaler, adaptierter Prozess auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$, dann heißt der Prozess $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *Markov*-Prozess (bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$), wenn gilt[37]:

$$E[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = E[f(X_t) \mid X_s], \quad \text{fast sicher}, \forall s, t, t \geq s.$$

Mitunter kann es sinnvoll sein, einen Prozess vom Eintritt bestimmter Ereignisse abhängig zu gestalten. Dies kann bereits für die zweckmäßige Definition natürlicher Prozesse gelten. Obwohl für die Modellierung des Kursverlaufes einer Aktie gewöhnlich ein Prozess zugrunde zu legen ist, der stets ein Auf und Ab des Kurses ermöglicht, ist von einer solchen Prozessformulierung abzuweichen, sobald die Aktie wertlos wird[38]. Dann sollte der Wert der Aktie für den restlichen Planungszeitraum den Wert null aufweisen. Ebenso kann allgemein ein untergegangenes Vermögen nicht wieder einen positiven Wert erreichen. Umgekehrt kann ein bestimmter, erreichter Vermögenswert Anlass geben, sich nicht weiter einer unsicheren Entwicklung auszusetzen[39]. U.a. der Umsetzung derartiger Restriktionen dient die folgende Definition.

[36] Vgl. bspw. *Magill/Quinzii* (1996), S. 306 ff.; zu verschiedenen Effizienzcharakterisierungen von Kapitalmärkten vgl. *Ross/Westerfield/Jaffe* (2002), S. 343 ff.

[37] Vgl. *Elliott* (1982), S. 190.

[38] Sofern dieser Fall in der Modellierung vorgesehen ist.

[39] Vgl. hierzu und zum Folgenden bspw. *Bingham/Kiesel* (2004), S. 82-88, *Karatzas/Shreve* (1991), S. 6, *Korn/Korn* (1999), S. 21 ff.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Dann heißt eine $\mathcal{F}$-messbare Zufallsvariable $\tau : \Omega \to I$ (mit $I = [0, \infty)$ oder $\{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$) *Stoppzeit*, wenn gilt:

$$\{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \in I.$$

Sei ferner $\{X_t\}_{t \in I}$ ein adaptierter Prozess, dann ergibt sich in Verbindung mit der Stoppzeit τ daraus ein neuer, der *gestoppte Prozess* $\{X_{t \wedge \tau}\}_{t \in I}$ über:

$$X_{t \wedge \tau}(\omega) \quad := \quad \begin{cases} X_t(\omega), \text{ für } t \leq \tau(\omega), \\ X_{\tau(\omega)}(\omega), \text{ für } t > \tau(\omega). \end{cases}$$

„Hält“ folglich die Stoppzeit τ den Prozess $\{X_t\}_{t \in I}$ in einem bestimmten Zustand $(\omega_1, t^\star)$ „an“, so stoppt sie den Prozess zugleich für alle Zustände $(\omega_2, t^\star)$, die vom ersten in $t = t^\star$ gemäß der Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ nicht differenzierbar sind. Das Anhalten eines Prozesses mit Hilfe einer Stoppzeit erfolgt damit stets auf Basis des aktuellen Informationsstandes, ohne dass sich erst zukünftig verzweigende Entwicklungen differenziert werden könnten[40]. Zur Stoppzeit τ kann eine σ-Algebra $\mathcal{F}_\tau$ angegeben werden, in der die Ereignisse erfasst sind, deren Eintreten oder Nicht-Eintreten in τ, also dem (von ω) abhängigen Stoppzeitpunkt, entscheidbar ist. Aufgrund der Entscheidbarkeit in τ, muss dies auch für alle nachfolgenden Zeitpunkte gelten. Das führt auf[41]: Die σ-Algebra $\mathcal{F}_\tau$ (zur Stoppzeit τ) ist definiert als

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \in I\}.$$

Damit ergibt sich die *gestoppte Filtration* $\{\mathcal{F}_{\tau \wedge t}\}_{t \in I}$ mit Hilfe der Stoppzeit $\tau \wedge t$ $(:= \min(\tau, t))$. $\mathcal{F}_\tau$ lässt sich auch in der Weise charakterisieren, dass (zwei Umweltentwicklungen) ω_1 und ω_2, die zum selben Zeitpunkt $t^\star$ gestoppt werden und gemäß $\mathcal{F}_{t^\star}$ nicht unterscheidbar sind, auch in der Zukunft $(t > t^\star)$ nicht mehr unterschieden werden können. Die Filtration $\{\mathcal{F}_{\tau \wedge t}\}_{t \in I}$ enthält insofern gegenüber der Filtration $\mathcal{F}_t$ weniger Information, als darin zum selben Zeitpunkt $t^\star$ $(< t)$ gestoppte (Entwicklungen) ω_1 und ω_2 nicht mehr differenziert werden können, wenn sie nicht bereits in $\mathcal{F}_{t^\star}$ differenzierbar waren. Es kann nunmehr gefragt werden, ob die Martingaleigenschaft eines Prozesses durch das Anhalten verändert wird. Hierzu gilt der folgende Satz[42].

Satz 2.3 *Doob's optional sampling theorem*[43]
Ist $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ ein rechtsstetiges Martingal, d.h. alle Pfade sind rechtsstetige Funktionen der Zeit, und sind $\tau_1 \leq \tau_2$ zwei Stoppzeiten, dann gilt:

$$E\left[X_{t \wedge \tau_2} \mid \mathcal{F}_{t \wedge \tau_1}\right] = X_{t \wedge \tau_1}, \quad \textit{fast sicher}, \, t \in [0, \infty).$$

Analoges gilt, falls $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ ein rechtsstetiges Sub- oder Super-Martingal ist.

---

[40] Es werden also Situationen ohne Vorausschau in die Zukunft abgebildet, vgl. *Bingham/Kiesel* (2004), S. 83.

[41] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 8, *Korn/Korn* (1999), S. 22.

[42] Zur Formulierung bei zeitdiskreten Situationen vgl. *Elliott* (1982), S. 9, 22.

[43] Vgl. mit Beweisen *Elliott* (1982), S. 36, *Karatzas/Shreve* (1991), S. 19 f., *Korn/Korn* (1999), S. 22.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Im Rahmen der Voraussetzung dieses Satzes bleibt folglich die (Super-, Sub-)Martingaleigenschaft durch das Stoppen erhalten. Mit Hilfe der Stoppzeit kann der Martingalbegriff durch die Einführung so genannter lokaler Martingale sogar noch etwas weiter gefasst werden.

Ein zur Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ adaptierter Prozess $\{X_t^{loc}\}_{t\in I}$ heißt *lokales Martingal* (bezüglich $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$), falls es eine nicht fallende Folge von Stoppzeiten $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gibt mit

$$\tau_k \to \infty, \text{ fast sicher für } \; k \to \infty,$$

so dass $\{X_{t\wedge\tau_k}^{loc}\}_{t\in I}$ $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ adaptiert und $\forall k \in \mathbb{N}$ ein Martingal ist.

Jedes Martingal ist auch ein lokales Martingal; das Umgekehrte gilt nicht[44]. Für beschränkte lokale Martingale lässt sich eine Aussage bezüglich ihrer allgemeinen Martingaleigenschaft, wie im Folgenden beschrieben, angeben.

Satz 2.4 *Fatou's Lemma*[45]
Ist auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)})$ $\{\xi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *eine Folge von nicht negativen,* $\mathcal{F}$*-messbaren Zufallsvariablen, dann gilt:*

$$E\left[\liminf_{n\to\infty} \xi_n \mid \mathcal{F}_t\right] \leq \liminf_{n\to\infty} E\left[\xi_n \mid \mathcal{F}_t\right] \quad (t \geq 0).$$

Anmerkung 2.2
Satz 2.4 gilt auch für jede nach unten durch eine reelle Konstante $-k\,(k \geq 0)$ *beschränkte Folge von Zufallsvariablen* $\{\tilde{\xi}_n\}_{n=1,2,\ldots}$.

Beweis:
Mit $\xi_n = \tilde{\xi}_n + k, n = 1, 2, \ldots,$ existiert nach Fatou's Lemma eine nicht negative Folge von Zufallsvariablen, so dass für $t \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} E\left[\liminf_{n\to\infty} \tilde{\xi}_n \mid \mathcal{F}_t\right] &= -k + E\left[\liminf_{n\to\infty} \xi_n \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &\leq -k + \liminf_{n\to\infty} E\left[\xi_n \mid \mathcal{F}_t\right] = \liminf_{n\to\infty} E\left[\tilde{\xi}_n \mid \mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

□

Ist $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ ein nicht negatives lokales Martingal, so kann mit einer Stoppzeit τ_n die Zufallsvariable $X(t \wedge \tau_n)$ für beliebiges reelles t als Zufallsvariable im Sinne des vorausgehenden Satzes betrachtet werden. Dann ist $E\left[X(t) \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[\liminf_{n\to\infty} X(t \wedge \tau_n) \mid \mathcal{F}_s\right] \leq \liminf_{n\to\infty} E\left[X(t \wedge \tau_n) \mid \mathcal{F}_s\right] = \liminf_{n\to\infty} X(s \wedge \tau_n) = X(s)$. Entsprechendes gilt, wenn $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ nach unten beschränkt ist. Daraus folgt unmittelbar[46]:

[44] Vgl. *Korn/Korn* (1999), S. 24, sowie mit Gegenbeispiel *Dothan* (1990), S. 242, 240 f.
[45] Vgl. *Dothan* (1990), S. 243 f., und *Williams* (1991), S. 52 f.
[46] Vgl. ausführlicher zur gerade skizzierten Herleitung der Aussage zu nicht negativen Martingalen *Dothan* (1990), S. 243 f.

Satz 2.5
Jedes nach unten beschränkte lokale Martingal ist ein Super-Martingal; insbesondere ist jedes nicht negative lokale Martingal ein Super-Martingal.

Zum Ende des Abschnittes ist noch auf den Messbarkeitsbegriff bei zeitkontinuierlichen Prozessen einzugehen; ferner wird ein spezieller, kontinuierlicher Prozess eingeführt, dem bei der Modellierung stochastischer Aktienkurs- und vergleichbarer Wertentwicklungen eine tragende Rolle zukommt: der Wiener-Prozess.

Ein stochastischer Prozess $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\, \mathcal{F},\, P,\, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)})$ heißt[47]:

- *messbar*, wenn die Abbildung:

$$\begin{aligned} [0,\infty)\times\Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (s,\omega) &\rightarrow X_s(\omega) \end{aligned}$$

  $\mathcal{B}([0,\infty))\bigotimes\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-messbar ist,

- *progressiv-messbar*, wenn für alle $t\geq 0$ die Abbildung:

$$\begin{aligned} [0,t]\times\Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (s,\omega) &\rightarrow X_s(\omega) \end{aligned}$$

  $\mathcal{B}([0,t])\bigotimes\mathcal{F}_t - \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-messbar ist.

Dabei gilt $\mathcal{A}\bigotimes\mathcal{B}=\sigma\{A\times B \mid A\in\mathcal{A},\, B\in\mathcal{B}\}$[48].

Die Messbarkeit von Prozessen weitet den bisher eingeführten Begriff in zeitlicher Hinsicht aus. Dabei ist jeder progressiv-messbare Prozess auch messbar und jeder messbare Prozess besitzt eine progressiv-messbare Modifikation[49]. Zudem ist jeder rechts- oder linksstetige, adaptierte Prozess progressiv-messbar und jeder progressiv-messbare Prozess auch (messbar und) adaptiert[50]. Ist darüber hinaus τ eine Stoppzeit und $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ ein progressiv-messbarer Prozess, dann ist auch der gestoppte Prozess $\{X_{t\wedge\tau}\}_{t\in[0,\infty)}$ progressiv-messbar bezüglich $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$[51]. Ein besonderer, (progressiv-)messbarer Prozess ist der folgende.

Ein eindimensionaler *Wiener-Prozess*, auch eindimensionale *Brown'sche Bewegung* genannt, ist ein reellwertiger, adaptierter Prozess $W=\{W_t\}_{t\geq 0}$ auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},P,\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)})$ mit den folgenden Eigenschaften:

[47] Vgl. zum Folgenden bspw. *Korn/Korn* (1999), S. 36.
[48] Vgl. *Dothan* (1990), S. 187.
[49] Vgl. bspw. *Korn/Korn* (1999), S. 36.
[50] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 4 f.
[51] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 9, *Korn/Korn* (1999), S. 37.

1. $W_0 = 0$ fast sicher,
2. $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ für $0 \leq s \leq t$,
3. $W_t - W_s$ unabhängig von $W_u - W_r$ für $0 \leq r \leq u \leq s < t$,
4. $\{W_t\}_{t \geq 0}$ besitzt stetige Pfade, $\forall \omega \in \Omega$.

($N(\mu, \sigma^2)$ kennzeichnet die Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2).

Ein n-dimensionaler Wiener-Prozess (n-dimensionale Brown'sche Bewegung) ist ein $\mathbb{R}^n$-wertiger Prozess, dessen n Komponenten jeweils unabhängige eindimensionale Wiener-Prozesse sind. Die n-dimensionale Brown'sche Bewegung ($n \geq 1$) generiert eine Filtration $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}$, die, erweitert um die Nullmengen der σ-Algebra $\mathcal{F}$[52], die natürliche Filtration zur Brown'schen Bewegung, die *Brown'sche Filtration*, ergibt[53]. Die Brown'sche Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ ist *rechts*- und *linksstetig* in folgendem Sinne[54]:

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon} \text{ und } \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-} := \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\right), \forall t \geq 0,$$

wobei $t^- = 0$, wenn $t = 0$.

Ferner soll gesagt werden, dass eine Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ die *üblichen Bedingungen* erfüllt, wenn sie rechtsstetig ist und $\mathcal{F}_0$ sämtliche Nullmengen von $\mathcal{F}$ enthält. Die Brown'sche Filtration ist folglich eine Filtration, die die üblichen Bedingungen erfüllt. Ferner ist der Wiener-Prozess ein Markov-Prozess[55]. Der Wiener-Prozess soll im Folgenden noch etwas näher betrachtet werden. Hierzu wird der Begriff der Variation (auf kompakten Mengen) eingeführt.

Für gegebenes $t > 0$ sei $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ mit $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_m = t$ eine Zerlegung des Intervalls $[0, t]$ mit der Weite $||\Pi|| := \max_{1 \leq k \leq m} |t_k - t_{k-1}|$; ferner seien für die folgenden Ausführungen zwei stetige Martingale $\{X_t\}_{t \geq 0}$ und $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ gegeben, die *quadrat-integrierbar*[56] sind, d.h. für die $E[X_t^2], E[Y_t^2] < \infty$ für $t \geq 0$ gilt. Dann heißt der Prozess:

$$V_t^X(\Pi) = \sum_{k=1}^{m} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|$$

(totale) Variation von $\{X_t\}_{t \geq 0}$ *bezüglich der Zerlegung* Π. Die totale Variation des Prozesses $\{X_t\}_{t \geq 0}$ ist gegeben durch:

$$V_t^X = \sup_{\Pi} V_t^X(\Pi).$$

[52] Zur Erweiterung der durch die Brown'sche Bewegung generierten Filtration um die Nullmengen vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 89 ff.
[53] Vgl. *Korn/Korn* (1999), S. 17.
[54] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 89 ff., *Korn/Korn* (1999), S. 18.
[55] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 75, *Øksendal* (2003), S. 115 f.
[56] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 30.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Es sei nun:

$$V_t^{XY}(\Pi) := \sum_{k=1}^{m} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}).$$

Es gibt dann einen bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutigen, adaptierten Prozess[57]

$$[X,Y]_t := \lim_{||\Pi|| \to 0} V_t^{XY}(\Pi) \quad \text{Grenzwert in Wahrscheinlichkeit, } t \geq 0,$$

mit $[X,Y]_0 = 0$, P-fast sicher, der stetig ist, für $t > 0$ endliche totale Variation besitzt und mit dem der Prozess

$$(XY)_t - [X,Y]_t,\ t \geq 0, \quad \text{ein Martingal ist.}$$

$[X,Y]_t\ (t \geq 0)$[58] wird *quadratische Kovariation* von $\{X_t\}_{t \geq 0}$ und $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ genannt. *Grenzwert in Wahrscheinlichkeit* bedeutet dabei, dass für Zerlegungen Π von $[0,t]$ zu beliebigen $\epsilon > 0$, $\eta > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt[59]: Aus $||\Pi|| < \delta$ folgt $P(|V_t^{XY}(\Pi) - [X,Y]_t| > \epsilon) < \eta$. Speziell ist der Prozess

$$[X,X]_t := \lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{k=1}^{m} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 \quad \text{Grenzwert in Wahrscheinlichkeit, } t \geq 0,$$

die *quadratische Variation* des Prozesses $\{X_t\}_{t \geq 0}$. Entsprechend ist $X_t^2 - [X,X]_t\ (t \geq 0)$ ein Martingal. Anstelle von $[X,X]_t$ wird auch kurz $[X]_t$ geschrieben, analog $d[X]_t$ statt $d[X,X]_t$ für das zeitliche Inkrement der quadratischen Variation des Prozesses $\{X_t\}_{t \geq 0}$.

Satz 2.6 *Für die quadratische Kovariation gilt*[60]*:*

$$[X,Y]_t = \frac{1}{4}([X+Y]_t - [X-Y]_t), \quad \forall t \geq 0.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4}([X+Y]_t - [X-Y]_t) \\
&= \tfrac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{m} (X_{t_k} + Y_{t_k} - X_{t_{k-1}} - Y_{t_{k-1}})^2 - \sum_{k=1}^{m} (X_{t_k} - Y_{t_k} - X_{t_{k-1}} + Y_{t_{k-1}})^2\right) \\
&= \tfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{m} ((X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 + 2(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}) + (Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}})^2 \\
&\quad -(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 + 2(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}) - (Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}})^2) \\
&= \sum_{k=1}^{m} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}) \\
&= [X,Y]_t. \quad \square
\end{aligned}$$

---

[57] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 35.

[58] $[X,Y]_t\ (t \geq 0)$ kennzeichnet hierbei einen Prozess, welcher auch durch $\{[X,Y]_t\}_{t \geq 0}$ dargestellt werden kann.

[59] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 32; der Konvergenzbegriff könnte mit Blick auf die Anwendung in Verbindung mit der quadratischen Kovariation von Wiener-Prozessen auch schärfer als *gleichmäßige Konvergenz in Wahrscheinlichkeit* formuliert bzw. gefordert werden, vgl. *Dothan* (1990), S. 169 f., zum nachfolgend bezeichneten Spezialfall der quadratischen Variation. In diesem Fall wäre zu fordern, dass die Bedingung zu beliebigen $\epsilon > 0$, $\eta > 0$ und $t \in [0,T]$ für ein $\delta > 0$ gilt.

[60] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 31, mit anderer Ausgangsdefinition, sowie S. 36, Problem 1.5.14.

Der Prozess der quadratischen Variation zum (stetigen, quadrat-integrierbaren) Wiener-Prozess $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ ist[61]:

$$[W,W]_t = t, \quad \forall t \in [0,T].$$

Ferner besitzen zwei stochastisch unabhängige Wiener-Prozesse $\{W_t\}^1_{t\in[0,T]}$ und $\{W_t\}^2_{t\in[0,T]}$ eine quadratische Kovariation von null[62], d.h.

$$[W^1,W^2]_t = 0, \quad \forall t \in [0,T].$$

Folglich sind die Prozesse $W_t^2 - t$ und $W_t^1 W_t^2$ $(t \geq 0)$ Martingale.

Trotz beschränkter quadratischer Variation besitzt der Wiener-Prozess keine endliche totale Variation; es gilt also $\int_0^t |dW_s| = \infty, \ \forall t > 0$[63]. Dies erfordert bei der Integration mit Wiener-Prozessen eine besondere Integral-Definition, das so genannte Itô-Integral, welches im Weiteren eingeführt wird. Zuvor wird die Einführung des Integralbegriffes durch den folgenden Abschnitt noch stärker motiviert. Dessen Gegenstand ist die Entwicklung eines Modells für Aktienkurse (und ähnliche Wertentwicklungen), deren stochastische Wertänderungen mit Hilfe von Wiener-Prozessen beschrieben werden und für deren dynamische Darstellung der angesprochene Integralbegriff Verwendung findet. Die Manipulation stochastischer Prozesse, die im Kern auf einem Wiener-Prozess basieren und als Itô-Prozesse bezeichnet werden, führt auf Prozesse, welche wiederum derselben Klasse angehören und sich aus der im darauf folgenden Abschnitt dargestellten Itô-Formel ergeben.

2.1.1.2 Die Modellierung der Aktienkurse

Da im Schwerpunkt der Betrachtung Handels- bzw. Bewertungsobjekte stehen, deren Wertdynamik derjenigen von Aktien entsprechen soll, widmen sich die folgenden Ausführungen der Modellierung von Aktienkursen — allerdings lediglich soweit dies für die weitere Darstellung von Relevanz ist.

Ein grundlegendes Modell zur Beschreibung des Kursverlaufes einer Aktie ist das folgende:

$$\begin{aligned} \ln \frac{S_t}{S_0} &= \tilde{b}t + \sigma W_t \\ \Rightarrow \quad S_t &= S_0 e^{\tilde{b}t + \sigma W_t}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei S_t, S_0 für die Aktienkurse zu den Zeitpunkten t bzw. 0, $\tilde{b}\,(> 0)$ eine konstante Driftrate und σ einen konstanten Volatilitätsparameter, ggf. zur

[61] Zum Beweis vgl. *Dothan* (1990), S. 173 f.

[62] Zum Beweis vgl. *Irle* (1998), S. 211 f., i.V.m. *Bingham/Kiesel* (2004), S. 51-53, zur Verbindung der dort verwendeten Konvergenzbegriffe.

[63] Vgl. *Dothan* (1990), S. 178 f.

Verstärkung ($\sigma > 1$) bzw. Abschwächung ($\sigma < 1$) des Wiener-Prozesses $\{W_t\}_{t\geq 0}$, bezeichnen. Der dergestalt charakterisierte stochastische Prozess $\{S_t\}_{t\geq 0}$ heißt *geometrisch Brown'sche Bewegung*[64]. Er entsteht unter der Annahme, dass die zeitkontinuierliche Rendite aus der Investition in die Aktie normalverteilt ist. Sie schwankt um ein erwartetes Wachstum von $\tilde{b}$ pro Zeiteinheit. Die Schwankungen werden bestimmt durch den Wiener-Prozess $\{W_t\}_{t\geq 0}$ und sind damit normalverteilt mit einer zeitproportional anwachsenden Varianz von $\sigma^2 t$, welche man sich (wegen des zentralen Grenzwertsatzes) auch als Varianz der Summe einer Vielzahl von (beliebig verteilten) Renditeänderungen vorstellen kann[65]. Die Rendite wird folglich über eine Drift sowie eine „Störung" beschrieben, die zufällige, kontinuierlich auftretende und unerwartete Umwelteinflüsse (ohne eigenen Trend) abbildet. Dabei sind die einzelnen Störungen in Gestalt von Trendabweichungen als unabhängig voneinander zu betrachten[66].

Mit einer solchen Modellierung der Aktienkurse sind verschiedene, weitere Aspekte verbunden:

- Der Bezug der Normalverteilungsannahme auf Renditeänderungen und nicht etwa auf absolute Änderungen beinhaltet Folgendes: Zum einen wird ein Vergleich verschiedener Aktien als Finanzanlagealternativen aus Sicht der Investoren auf deren Renditecharakteristika (Erwartungswert, Risiko — repräsentiert durch die Standardabweichung bzw. Varianz der Renditen) abstellen, da für sie die absolute Höhe des Aktienkurses ohne Belang ist[67], sofern das Investitionsvolumen bei entsprechender Stückelung des Investitionsobjektes beliebig gewählt werden kann. Zum anderen zeigt obige Gleichung für den Aktienkurs, dass dieser auch bei großen negativen Werten des verstärkten Wiener-Prozesses, also bei sehr negativen Werten der (kontinuierlichen) Rendite, nicht negativ wird.

- Da das Zufallselement in der Entwicklung der Aktienrendite durch den Wiener-Prozess bestimmt wird, handelt es sich sowohl bei der Renditeentwicklung als auch bei dem daraus abzuleitenden Prozess der Aktienkursentwicklung um Markov-Prozesse. Die geometrisch Brown'sche Bewegung beschreibt folglich eine Aktie, die einen schwach informationseffizienten Markt (ggf. neben anderen Instrumenten) konstituiert[68].

- Darüber hinaus wird der Aktienkursverlauf über einen zeit- und wertkontinuierlichen Prozess beschrieben. Dies erscheint insofern gerechtfertigt, als

[64] Der Bezug auf normalverteilte Aktienkurs*renditen* und die damit verbundene Einführung der Brown'schen Bewegung zur Beschreibung von Kursprozessen gehen auf *Samuelson* (1965) zurück.

[65] Vgl. *Korn/Korn* (1999), S. 13 f.

[66] Der Wiener-Prozess ist der einzige kontinuierliche Prozess, der unabhängige Zuwächse aufweist, die nicht von zeitlich vorausgehenden Realisationen abhängen und einen Erwartungswert von null besitzen, vgl. *Øksendal* (2003), S. 22 i.V.m. S. 21.

[67] Vgl. *Hull* (2000), S. 225.

[68] Vgl. *Hull* (2000), S. 219. Vgl. auch den Hinweis in Fn. 36, S. 37.

wertändernde Umwelteinflüsse permanent auftreten *können* und die vom Markt hierfür vorgenommene Preisänderung letztlich jeden beliebigen reellen Wert (mit verbleibendem positiven Wert, s.o.) annehmen kann. Dies trifft auch auf Wertänderungen von Investitionsobjekten zu, deren Wertentwicklungen sich analog denen von Aktien beschreiben lassen. Sieht man die Prozesscharakteristik in Verbindung mit einer (noch zu stellenden) Anforderung an den Markt, nämlich die permanente und im Hinblick auf den Wertebereich von Preisen unrestringierte Handelbarkeit, zeigen sich gewisse Einschränkungen gegenüber realen Verhältnissen, die in Bezug auf Effekten jedoch sicherlich nicht allzu gewichtig sind, da diese u.U. bereits an Börsen unterschiedlicher Zeitzonen gehandelt werden und die Wertdiskretisierung[69] i.d.R. sehr fein ist. Dabei auftretende Diskrepanzen werden im Weiteren als vernachlässigbar erachtet. Dass insofern die Wertentwicklung nicht eins zu eins beobachtbar und vergleichbar ist und dies in einem nicht unwesentlichen Maße bei nicht börslich gehandelten Objekten der Fall sein wird, sollte nicht primär durch eine angepasste Modellierung der Wertentwicklung, sondern durch eine adäquate Beschreibung der Marktverhältnisse berücksichtigt werden. So gesehen erscheint der vorgestellte Wertentwicklungs-Prozess, der auch im „Verborgenen" stattfinden kann, als durchaus realitätskonform[70]. Dem steht letztlich auch nicht entgegen, wenn die Beschreibung des Marktes idealisierend bleibt, wie dies für einen bezüglich der Marktliquidität unelastischen Preis der gehandelten Objekte zutreffen mag[71].

Die Herleitung des Aktienkurses S_t nach Gl. (2.1) war möglich, da die Koeffizienten σ und $\tilde{b}$ (ebenso wie S_0) Konstanten waren, so dass galt:

$$\begin{aligned} \ln S_t &= \textstyle\int_0^t d\ln S_s = \ln S_0 + \int_0^t \tilde{b}\, ds + \int_0^t \sigma\, dW_s \\ &= \ln S_0 + \tilde{b}t + \sigma \textstyle\int_0^t\, dW_s = \ln S_0 + \tilde{b}t + \sigma W_t. \end{aligned}$$

Sind die Koeffizienten σ und $\tilde{b}$ hingegen ihrerseits zeitabhängige, stochastische Prozesse, ist dieses Vorgehen nicht mehr möglich, da das Integral $\int_0^t \sigma(s)\, dW_s$[72] keine Interpretation als Riemann- oder Lebesgue-Stieltjes-Integral besitzt[73]. Es ist folglich eine andere Integral-Interpretation, das *Itô-Integral* einzuführen, mit dem durch

$$\begin{aligned} \int_0^t d\ln S_s &= \ln S_0 + \int_0^t \tilde{b}(s)\, ds + \int_0^t \sigma\, dW_s \\ \Leftrightarrow \quad S_t &= S_0 e^{\int_0^t \tilde{b}(s)\, ds + \int_0^t \sigma(s)\, dW_s} \end{aligned} \tag{2.2}$$

[69] Vgl. hierzu *Hull* (2000), S. 218.

[70] Vgl. jedoch die nachfolgenden Ausführungen.

[71] Zur Preisdimension der Wertpapierliquidität vgl. *Kempf* (1999), beschreibend insbesondere S. 25 ff.

[72] Genauer müsste geschrieben werden: $\sigma(\omega, s)$.

[73] Vgl. bspw. *Korn/Korn* (1999), S. 29 ff.

ein Aktienkurs S_t, bzw. $S(t)$ oder $S(\omega, t)$, bestimmt wird. Die Markov-Eigenschaft des Aktienkurses bleibt allerdings lediglich dann erhalten, wenn die ihn bildenden Prozesse ebenfalls diese Eigenschaft aufweisen. Im Folgenden wird jedoch allgemein lediglich vorausgesetzt, dass die Prozesse progressiv-messbar und damit sogar nicht notwendig Markov-Prozesse sind.

Die durch Gl. (2.2) wiedergegebene Modellierung lässt im Grundsatz vielgestaltige Aktienkursprozesse zu. Darüber hinaus wird auch bezüglich des risikolosen Zinsprozesses, mithin des Bonds, a priori lediglich von dessen progressiver Messbarkeit ausgegangen. Auf die dadurch mit einbezogenen, unterschiedlichen Zinsprozesse und die damit zusammenhängenden Zinsstrukturmodelle kann allerdings nicht vertiefend eingegangen werden[74]. Das oben eingeführte Grundmodell zur Beschreibung der Aktienkursbewegung, die geometrisch Brown'sche Bewegung, wird als Spezialfall insbesondere dann eine Rolle spielen, wenn die Operationalisierung von Portfolio-Prozessen nicht ohne eine Spezifizierung von Modellparametern auskommt. Vor dem Hintergrund der oben angeführten Eigenschaften dieses Modells erscheint dies oft vertretbar[75]. Nicht zuletzt von daher dürfte sich auch die vielfache, wenn nicht zentrale Verwendung des Modells in der Bewertung von Optionen erklären, soweit analytische Optionspreisformeln hergeleitet werden[76]. Allerdings existieren auch Modellierungsansätze, welche vorzufindende Unzulänglichkeiten bei der Beschreibung von Aktienkursbewegungen abzubauen versuchen. Insbesondere belegen empirische Untersuchungen eine höhere Wahrscheinlichkeit extremer Aktienrenditen als dies die Normalverteilung impliziert[77]. Komplexere Modellgestaltungen, zum Teil unter Rückgriff auf diskrete stochastische Komponenten, zeigen eine vorteilhaftere Anpassung an reale Aktienkursbewegungen[78], gerade hinsichtlich der äußeren Renditebereiche. Die Erhöhung der Anpassungsgüte an empirische Daten durch komplexere Modellierungen geht

[74] Vgl. hierzu *Sandmann* (2001), S. 321 ff., sowie, insbesondere m.w.N., auch *Rudolf* (2000). Vgl. bereits die Abgrenzung in *Kapitel 1*, S. 20.

[75] Zu einer weitgehend positiven Beurteilung dieses Prozesses hinsichtlich der Abbildung realer (Aktienkurs-)Marktdaten vgl. *Wilmott/Howison/Dewynne* (1999), S. 22; vgl. demgegenüber *Eberlein/Keller* (1995), S. 284.

[76] Vgl. nicht nur das grundlegende Modell der Optionsbewertung nach *Black/Scholes* (1973), sondern auch die weiterführenden Modelle zur Bewertung exotischer Optionen, welche sich bspw. in den Darstellungen von *Wilmott/Howison/Dewynne* (1999), S. 197 ff., *Hull* (2000), S. 458 ff., *Korn/Korn* (1999), S. 175 ff., wiederfinden.

[77] Vgl. bspw. *Eberlein/Keller* (1995).

[78] Dies wurde bspw. für das „Variance Gamma"-Modell gezeigt, welches eine Gammaverteilte Varianz einer Normalverteilung für die Aktienkursrendite zugrunde legt; vgl. hierzu *Madan/Seneta* (1990). Vgl. *Eberlein/Keller* (1995) und *Eberlein/Keller/Prause* (1998) zur Ersetzung der Brown'schen Bewegung durch einen Sprungprozess, so dass die Aktienkursrenditen einer hyperbolischen Verteilung folgen. Eine Modellierung kontinuierlicher Aktienkursrenditen mit Sprüngen und bei stochastischer Volatilität sowie eines stochastischen Zinsprozesses formulieren *Bakshi/Cao/Chen* (1997). Unter Einbeziehung ihres Ansatzes bieten sie einen umfassenden Vergleich zwischen verschiedenen Modellierungen anhand empirischer Daten.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

vielfach jedoch auf Kosten der Handhabbarkeit der Modelle[79]. Um bspw. im Bereich der dynamischen Portfolio-Optimierung konkrete Ergebnisse erzielen zu können, wird deshalb zumeist der Rückgriff auf die einfache Modellstruktur der geometrisch Brown'schen Bewegung vonnöten sein. Von daher erfordern die aus einer bestimmten Anwendungssicht formulierten, einschränkenden Spezifikationen der zugelassenen Prozesse gewisse Zugeständnisse bzw. eine Fokussierung der Modellierung. Insbesondere bleiben hier Sprungprozesse außer Betracht[80]. Wie bereits erwähnt, ist zur Auswertung des Terms der rechten Seite von Gl. (2.2) eine besondere Integral-Definition nötig. Diese wird nunmehr entwickelt.

2.1.1.3 Stochastisches Integral und Itô-Formel

Allgemeine Voraussetzung für das Folgende ist ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$, dessen Filtration die üblichen Bedingungen erfüllt. Ggf. verwendete Wiener-Prozesse seien adaptiert an diese Filtration. Für das zu definierende Integral werden zunächst so genannte einfache Prozesse im Integranden betrachtet[81].

Ein Prozess $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ heißt *einfach*, wenn es eine streng monoton wachsende Folge reeller Zahlen $\{t_i\}_{i=0,\ldots,\infty}$ mit $t_0 = 0$ und eine Folge beschränkter Zufallsvariablen $\{\xi_i\}_{i=0,\ldots,\infty}$ mit ξ_i $\mathcal{F}_{t_i}$-messbar gibt, so dass sich $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ darstellen lässt als:

$$X_t(\omega) = \xi_0(\omega)1_0(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(\omega)1_{(t_i,t_{i+1}]}(t), \quad 0 \le t < \infty, \forall\omega \in \Omega.$$

(Bemerkung: Von Bedeutung ist hierbei, dass ξ_i im gesamten Intervall $(t_i, t_{i+1}]$ bekannt ist, da die Zufallsvariable $\mathcal{F}_{t_i}$-messbar ist. Es werden folglich die „linken" Werte des Integranden zur Berechnung des Integrals herangezogen[82].) Für den gerade beschriebenen, einfachen Prozess $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ hat das *stochastische Integral* $I_t(X)$ die folgende Gestalt[83]:

$$I_t(X) := \int_0^t X_s\, dW_s := \sum_{i\ge 0} \xi_i(W_{t\wedge t_{i+1}} - W_{t\wedge t_i}), \quad t \in [0, T].$$

[79] Die Frage nach einer diesbezüglichen Kosten/Nutzen-Überlegung wird von *Bakshi/Cao/Chen* (1997), S. 2004, gestellt.

[80] Vgl. zu diesen bspw. *Dixit/Pindyck* (1994), S. 167 ff.

[81] Zur Herleitung des Itô-Integrals vgl. *Korn/Korn* (1999), S. 29-48, und *Øksendal* (2003), S. 21-37, sowie mit allgemeineren Prozessen als dem Wiener-Prozess im Integranden *Karatzas/Shreve* (1991), S. 128-148, und *v. Weizsäcker/Winkler* (1990), S. 77-110.

[82] Das zu entwickelnde Integral beruht letztlich auf Integranden in Gestalt vorhersagbarer Prozesse.

[83] Vgl. *Korn/Korn* (1999), S. 32, *Øksendal* (2003), S. 23.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Dieses stochastische Integral ist ein stetiges Martingal mit $I_0(X) = 0$[84]; es ist also insbesondere adaptiert[85] und folglich auch progressiv-messbar.

Eine Erweiterung ist zunächst auf die folgende Prozess-Klasse möglich:

$$\mathcal{L} \quad := \quad \Big\{\{X_t\}_{t\in[0,T]} \text{ ist reellwertiger, stochastischer Prozess } | \\ \{X_t\}_{t\in[0,T]} \text{ progressiv-messbar, } E\left[\int_0^T X_t^2\,dt\right] < \infty\Big\}.$$

Es gilt dann[86]: Ist $\{X_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{L}$ $(T > 0)$, dann gibt es eine Folge einfacher Prozesse $\{X_t^{(n)}\}_{t\geq 0}^{n=1,\ldots,\infty}$, so dass:

$$\lim_{n\to\infty} E\int_0^T (X_t^{(n)} - X_t)^2\,dt = 0.$$

Zu dieser Folge einfacher Prozesse gibt es eine Folge stochastischer Integrale $I_t(X^{(n)})$ $(t \in [0,T])$ mit einem Grenzwert $I_t(X)$ in $\mathcal{L}$ in folgendem Sinne[87]:

$$E\left(|I_t(X) - I_t(X^{(n)})|^2\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Dieser Grenzwert kann als stetiges Martingal gewählt werden, das bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig ist[88]; zudem ist er quadrat-integrierbar[89] und es gilt die *Itô-Isometrie*:

$$E\left[I_t(X)^2\right] = E\left[\int_0^t X_s^2\,ds\right], \quad t \in [0,T].$$

Der durch $I_t(X)$ $(t \in [0,T])$ gegebene Grenzwert für den Prozess $\{X_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{L}$ wird *stochastisches* oder *Itô-Integral* genannt und es wird geschrieben:

$$\int_0^t X_s\,dW_s \;:=\; I_t(X).$$

Aufgrund des folgenden Satzes gilt ferner, dass jedes quadrat-integrierbare, bezüglich einer Brown'schen Filtration adaptierte Martingal $\{M_t\}_{t\in[0,T]}$ eine Darstellung als $M_t = I_t(X)$, $t \in [0,T]$, mit einem $\{X_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{L}$ besitzt.

[84] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 137 f., *Korn/Korn* (1999), S. 33.
[85] Vgl. *Øksendal* (2003), S. 30.
[86] Vgl. mit Beweisen *Karatzas/Shreve* (1991), S. 135, *Korn/Korn* (1999), S. 40 f.
[87] Vgl. zum Grenzwertbegriff *Bingham/Kiesel* (2004), S. 51-53.
[88] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 138 f., *Korn/Korn* (1999), S. 42 ff.
[89] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 138 f., sowie zum Begriff S. 41.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Satz 2.7 *Martingaldarstellungssatz von Itô*[90]
Es seien $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ *die Brown'sche Filtration zur d-dimensionalen Brown'schen Bewegung* $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ *und* $\{M_t\}_{t\in[0,T]}$ *ein bezüglich der Brown'schen Filtration adaptiertes Martingal mit:*

$$E[M_t^2] < \infty, \quad t \in [0,T].$$

Dann existiert ein progressiv messbarer, d-dimensionaler Prozess $\{\psi_t\}_{t\in[0,T]} = \{(\psi_1, \dots, \psi_d)'_t\}_{t\in[0,T]}$, *der bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig ist, mit* $\{\psi_{i,t}\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{L}$, $i = 1, \dots, d$, *und*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \psi'(s)\, dW(s).$$

Ergänzung:
Ist $\{M_t\}_{t\in[0,T]}$ *ein lokales Martingal bezüglich der Brown'schen Filtration, für das obige Bedingung nicht zu gelten braucht, dann hat es eine solche Darstellung mit einem Prozess* $\{\psi_{i,t}\}_{t\in[0,T]}$ $(i = 1, \dots, d)$, *für den* $\int_0^T ||\psi(t)||^2\, dt < \infty$ *(fast sicher) gilt.*

Das bisher für Prozesse aus $\mathcal{L}$ im Integranden eingeführte Integral kann noch für eine größere Prozessklasse (mittels Lokalisation) formuliert werden, welcher auch der in der vorausgehenden Ergänzung angeführte Prozess $\{\psi_t\}_{t\in[0,T]}$ angehört[91]. Definiert man für die erweiterte[92] Prozessklasse:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} \quad := \quad & \Big\{ \{X_t\}_{t\in[0,T]} \text{ ist reellwertiger, stochastischer Prozess } | \\ & \{X_t\}_{t\in[0,T]} \text{ progressiv-messbar, } \textstyle\int_0^T X_s^2\, dt < \infty,\ P - \text{fast sicher} \Big\}\end{aligned}$$

eine Folge von Stoppzeiten τ_n $(n \in \mathbb{N})$ gemäß:

$$\tau_n(\omega) = n \wedge \inf \left\{ 0 \le t < \infty \mid \int_0^t X_s^2(\omega)\, ds(\omega) \ge n \right\},$$

so dass $\tau_n \to \infty$, fast sicher für $n \to \infty$, dann kann zu jedem $\{X_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{H}$ eine Folge von Prozessen $\{X_t\}_{t\in[0,T]}^{(n)}$ in $\mathcal{L}$ wie folgt angegeben werden:

$$X_t^{(n)}(\omega) := X_t(\omega) 1_{\tau_n(\omega) \ge t}, \quad 0 \le t < \infty.$$

Damit lässt sich das *stochastische Integral* definieren als:

$$I_t(X) := I_t\left(X^{(n)}\right), \quad 0 \le t \le \tau_n.$$

$I_t(X)$ ist ein stetiges, lokales Martingal.

[90] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 182 ff., *Korn/Korn* (1999), S. 81 ff., *Øksendal* (2003), S. 51-54; die Ergänzung entspricht *Korn/Korn* (1999), S. 86 (Korollar 53).
[91] Vgl. zur Erweiterung des Integrals *Korn/Korn* (1999), S. 46 ff.
[92] Zu $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}$ vgl. *Dothan* (1990), S. 191.

Nach Einführung des stochastischen Integrals kann nun der zentrale Satz von Itô angeführt werden, zu dessen Vorbereitung lediglich noch der Begriff eines Itô-Prozesses benötigt wird[93]. Ein Prozess $\{X_t\}_{t\geq 0}$ heißt *Itô-Prozess*, falls er darstellbar ist als:

$$X_t = X_0 + \int_0^t U(s)\,ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t V_i(s)\,dW_i(s), \quad P\text{-fast sicher},\ t \geq 0.$$

Dabei sind: X_0 $\mathcal{F}_0$-messbar, $\{U_t\}_{t\geq 0}$ und $\{V_{i,t}\}_{t\geq 0}$ progressiv-messbare Prozesse mit $\int_0^t |U(s)|\,ds < \infty$ und $\int_0^t V_i^2(s)\,ds < \infty$, P-fast sicher, für alle $t \geq 0$, $i = 1,\dots,d$. Ein m-dimensionaler Itô-Prozess besteht aus n eindimensionalen Itô-Prozessen. Das Integral $\int_0^t U(s)\,ds$ ist im Lebesgue-Stieltjes Sinne definiert[94].

Zur Notation:

- Mit $\{X_t\}_{t\geq 0}$ Itô-Prozess und $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ progressiv-messbarer, reellwertiger Prozess gilt[95]:

$$\int_0^t Y(s)\,dX(s) := \int_0^t Y(s)U(s)\,ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t Y(s)V_i(s)\,dW_i(s).$$

- X_t bzw. $X(t)$ $(t \in I)$ können im Folgenden auch anstelle von $\{X_t\}_{t\in I}$ stehen, sofern sich die Unterscheidung zwischen einem (gesamten) Prozess, welcher hierbei durch ein beliebiges t aus einem ggf. implizit gegebenen Wertebereich repräsentiert wird, und seiner Ausprägung als Zufallsvariable zu einem *speziellen* Zeitpunkt t aus dem Zusammenhang ergibt. Darüber hinaus steht für den Prozess $X(t)$ $(t \in I)$ mitunter auch kurz $X(.)$.

- Allgemein wird eine Integralgleichung wie die obige bezeichnet durch:

$$dX_t = U(t)\,dt + \sum_{i=1}^d V_i(t)\,dW_i(t).$$

Satz 2.8 *Itô-Formel (Satz von Itô)*[96]

- *Eindimensionale Formel:*
  Sind $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein Itô-Prozess (wie zuvor beschrieben) und $f : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine im ersten Argument einmal, im zweiten zweimal stetig differenzierbare Funktion, d.h. $f \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R})$, dann gilt ($P$-fast sicher, $t \geq 0$)

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) \quad = \quad & f(0, X(0)) + \int_0^t f_t(s, X(s))\,ds + \int_0^t f_X(s, X(s))\,dX_s \\ & + \tfrac{1}{2} \int_0^t f_{XX}(s, X(s))\,d[X, X]_s, \end{aligned}$$

[93] Vgl. *Korn/Korn* (1999), S. 48 f., *Øksendal* (2003), S. 44 sowie 48.

[94] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 23.

[95] Vgl. *Korn/Korn* (1999), S. 49.

[96] Vgl. zu Darstellung und Beweis *Karatzas/Shreve* (1991), S. 149-153, *Korn/Korn* (1999), S. 50-60, und *Øksendal* (2003), S. 44-49.

wobei $f(t, X(t))$ *wieder ein Itô-Prozess ist. Der quadratische Variationsprozess hat in diesem Fall die Gestalt:* $d[X, X]_t = \sum_{i=1}^d V_i^2(s)\, ds$.

- *Mehrdimensionale Formel:*
  Sind $\{X(t)\}_{t\geq 0} = \{(X_1(t), \ldots, X_n(t))'\}_{t\geq 0}$ *ein* n*-dimensionaler Itô-Prozess mit* $X_i(t) = X_i(0) + \int_0^t U_i(s)\, ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t V_{ij}\, dW_j(s),\ i = 1, \ldots, n,$ *und* $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *eine im ersten Argument einmal und in den Argumenten* $2, \ldots, n+1$ *zweimal stetig differenzierbare Funktion — kurz ebenfalls* $f \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ *—, dann gilt (*P*-fast sicher,* $t \geq 0$*):*

$$\begin{aligned} f(t, X_1(t), \ldots, X_n(t)) &= f(0, X_1(0), \ldots, X_n(0)) + \int_0^t f_t(s, X_1(s), \ldots, X_n(s))\, ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_0^t f_{X_i}(s, X_1(s), \ldots, X_n(s))\, dX_i(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t f_{X_i X_j}(s, X_1(s), \ldots, X_n(s))\, d[X_i, X_j]_s. \end{aligned}$$

  $f(t, X_1(t), \ldots, X_n(t))$ *ist wieder ein Itô-Prozess und die quadratische Kovariation ist* $d[X_i, X_j]_t = \sum_{k=1}^d V_{ik}(t) V_{jk}(t)\, dt$.

Aus der Itô-Formel ergibt sich unmittelbar Folgendes:

Satz 2.9 *Produktregel oder Partielle Integration*[97]
Sind $\{X_1(t)\}_{t\geq 0}$ *und* $\{X_2(t)\}_{t\geq 0}$ *zwei Itô-Prozesse mit:*

$$\begin{aligned} X_1(t) &= X_1(0) + \int_0^t U_1(s)\, ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t V_{1i}(s)\, dW_i(s), \quad P\text{-fast sicher},\ t \geq 0, \\ X_2(t) &= X_2(0) + \int_0^t U_2(s)\, ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t V_{2i}(s)\, dW_i(s), \quad P\text{-fast sicher},\ t \geq 0, \end{aligned}$$

dann gilt mit $f(X_1(t), X_2(t)) = X_1(t) X_2(t)$*:*

$$\begin{aligned} X_1(t) X_2(t) &= X_1(0) X_2(0) + \int_0^t X_1(s)\, dX_2(s) + \int_0^t X_2(s)\, dX_1(s) + \int_0^t d[X_1, X_2](s) \\ &= X_1(0) X_2(0) + \int_0^t \left(X_1(s) U_2(s) + X_2(s) U_1(s) + \sum_{i=1}^d V_{1i}(s) V_{2i}(s) \right) ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \int_0^t \left(X_1(s) V_{2i}(s) + X_2(s) V_{1i}(s) \right) dW_i(s). \end{aligned}$$

Gegenüber der gewöhnlichen Produktregel ergibt sich ein „Zusatzterm" aus der quadratischen Kovariation. Der Itô-Kalkül besitzt demnach eigene Rechenregeln. Dies verdeutlicht das folgende einfache Beispiel.

[97] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 155, *Korn/Korn* (1999), S. 60.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Beispiel 2.4 *Itô-Kalkül am Beispiel*[98]
Für den Itô-Prozess $X_t = W_t = \int_0^t dW_s$, $t \geq 0\,(X_0 = 0)$, ergibt sich mit $f(X) = X^2$ Folgendes:

$$W_t^2 = f(X_t) = 0 + \int_0^t 2W_s\,dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2\,ds = 2\int_0^t W_s\,dW_s + t.$$

Somit gilt

$$\int_0^t W_s\,dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

Gegenüber der üblichen (Riemann-)Integration tritt der „Zusatzterm“ $\frac{1}{2}t$, *also eine zusätzliche Zeitdrift, auf.* □

Mit Hilfe der Itô-Formel kann nunmehr der Aktienkursverlauf nach Gl. (2.2) als Itô-Prozess beschrieben werden. Sind $\tilde{b}(t), \sigma(t) \in \mathcal{L}$ und $W(t)\,(t \geq 0)$ ein eindimensionaler Wiener-Prozess, dann ist für $t \geq 0$ $X(t) = \int_0^t \tilde{b}(s)\,ds + \int_0^t \sigma(s)\,dW(s)$ ein Itô-Prozess und $S(t) = S(0)e^{X(t)}$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) + \int_0^t S(0)e^{X(s)}\,dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t S(0)e^{X(s)}\,d[X,X](s) \\ \Leftrightarrow \quad S(t) &= S(0) + \int_0^t \left(S(s)\tilde{b}(s) + \frac{1}{2}S(s)\sigma^2(s)\right)ds + \int_0^t S(s)\sigma(s)\,dW(s). \end{aligned}$$

In Kurzschreibweise gilt also — mit Anfangswert $S(0)$:

$$dS(t) = S(t)\left(\underbrace{(\tilde{b}(t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t))}_{=:\,b(t)}dt + \sigma(t)\,dW(t)\right). \qquad (2.3)$$

Der Aktienkursprozess besitzt eine Zeitdrift von $S(t)b(t)\,dt$ $(= S(t)(\tilde{b}(t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t))\,dt)$, wobei im Weiteren der Prozess $b(.)$ als *erwartete Driftrate* bezeichnet werden soll. $\sigma(.)$ wird *Volatilitäts-Prozess* genannt. Der Aktienkursprozess $S(t) = S(0)e^{\int_0^t (b(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(t))\,ds + \int_0^t \sigma(s)\,dW(s)}$ $(t \geq 0)$ ist folglich auch durch die stochastische Differentialgleichung (2.3) (im Sinne von Ununterscheidbarkeit) gegeben. Umgekehrt könnte man auch von der stochastischen Differentialgleichung, mithin der durch sie repräsentierten Integralgleichung, ausgehen und einen Prozess suchen, der sie erfüllt. Für einen speziellen Typ von stochastischen Differentialgleichungen gibt der folgende Satz eine Lösung an.

[98] Vgl. *Øksendal* (2003), S. 29, 45.

Satz 2.10 *Variation der Konstanten nach Korn/Korn*[99]
Gegeben seien eine d-dimensionale, an die Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *adaptierte Brown'sche Bewegung* $W(t)$ $(t \geq 0)$ *und die ein- bzw. d-dimensionalen, progressiv messbaren Prozesse* $A(t)$, $a(t)$, $\Psi(t) = (\Psi_i(t))_{i=1,\dots,d}$, $\psi(t) = (\psi_i(t))_{i=1,\dots,d}$ $(t \geq 0)$ *mit* $\int_0^t (|A(s)| + |a(s)|)\, ds < \infty$ *und* $\sum_{i=1}^d \int_0^t \left(\Psi_i^2(s) + \psi_i^2(s)\right) ds < \infty$, *P-fast sicher, für alle* $t \geq 0$. *Dann ist die Lösung der stochastischen Differentialgleichung:*

$$\begin{aligned} dX(t) &= (A(t)X(t) + a(t))\, dt + (X(t)\Psi'(t) + \psi'(t))\, dW(t), \\ X(0) &= x \quad \textit{(Anfangsbedingung)} \end{aligned}$$

bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig gegeben durch den adaptierten Prozess:

$$X(t) = \tilde{Z}(t) \left(x + \int_0^t \frac{1}{\tilde{Z}(s)} \left(a(s) - \Psi'(s)\psi(s)\right) ds + \int_0^t \frac{1}{\tilde{Z}(s)} \psi'(s)\, dW(s) \right).$$

Dabei ist:

$$\tilde{Z}(t) = e^{\int_0^t \left(A(s) - \frac{1}{2}||\Psi(s)||^2\right) ds + \int_0^t \Psi'(s)\, dW(s)} \quad (t \geq 0).$$

$\tilde{Z}(t)$ $(t \geq 0)$ *ist zudem Lösung der Gleichung* $d\tilde{Z}(t) = \tilde{Z}(t)\ (A(t)\, dt + \Psi'(t)\, dW(t))$ *mit* $\tilde{Z}(0) = 1$.

Zu der bisher eingeführten Aktie, symbolisiert durch ihren Kursprozess $S(.)$, soll noch eine risikolose Anlage- bzw. Verschuldungsmöglichkeit, ein Bond, hinzukommen. Der Wertprozess des Bonds $\{S_0(t)\}_{t\in[0,T]}$ ergibt sich aus folgender Differentialgleichung:

$$dS_0(t) = S_0(t)r(t)\, dt$$

mit einem progressiv-messbaren Prozess $r(t)(\geq 0; t \in [0,T])$, für den gilt: $\int_0^t r(s)\, ds < \infty$ $(t \in [0,T])$. (Hierbei wird auf das endliche, abgeschlossene Intervall $[0,T]$ Bezug genommen.) Mit Hilfe des risikolosen Bonds soll nun der *diskontierte Aktienkursprozess* $\dfrac{S(t)}{S_0(t)}$ $(t \in [0,T])$ betrachtet werden. Durch Anwendung der Itô-Formel, die sich wegen der Risikolosigkeit des Bonds starkt vereinfacht, ergibt sich:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{S(t)}{S_0(t)}\right) &= S(t)d\left(\frac{1}{S_0(t)}\right) + \frac{1}{S_0(t)}\, dS(t) + 0 \\ &= \frac{S(t)}{S_0(t)} \left((b(t) - r(t))\, dt + \sigma(t)\, dW(t)\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dabei wurde $d\left(\dfrac{1}{S_0(t)}\right) = -\dfrac{1}{S_0^2(t)} S_0(t)r(t)\, dt = -\dfrac{1}{S_0(t)} r(t)\, dt$ verwendet. Die erwartete Driftrate des diskontierten Aktienkursprozesses $(b(.) - r(.))$

[99] Vgl. *Korn/Korn* (1999), S. 62 f., insbesondere auch zum Beweis, der durch Anwendung der Itô-Formel zu führen ist.

entspricht einem höheren erwarteten Rückfluss der Aktienanlage gegenüber der risikolosen Anlagemöglichkeit, sofern $b(.) > r(.)$ gilt. Der im diskontierten Aktienkursprozess ausgedrückte Barwert der Aktienanlage wächst dann im Erwartungswert mit der Zeit. Die Abweichungen von diesem Erwartungswert werden wiederum durch die Brown'sche Bewegung $W(.)$, verstärkt oder vermindert durch den Wert des Prozesses $\sigma(.)$ und proportional zum aktuellen Niveau des Barwertes, bestimmt. Es kann nun gefragt werden, ob der diskontierte Aktienkursprozess dergestalt formuliert werden kann, dass der erwartete Anstieg des Prozesses nicht über eine Driftrate, sondern durch ein modifiziertes Wahrscheinlichkeitsmaß erfasst wird, bezüglich dessen der Prozess zum Martingal wird. Damit wären für Martingale abgeleitete Aussagen auf den betrachteten Prozess anwendbar. Der Martingaldarstellungssatz legt dabei nahe, nach einer Darstellung $d\left(\dfrac{S(t)}{S_0(t)}\right) = \tilde{\sigma}(t)\,dW_0(t)$ — mit geeignetem Prozess $\tilde{\sigma}(.)$ und einem an die Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ adaptierten Wiener-Prozess $\{W_0(t)\}_{t\in[0,T]}$ — zu suchen. Sollen die „Ausschläge" des Zufallselementes in der gleichen Größenordnung wie vor der Transformation bleiben und soll sich daher die Transformation lediglich auf die Drift des Prozesses beziehen, ist $\tilde{\sigma}(.) = \sigma(.)$ zu fordern[100]. Dann müsste $\sigma(t)\,dW_0(t) = (b(t) - r(t))\,dt + \sigma(t)\,dW(t)$ gelten. Führt man nun den Prozess $\tilde{\theta}(t) := \sigma^{-1}(t)(b(t) - r(t))\,(t \in [0,T])$ ein, so bleibt die Frage, ob durch $dW_0(t) := \sigma^{-1}(t)(b(t) - r(t))\,dt + dW(t)\,(t \in [0,T])$ ein Wiener-Prozess bezüglich der (ursprünglichen) Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ charakterisiert ist. Durch das Folgende erweist sich eine Transformation, für die diese Frage zu bejahen ist, auch für mehrdimensionale Prozesse als möglich.

Dazu werde ein Prozess $\{Z(t)\}_{t\in[0,T]}$ wie folgt definiert: Ausgehend von einem progressiv messbaren, d-dimensionalen Prozess $\{Y(t)\}_{t\in[0,T]}$ mit $\int_0^t ||Y(s)||^2\,ds < \infty$ $(t \in [0,T])$, P-fast sicher, und einem d-dimensionalen Wiener-Prozess sei der Prozess $Z(.)$ durch die folgende stochastische Integralgleichung:

$$Z_0(t) = 1 - \sum_{i=1}^{d} \int_0^t Z_0(s)Y_i(s)\,dW_i(s) \quad (t \in [0,T]) \tag{2.5}$$

gegeben. In Differentialschreibweise entspricht dies $dZ_0(t) = -Z_0(t)\;Y(t)'\;dW(t)$ mit der Anfangsbedingung $Z_0(0) = 1$. Die Lösung der Gl. (2.5) ist nach Satz 2.10 gegeben durch:

$$Z_0(t) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t ||Y(s)||^2\,ds - \int_0^t Y'(s)\,dW(s)} \quad (t \in [0,T]).$$

$Z_0(.)$ ist als Itô-Integral ein nicht negatives, stetiges, lokales Martingal. Nach Satz 2.5 ist $Z_0(.)$ folglich ein Super-Martingal. Ist $Z_0(.)$ darüber hinaus ein Martingal, dann gilt $E[Z_0(t)] = 1$ $(t \in [0,T])$[101]. Die Martingaleigenschaft

[100] Auf die Problematik des Grades der Identität braucht hier nicht eingegangen zu werden.

[101] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 191.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

wird im Weiteren benötigt, so dass hierfür zunächst noch eine hinreichende Bedingung hinsichtlich des Prozesses $Y(.)$ angegeben wird.

Erfüllt der Prozess $Y(.)$ für ein endliches, nicht negatives T die *Novikov-Bedingung*[102]:

$$E\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^T ||Y(s)||^2\,ds}\right] < \infty,$$

so ist der Prozess $Z_0(.)$ ein Martingal.

Wenn $Z_0(.)$ ein Martingal (mit $E[Z_0(t)] = 1,\ t \in [0,T]$) ist, dann kann hiermit ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß P_0 auf der Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, bezüglich welcher der Wiener-Prozess $\{W(t)\}_{t\in[0,T]}$ adaptiert ist, angegeben werden. Zunächst wird für beliebiges $T(\geq 0)$ definiert:

$$P_{0,T}(A) := E\left[1_A Z_0(T)\right], \quad \forall A \in \mathcal{F}_T.$$

Das für T definierte Wahrscheinlichkeitsmaß ist konsistent[103] in dem Sinne, dass gilt:

$$P_{0,T}(A) = P_{0,t}(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}_t,\ t \in [0,T],$$

so dass der Zeitindex wegfallen kann. Da $Z_0(.)$ ein Martingal ist, gilt für jeden Zeitpunkt t $(\in [0,T])$ folglich auch $dP_0(A) = Z_0(t)dP(A)$ $(A \in \mathcal{F}_t)$. Dies kann für $t = T$ ohne weiteres geschrieben werden, so dass $Z_0(T)$ der Radon-Nikodým-Ableitung $\frac{dP_0}{dP}$ entspricht. Es wird nun der Erwartungswertoperator bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes P_0 durch $E_0[.]$ gekennzeichnet. Mit dem Martingal $Z_0(.)$ und mit $0 \leq s \leq t \leq T$ gilt für eine $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariable Y, für die $E_0[|Y|] < \infty$ ist, die Regel von *Bayes*[104]:

$$E_0[Y \mid \mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z_0(s)} E[Y Z_0(t) \mid \mathcal{F}_s], \quad P-\ \text{bzw.}\ P_0 - \text{fast sicher.}$$

Die Gleichung gilt ebenfalls, wenn s und t Stoppzeiten sind, die die angegebene Voraussetzung erfüllen[105]. Nach Einführung des Prozesses $Z_0(.)$ kann zum Ausgangsproblem einer geeigneten Prozesstransformation der folgende Satz angegeben werden.

Satz 2.11 *Girsanov, Cameron/Martin*[106] *(Satz von Girsanov)*
Ist der durch Gl. (2.5) definierte Prozess $Z_0(.)$ ein Martingal und ist $W(.)$ ein d-dimensionaler Wiener-Prozess mit Brown'scher Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, dann ist der durch:

$$W_{0,i}(t) := W_i(t) + \int_0^t Y_i(s)\,ds, \quad 1 \leq i \leq d,\ t \in [0,T],$$

definierte Prozess $\{W_0(t)\}_{t\in[0,T]}$ ein d-dimensionaler Wiener-Prozess, welcher bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ adaptiert ist.

---

[102] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 198 f.
[103] Vgl. *Korn/Korn* (1999), S. 107.
[104] Vgl. zu Satz und Beweis *Karatzas/Shreve* (1991), S. 193.
[105] Vgl. mit Beweis *Korn/Korn* (1999), S. 108.
[106] Vgl. *Bingham/Kiesel* (2004), S. 198 f., *Duffie* (1996), S. 288 f., *Karatzas/Shreve* (1991), S. 190 ff.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Der Martingaldarstellungssatz (Satz 2.7) gilt bezüglich des neuen Wahrscheinlichkeitsmaßes P_0 analog, wobei es für das Weitere genügt, auf Prozesse im Integranden abzustellen, deren Komponenten der Prozessklasse $\mathcal{H}$, wie auch der den Prozess $Z_0(.)$ definierende, d-dimensionale Prozess $Y(.)$, angehören[107]. Zu beachten ist allerdings, dass $Z_0(.)$ ein Martingal ist.

Satz 2.12 *Martingaldarstellungssatz bezüglich P_0*[108]
Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.11 besitzt ein Prozess $\{M_0(t)\}_{t\in[0,T]}$, der bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes P_0 ein Martingal ist, die Darstellung:

$$M_0(t) = M_0(0) + \int_0^t \varphi'(s)\, dW_0(s), \quad 0 \le t \le T, \quad \textit{fast sicher,}$$

wobei $\varphi(.)$ ein progressiv messbarer, $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozess mit $\int_0^T ||\varphi(s)||^2\, ds < \infty$ ist.

Im Falle des bereits betrachteten diskontierten Aktienkursprozesses ist bei Anwendung des Satzes von *Girsanov* $Y(t) = \tilde{\theta}(t) = \frac{b(t)-r(t)}{\sigma(t)}$ $(t \in [0,T])$ zu setzen; dann gilt $(t \in [0,T])$:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{S(t)}{S_0(t)}\right) &= \frac{S(t)}{S_0(t)}\left((b(t)-r(t))\, dt + \sigma(t)\, dW(t)\right) \\ &= \frac{S(t)}{S_0(t)}\left((b(t)-r(t))\, dt + \sigma(t)\, dW_0(t) - (b(t)-r(t))\, dt\right) \\ &= \frac{S(t)}{S_0(t)}\sigma(t)\, dW_0(t). \end{aligned}$$

Der diskontierte Aktienkursprozess ist beim Wahrscheinlichkeitsmaß P_0, bezüglich welchem $W_0(.)$ ein adaptierter Wiener-Prozess ist, ein Martingal — wobei $\sigma(.) \in \mathcal{L}$ vorausgesetzt war.

Zum Ende dieses Abschnittes soll noch auf ein für die Herleitung optimaler Portfolios im Zeitablauf wichtiges Hilfsmittel eingegangen werden. Es handelt sich um die *stochastische Steuerung*, welche bei bestimmten Parameterprozessen die Ermittlung eines optimalen Steuerungsprozesses erlaubt. Die stochastische Steuerung beruht auf der Herleitung der *Hamilton-Jacobi-Bellman*-Gleichung, einer partiellen Differentialgleichung zur Bestimmung eines Steuerungsprozesses, der ein Kostenfunktional minimiert bzw. eine Gewinnfunktion maximiert. Das zugrunde liegende Problem und der Lösungsansatz sollen nunmehr dargestellt werden, wobei die Allgemeinheit bereits auf das für die weitere Verwendung notwendige Maß reduziert wird. Die Darstellung folgt *Korn/Korn* (1999), S. 259 ff. — nahezu identisch —, so dass auf die dort zu findenden Beweise verwiesen wird[109].

[107] Vgl. hierzu die Ergänzung zu Satz 2.7.
[108] Vgl. zu Satz und Beweis *Karatzas/Shreve* (1998), S. 24 f.
[109] Die *Hamilton-Jacobi-Bellman*-Gleichung wird auch in *Øksendal* (2003), S. 238 ff., hergeleitet. Vgl. zu einer ausführlichen Behandlung der stochastischen Steuerung mit allgemeineren Existenzbedingungen *Fleming/Rishel* (1975), insbesondere S. 155 ff.

Gegeben sei ein n-dimensionaler Itô-Prozess X_t ($t \in [0, T]$), basierend auf einem d-dimensionalen Wiener-Prozess W_t, mit:

$$dX_t = b(t, X_t, u_t)\, dt + \sigma(t, X_t, u_t)\, dW_t, \tag{2.6}$$

wobei für die Koeffizientenfunktionen gilt: $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ und $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n,d}$ sind progressiv messbar, stetig und für festes $u \in U$ in den ersten $n+1$ Argumenten (im Inneren des Definitionsbereichs) stetig differenzierbar; darüber hinaus gelte mit einer Konstanten k: $\|\frac{\partial b}{\partial t}\| + \|\frac{\partial b}{\partial X}\| \leq k$, $\|\frac{\partial \sigma}{\partial t}\| + \|\frac{\partial \sigma}{\partial X}\| \leq k$, $\|b(t, X, u)\| + \|\sigma(t, X, u)\| \leq k\,(1 + \|X\| + \|u\|)$[110]. u_t (bzw. $u(t)$) ist ein progressiv messbarer Prozess, für den gilt: $u_t \in U \subset \mathbb{R}^d$ ($t \in [0, T]$) (U abgeschlossen). Ferner muss mit u_t die stochastische Differentialgleichung (2.6) mit dem Ausgangswert(vektor) $X(0) = x$ eine eindeutige Lösung besitzen und es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ bzw. $t \in [0, T]$: $E\left[\int_0^T |u(s)|^k\, ds\right] < \infty$ und $E\left[\sup\limits_{s \in [t,T]} |X(s)|^k \mid \mathcal{F}_t,\, X(t) = \bar{x}\right] < \infty$, wobei der letzte Ausdruck den Erwartungswert des Supremums aus Sicht des Zeitpunktes t bei einem dann gegebenen Ausgangswert(vektor) $\bar{x}$ kennzeichnet; ein solcher Erwartungswert wird auch durch $E^{t,\bar{x}}[...]$ ohne den Bedingungsteil in den eckigen Klammern dargestellt.

Der Prozess $X(.)$ soll nur so lange einer Steuerung unterliegen, bis der Planungshorizont erreicht ist ($t = T$) oder der Prozess bereits zuvor außerhalb eines vorgegebenen, offenen Bereiches ($O \subset \mathbb{R}^n$, offene Menge) gerät. Abschluss und „Rand" von O werden durch $\bar{O}$ bzw. ∂O symbolisiert. Ist bspw. $X(.)$ ein Vermögensprozess, wie im nachfolgenden Abschnitt spezifiziert wird, dann könnte $O = \mathbb{R}_{++}$ sein. Danach würden nur (echt) positive Vermögen gesteuert; das Erreichen eines Vermögens von null würde zu einem Abbruch der Steuerung führen. Die Menge der zulässigen Steuerungen $u(.)$, die bei einem Anfangsvermögen x, welches sich im Steuerbereich O befindet, zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ starten, wird mit $A(t, x)$ gekennzeichnet. Mit $X(\bar{t}) = \bar{x}$ sei nun $\tau(\bar{t}, \bar{x}) := \inf\{t \geq \bar{t} \mid (t, X(t)) \notin [\bar{t}, T) \times O\}$ der aus Sicht von $\bar{t}$ zukünftige[111] Zeitpunkt, zu dem der gesteuerte Prozess $X(.)$ den Steuerungsbereich verlässt, dann wird folgendes Kostenfunktional betrachtet:

$$J(\bar{t}, \bar{x}, u(.)) = E^{\bar{t},\bar{x}}\left[\int\limits_{\bar{t}}^{\tau} L(s, X(s), u(s))\, ds + F(\tau, X(\tau))\right].$$

$L(.,.,.)$ und $F(.,.)$ sind einwertige, stetige Funktionen, die laufende bzw. finale, resp. Abschlusskosten repräsentieren und auf $[0, T] \times \bar{O} \times U$ bzw. $[0, T] \times \bar{O}$ für ein natürliches N und ein $k > 0$ folgende Bedingungen erfüllen: $|L(t, x, u)| \leq k\left(1 + |x|^N + |u|^N\right)$, $|F(t, x)| \leq k\left(1 + |x|^N\right)$. Die Steuerung dient damit der Lösung eines stochastischen Optimierungsproblems, bei

[110] Als Matrixnorm liegt die Spektralnorm zugrunde, d.h. es gilt $\|\sigma\| = \max_{i \in \{1,\dots,d\}} \sqrt{\lambda_i \sigma' \sigma}$, wobei λ_i ($i = 1, \dots, d$) die Eigenwerte der $d \times d$-Matrix $\sigma'\sigma$ beschreiben; vgl. *Büning/Naeve/Trenkler/Waldmann* (2000), S. 211.

[111] Dabei soll $\tau = \bar{t}$ nicht ausgeschlossen sein.

dem sowohl kontinuierliche, ggf. unmittelbar mit der Steuerungsmaßnahme selbst verbundene Kosten als auch solche, die beim Abbruch auftreten, berücksichtigt werden können, wobei $L(.,.,.) \equiv 0$ oder $F(.,.) \equiv 0$ jeweils möglich sind. Das *stochastische Steuerungsproblem* stellt sich nun wie folgt dar:

$$\min_{u(.)\in A(0,x)} J(0,x,u(.)).$$

Der sich bei kostenminimierender Steuerung ergebende Wert des Kostenfunktionals wird *Wertfunktion* genannt und stellt sich bei beliebigem Anfangsvermögen zu einem Zeitpunkt innerhalb des Planungszeitraumes $(t,x) \in [0,T) \times O$ dar als:

$$V(t,x) := \inf_{u(.)\in A(t,x)} J(t,x,u(.)).$$

Da die Optimierung anstelle von $L(.,.,.)$ und $F(.,.)$ auch mit $-L(.,.,.)$ bzw. $-F(.,.)$ durchgeführt werden kann, ist ein entsprechendes Maximierungsproblem in das beschriebene Minimierungsproblem überführbar; es wäre somit im Folgenden analog zu lösen. Eine Lösung des Minimierungsproblems kann nun über folgenden Ansatz gesucht werden. Hierzu wird der folgende Operator definiert:

$$A^u G(t,x) := G_t(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x,u) G_{X_i,X_j}(t,x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x,u) G_{X_i}(t,x),$$

wobei $G \in C^{1,2}(Q)$, $(t,x) \in Q$ mit $Q := [\bar{t},T) \times O$ sowie $a := \sigma\sigma'$ und $u \in U$. $C^{1,2}(Q)$ stehe für die Menge der Funktionen über Q, die im ersten Argument einmal, in den übrigen Argumenten zweimal stetig differenzierbar sind. Bezeichne $\partial Q := ([\bar{t},T) \times \partial O) \cup \left(\{T\} \times \bar{O}\right)$ den „Rand" des Steuerbereichs, so dass $\bar{Q} = Q \cup \partial Q$, dann gilt:

Satz 2.13 *Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung*[112]
Löst $G \in C^{1,2}(Q)$ auf $\bar{Q}$ stetig mit $|G(t,x)| \leq k\left(1+|x|^N\right)$ für $k > 0$ und natürliches N die Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)-Gleichung:

$$\begin{aligned} &\inf_{u\in U}\left(A^u G(t,x) + L(t,x,u)\right) = 0, && (t,x) \in Q,\\ &G(t,x) = F(t,x), && (t,x) \in \partial Q, \end{aligned}$$

und existiert für alle $(t,x) \in Q$ ein $u^\star(.) \in A(t,x)$ mit

$$u^\star(s) \in \arg\min_{u\in U}\left(A^u G\left(s, X^\star(s)\right) + L\left(s, X^\star(s), u\right)\right) \tag{2.7}$$

für alle $s \in [t, \tau(s, X^\star(s))]$ mit $X^\star(.)$ als dem gemäß Gl. (2.6) zu $u^\star(.)$ gehörenden Prozess, der gesteuert werden soll, dann ist:

$$G(t,x) = V(t,x) = J(t,x,u^\star(.)).$$

Findet man folglich eine Funktion $G(.,.)$, die die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung in der angegebenen Weise erfüllt, hat man zugleich die Wertfunktion zum Minimierungsproblem gefunden. Die optimale Steuerung, die letztlich

[112] Formulierung nach *Korn/Korn* (1999), S. 266 f.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

allerdings das „Optimierungsziel“ repräsentiert, ist eine Funktion der Funktion $G(.,.)$ und ihrer Ableitungen. Das Vorgehen zur Lösung des Optimierungsproblems setzt daran an und besteht zunächst darin, die optimale Steuerung in Abhängigkeit der Zeit und der Unbekannten G, G_t, G_X und G_{XX}[113] über die Bedingung (2.7) zu bestimmen und nach Einsetzen in die HJB-Gleichung die sich ergebende partielle Differentialgleichung (kurz PDE für *partial differential equation*), wenn möglich, zu lösen[114].

Damit ist die stochastische Steuerung, soweit hier benötigt, eingeführt. Im Folgenden soll es darum gehen, wie auf Basis natürlicher stetiger Prozesse künstliche generiert werden. Konkret soll auf Basis einer bestimmten Zahl von am Markt gehandelten Aktiengattungen und einer risikolosen Anlage, also von natürlichen Prozessen, beschrieben werden, wie sich ein (künstlicher) Vermögensprozess in Abhängigkeit einer dem aktuellen Informationsstand angepassten, also ebenfalls als Prozess zu formulierenden Handelsstrategie ergibt. Der Vermögensprozess wird folglich durch Transaktionen auf dem vorhandenen (Kapital-)Markt gestaltet, so dass zunächst der Markt selbst sowie der Handel auf ihm einzuführen sind. Es liegt allgemein eine zeitkontinuierliche Modellierung zugrunde, wie sie durch die Beschreibung des Aktienkursprozesses bereits vorbereitet wurde.

2.1.2 Unterstellte Marktgestalt und Vermögensprozess

Die Spezifikation der Marktgestalt betrifft zunächst die Konkretisierung der Handelsobjekte und des Informationsstandes bzw. der Informationsentwicklung, die mit der „am Markt befindlichen“, durch die Handelsobjekte bestimmten Unsicherheit verbunden ist. Die Möglichkeiten des Handels auf dem Markt werden durch die Festlegung eines Handelsrahmens beschrieben. Für diesen wird zwischen einem allgemeinen und einem vorläufigen Prämissensatz unterschieden. Während der allgemeine Handelsrahmen für die Untersuchung eines unvollständigen Kapitalmarktes beibehalten wird, wird im vorläufigen Handelsrahmen speziell ein vollständiger Kapitalmarkt unterstellt. Hinsichtlich der sowohl im allgemeinen wie im vorläufigen Handelsrahmen genannten Prämissen der Arbitragefreiheit und der Vollständigkeit sind formale Präzisierungen vorzunehmen, für die der Begriff eines (zulässigen) Vermögensprozesses einzuführen ist. Im Anschluss an den Prämissenkanon werden deshalb Vermögensprozesse dargestellt sowie arbitragefreie und vollständige Kapitalmärkte formal charakterisiert. Generell erfolgt eine kontinuierliche Modellierung der Unsicherheit, welche durch Wiener-Prozesse generiert wird.

[113] Die mögliche Mehrdimensionalität soll dabei in der Schreibweise verkürzend berücksichtigt sein.
[114] Vgl. diesbezüglich und zu Anmerkungen hinsichtlich der Existenz einer Lösung *Korn/Korn* (1999), S. 270 f.

Allgemeine Charakteristika des im Folgenden zugrunde liegenden *Marktes* $\mathcal{M}^{vst}$ sollen wie folgt gegeben sein[115]:

1. *Informationsstand und -entwicklung*:
   Ausgehend von einem *endlichen Planungszeitraum* T und einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist die Informationsentwicklung gegeben durch die Brown'sche Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ zum d-dimensionalen Wiener-Prozess $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$, dessen Komponenten stochastisch unabhängig sind. Der Informationsstand und das Wissen um die Stochastik seiner weiteren Entwicklung sind *allen Marktteilnehmern kostenfrei zugänglich.*

2. *Handelsobjekte und ihre Preise*: Es existieren[116]:
   — ein *risikoloser Bond* $S_0(.)$, dessen Wertentwicklung über den kontinuierlichen Prozess des risikolosen Zinssatzes $r(.)$ durch die stochastische Differentialgleichung $dS_0(t) = S_0(t)r(t)\,dt$ beschrieben wird, so dass $S_0(t) = S_0(0)e^{\int_0^t r(s)\,ds}$ gilt ($t \in [0,T]$). Aus Gründen einer vereinfachten Notation wird dabei von $S_0(0) = 1$ ausgegangen. Risikolose Anlagen werden durch den Kauf, Kreditaufnahmen durch Verkauf bzw. Emission des Bonds abgebildet. Der risikolose Zinssatz entspricht folglich zugleich einem Haben- und einem Soll-Zinssatz; ferner
   — *risikobehaftete Anlagen*, im Weiteren auch als Aktien bezeichnet, deren Wert sich gemäß:

$$\begin{aligned} dS_i(t) &= S_i(t)\left(b_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(s)\,dW_j(s)\right) \\ \Leftrightarrow S_i(t) &= S_i(0)e^{\int_0^t (b_i(s)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}^2(s))\,ds+\sum_{j=1}^{d}\int_0^t \sigma_{ij}(s)\,dW_j(s)} \\ & \quad (i = 1,\dots,n;\ 0 \le t \le T) \end{aligned}$$

   entwickelt und die einen kontinuierlichen Dividendenstrom in Höhe von „$S_i(t)\delta_i(t)\,dt$“ mit dem n-dimensionalen Prozess der Dividendenraten $\delta(.) = (\delta_i(.))_{i=1,\dots,n}$ aufweisen. Der n-dimensionale Vektor der Driftraten $b(.) = (b_i(.))_{i=1,\dots,n}$ sowie der $n \times d$-wertige Volatilitätsprozess $\sigma(.) = (\sigma_{ij}(.))_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,d}}$ seien ebenso wie die Prozesse $r(.)$ und $\delta(.)$ progressiv messbar. Zudem erfüllen sie $\int_0^T |r(t)|\,dt < \infty$, $\int_0^T ||b(t)||\,dt < \infty$, $\int_0^T ||\delta(t)||\,dt < \infty$ und $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \int_0^T \sigma_{ij}^2(t)\,dt < \infty$, jeweils P-fast sicher. Hinsichtlich der Wertebereiche wird vorausgesetzt: $\delta_i(t,\omega)$, $b_i(t,\omega) : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$; $r(t,\omega)$, $\sigma_{ij}(t,\omega) : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ $(i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,d)$[117]; $\sigma_{i.}(.)$ steht kurz für den i-ten Zeilenvektor von $\sigma(.)$. Ferner ist der Vektor der Aktienpreise am Planungsbeginn $S'(0) = (S_1(0),\dots,S_n(0))$

[115] Vgl. zur formalen Spezifikation in den ersten beiden Punkten *Karatzas/Shreve* (1998), S. 4 f.

[116] Für die weitere Betrachtung wird der Zeitparameter des Kursprozesses zu einem Wertpapier des Kapitalmarktes nicht mehr als Subskript verwendet. Dieses dient vielmehr der Differenzierung von Prozessen.

[117] Das zweite Argument (ω) wird wiederum zur Vereinfachung der Notation nicht aufgeführt.

in jeder Komponente strikt positiv ($S(0) > 0$). Die Individuen sind *Preisnehmer*, d.h. die Marktteilnehmer haben (durch den Handel o.a.) keinen Einfluss auf die Wertpapierpreise.

3. Allgemeiner *Handelsrahmen*:
   Es findet ein *permanenter Handel* statt. Die Wertpapiere sind *beliebig teilbar*; ihre Preise können beliebige nicht negative, reelle Werte annehmen. Es gibt *keine Transaktionskosten*. *Arbitragemöglichkeiten* sind *ausgeschlossen*. (Die formale Beschreibung einer Arbitragemöglichkeit erfolgt im Zusammenhang der nachfolgenden Darstellung von Vermögensprozessen[118].)

4. (Vorläufige) Erweiterung des *Handelsrahmens*:
   Der betrachtete Kapitalmarkt ist *vollständig*; d.h. insbesondere, dass die Wertpapiere (Aktien, Bond) in *unbegrenzter Höhe handelbar* und *Leerverkäufe erlaubt* sind[119].

5. *Marktteilnehmer*:
   Als Marktteilnehmer treten vornehmlich natürliche Personen (*Individuen*) auf. Die Individuen werden als *nutzenmaxierend* unterstellt. U.U. ist jedoch eine Unterscheidung zwischen Marktteilnehmern in Gestalt natürlicher Personen und Unternehmen nicht nötig. Die bisher beschriebene Marktgestalt gilt dann für Individuen und Unternehmen gleichermaßen.

Der Prämissenkanon bedingt, dass der betrachtete Markt $\mathcal{M}^{vst}$ ein vollkommener Kapitalmarkt ist[120]. Allerdings wird die Annahme eines keinen Restriktionen unterliegenden Handels bei der Betrachtung unvollständiger Kapitalmärkte aufgegeben werden; insofern ist die „Erweiterung des Handelsrahmens“ als „vorläufig“ zu betrachten. Eine Operationalisierung des nutzenmaximierenden Verhaltens der natürlichen Personen erfolgt später.

Auf dem Markt $\mathcal{M}^{vst}$ werden die $n+1$ Prozesse $\{\varphi_i(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ und $\{\pi_i(t)\}_{0 \leq t \leq T} := \{\varphi_i(t)\ S_i(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) betrachtet. Es werden damit die n-wertigen Prozesse $\varphi(.) = (\varphi_1(.), \ldots, \varphi_n(.))'$ und $\pi(.) = (\pi_1(.), \ldots, \pi_n(.))'$ (für fixes t als Spaltenvektoren) gebildet, so dass jeweils P-fast sicher gilt[121]:

$$\int_0^T |\pi_0(t) + \pi'(t)\mathbf{1}_n||r(t)|\,dt \quad < \quad \infty, \tag{2.8}$$

$$\int_0^T |\pi'(t)(b(t) + \delta(t) - r(t)\mathbf{1}_n)|\,dt \quad < \quad \infty, \tag{2.9}$$

[118] Die explizite Formulierung der Arbitragefreiheit erfolgt affirmativ, da sie zudem der Definition eines vollständigen Kapitalmarktes zugrunde liegen wird.

[119] Darüber hinaus müssen in einer noch zu spezifizierenden Weise „genügend geeignete“ Wertpapiere vorhanden sein, so dass sämtliche am Markt relevanten Risiken dadurch handelbar werden.

[120] Vgl. bspw. *Franke/Hax* (2004), S. 153, 343 f., sowie auch *Neus* (2001), S. 332. Anzumerken ist, dass aufgrund des allgemeinen Informationsstandes homogene Erwartungen der Marktteilnehmer bestehen. Die Existenz bzw. Nicht-Existenz von Steuern soll später behandelt werden.

[121] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 6 f.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

$$\int_0^T ||\sigma'(t)\pi(t)||^2 \, dt \quad < \quad \infty. \tag{2.10}$$

Die Prozesse $\varphi(.)$ und $\pi(.)$ sollen progressiv messbar sein. $\mathbf{1}_n$ steht für den n-dimensionalen Vektor, dessen Komponenten sämtlich den Wert 1 aufweisen; das Subskript zur Kennzeichnung der Dimension des Vektors kann weggelassen sein, wenn sich diese aus dem Zusammenhang ergibt. (Analog wird im Folgenden der Vektor $\mathbf{0}_{(n)}$ verwendet.) Die Prozesse $\varphi(.)$ und $\pi(.)$ repräsentieren die Zusammensetzung des Portfolios des betrachteten Investors für den Zeitpunkt t; $\varphi(.)$ wird als *Handels-Prozess*, $\pi(.)$ als *Portfolio-Prozess (in Absolutbeträgen)* bezeichnet. Die Komponente $\varphi_i(.)\,(i = 0, 1, \ldots, n)$ des Vektors $(\varphi_0(.), \varphi_1(.), \ldots, \varphi_n(.))'$ gibt die Anzahl der Grundeinheiten — $S_0(.)$ für den Bond und $S_i(.)$ für die Aktien — des Wertpapieres $i\,(\in \{0, 1, \ldots, n\})$ an, mit der dieses im Portfolio gehalten wird. $\pi_i(.)$ steht analog für den (Absolut-)Betrag, der in die Wertpapiergattung investiert ist. Vorläufig können die einzelnen Prozesse beliebige reelle Werte annehmen, wobei $\varphi_0(t) < 0$ bzw. $\pi_0(t) < 0$ einen Kreditbestand im Zeitpunkt t und $\varphi_i(t) < 0$ bzw. $\pi_i(t) < 0$ einen Bestand an leerverkauften Aktien der Gattung $i \in \{1, \ldots, n\}$ kennzeichnen. Im Mittelpunkt der folgenden Betrachtungen werden oft Portfolio-Prozesse in Absolutbeträgen bzw. daraus im Folgenden abgeleitete Portfolio-Prozesse in Relativbeträgen stehen, ohne dass die Unterscheidung zu Handels-Prozessen jedoch von Relevanz wäre. Bei der Formulierung von Handelsrestriktionen im Rahmen der Behandlung unvollständiger Kapitalmärkte erlangt die Differenzierung Bedeutung.

Da ein Portfolio-Prozess das Investitionsverhalten eines Investors widerspiegelt, hängt von der Wahl dieses Prozesses unmittelbar dessen Vermögensentwicklung ab. Die Entwicklung des Vermögens wird durch einen Vermögensprozess beschrieben. Hierfür wird zunächst ein *kumulierter Gewinn/Verlust-Prozess* $G(t)$ $(t \in [0, T])$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} dG(t) \quad &:= \quad \underbrace{\pi_0(t)r(t)\,dt}_{=:\,A} + \underbrace{\varphi'(t)\,dS(t)}_{=:\,B} + \underbrace{\pi'(t)\delta(t)\,dt}_{=:\,C} \\ &= \quad \pi_0(t)r(t)\,dt + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)S_i(t)\left((b_i(t) + \delta_i(t))\,dt + \sigma_{i.}(t)\,dW(t)\right) \\ &= \quad \pi_0(t)r(t)\,dt + \pi'(t)\left((b(t) + \delta(t))\,dt + \sigma(t)\,dW(t)\right). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Der Term A beschreibt den Vermögenszuwachs, der aus risikoloser Anlage $(\pi_0(t) \geq 0)$ bzw. aus Verschuldung $(\pi_0(t) < 0)$ erwächst. Der Ausdruck B steht für den Zuwachs, der aus Aktienkursänderungen resultiert, und C beschreibt den Zu- bzw. Abfluss aus Dividendenerträgen, die jeweils proportional zu dem in eine Aktiengattung investierten Betrag sind; bei einem Leerverkauf in der Aktie i wirkt die Dividende als Vermögensabfluss, sofern $\delta_i(.) > 0$.

Zur Veranschaulichung des dargestellten kumulierten Gewinn/Verlust-Prozesses für den kontinuierlichen Fall soll der Prozess noch für eine zeitdiskrete Situation beschrieben werden. Zu beachten ist dabei insbesondere, dass das stochastische Integral über die linken Intervallgrenzen als Itô-Integral definiert wurde. Die Beschreibung setzt an den am Ende eines jeden Teilintervalls entstandenen Gewinn bzw. Verlust an, der bei der Bestimmung von $G_{diskr.}(t)$ zu kumulieren ist. Für einen diskretisierten Planungszeitraum $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T$ kann der Gewinn/Verlust des Zeitpunktes t_k gegenüber dem vorausgehenden Zeitpunkt $t_{k-1}\,(k = 1, \ldots, m)$ als folgende Differenz dargestellt werden:

$$\begin{aligned} &G_{diskr.}(t_k) - G_{diskr.}(t_{k-1}) = \\ &\qquad \varphi_0(t_{k-1})(S_0(t_k) - S_0(t_{k-1})) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t_{k-1})\,(S_i(t_k) - S_i(t_{k-1})) \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{n} \delta_i(t_{k-1}) S_i(t_{k-1}). \end{aligned}$$

Der Betrag $D := \varphi_0(t_{k-1})S_0(t_k) + \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(t_{k-1})S_i(t_k) + \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i(t_{k-1})S_i(t_{k-1})$ entspricht dem aus der Portfolio-Bildung in t_{k-1} nunmehr für den Zeitpunkt t_k zur Verfügung stehenden Betrag, welcher zusammen mit einem ggf. auftretenden exogenen Zu- oder Abfluss E_{t_k} das im Zeitpunkt t_k für die Neustrukturierung des Portfolios vorhandene Vermögen repräsentiert. Die neue Struktur des Portfolios spiegelt sich im Handelsprozess $\varphi(t_k)$ wider, so dass gelten muss: $D + E_{t_k} = \varphi_0(t_k)S_0(t_k) + \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(t_k)S_i(t_k)$. Gilt für jeden Zeitpunkt $t_k\,(k = 1, \ldots, m)$:

$$\begin{aligned} G_{diskr.}(t_k) &= \sum_{j=1}^{k} (G_{diskr.}(t_j) - G_{diskr.}(t_{j-1})) = \varphi_0(t_k)S_0(t_k) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t_k)S_i(t_k) \\ &= \pi_0(t_k) + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t_k) \end{aligned}$$

sowie $G_{diskr.}(0) = \pi_0(0) + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(0) = 0$, so dass das zu einem beliebigen Zeitpunkt vorhandene Vermögen ausschließlich durch bis dahin realisierte Gewinne und Verluste zustande gekommen ist — d.h., dass $E_{t_k} = 0$, $k = 0, 1, \ldots, m$ ist —, dann heißt der Portfolio-Prozess $(\pi_0(.), \pi'(.))'$ selbstfinanzierend. Dies wird für den kontinuierlichen Fall wie folgt formuliert:

Ein (kontinuierlicher) Portfolio-Prozess $(\pi_0(.), \pi'(.))'$ heißt *selbst-finanzierend*, falls

$$G(t) = \pi_0(t) + \pi'(t)\mathbf{1}_n, \quad \forall t \in [0, T],$$

und $G(0) = \pi_0(0) + \pi'(0)\mathbf{1}_n = 0$, P-fast sicher. Hierbei gilt $G(t) = \int_0^t dG(s)\,(t \in [0, T])$ mit $dG(s)$ gemäß Gl. (2.11).

Das tatsächliche Vermögen eines Investors zum Zeitpunkt t wird üblicherweise nicht ausschließlich durch die Anlage-/Verschuldungspolitik, sondern auch durch exogene Zahlungen beeinflusst. Als solche sollen im Weiteren ein Anfangsvermögen $x\,(\geq 0)$ als exogene Einzahlung im Zeitpunkt $t = 0$ sowie ein kontinuierlicher, von der Umweltentwicklung möglicherweise abhängiger Konsumprozess $c(t,\omega)$, kurz $c(t)$ ($t \in [0,T]$), eingeführt werden. Damit ist ein Vermögensprozess $X(.)$ definierbar.

Ein *Konsumprozess* $\{c(t)\}_{t\in[0,T]}$ ist ein $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$-progressiv messbarer, nicht negativer, reellwertiger Prozess mit $\int_0^t c(s)\,ds < \infty$, fast sicher[122]; darüber hinaus wird $E_0\left[\int_0^t c(s)\,ds\right] < \infty$ vorausgesetzt. Bei gegebenem Anfangsvermögen $x\,(\geq 0)$ und für einen Konsumprozess $c(.)$ stellt sich der *Vermögensprozess* $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ dar als:

$$X(t) = x - \int_0^t c(s)\,ds + G(t), \quad t \in [0,T], \tag{2.12}$$

wobei $G(.)$ den kumulierten Gewinn/Verlust-Prozess darstellt, der sich aus dem Portfolio-Prozess $(\pi_0(.), \pi'(.))'$ ergibt. Der dergestalt definierte Vermögensprozess ist stetig bei den im Weiteren gewählten Portfolio-Prozessen. Bezeichnet $\Gamma(.)$ allgemein einen Einkommensprozess mit geeigneten Eigenschaften, der für die hier anzustellenden Betrachtungen die Gestalt $\Gamma(t) = x - \int_0^t c(s)\,ds\,(t \in [0,T])$ annimmt, dann heißt der Portfolio-Prozess $(\pi_0(.), \pi'(.))'$ $\Gamma(.)$-*finanziert*, wenn gilt:

$$X(t) = \pi_0(t) + \pi'(t)\mathbf{1}_n, \quad t \in [0,T]. \tag{2.13}$$

Zur Kennzeichnung der Abhängigkeit des Vermögensprozesses von Anfangsvermögen, Konsumprozess und Portfolio-Prozess wird ggf. $X^{x,c,\pi}(.)$ geschrieben. Da sich $\pi_0(.)$ über Gl. (2.13) aus $X(.)$ und $\pi(.)$ ergibt, steht $\pi(.)$ allein auch stellvertretend für den (gesamten) Portfolio-Prozess[123]. Mit Hilfe von Gl. (2.11) kann aus Gl. (2.12) der Vermögensprozess in Differentialform wie folgt angegeben werden:

$$\begin{aligned} dX(t) &= -c(t)\,dt + dG(t) \\ &= -c(t)\,dt + \pi_0(t)r(t)\,dt \qquad (2.14)\\ &\quad + \pi'(t)\left((b(t)+\delta(t))\,dt + \sigma(t)\,dW(t)\right). \qquad (2.15) \end{aligned}$$

Damit lässt sich der diskontierte Vermögensprozess $\frac{X(t)}{S_0(t)}$ ($t \in [0,T]$) beschreiben, der für die weitere Betrachtung von besonderem Interesse ist. Da $d\left(\frac{1}{S_0(t)}\right) = -\frac{1}{S_0(t)} r(t)\,dt$[124] und $X(t) = \pi_0(t) + \pi'(t)\mathbf{1}_n$ ($t \in [0,T]$) gelten, ist für $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{X(t)}{S_0(t)}\right) &= \frac{1}{S_0(t)}\,dX(t) + X(t)\,d\left(\frac{1}{S_0(t)}\right) + 0 \\ &= -\frac{c(t)}{S_0(t)}\,dt + \frac{1}{S_0(t)}\pi'(t) \\ &\quad \left((b(t)+\delta(t)-r(t)\mathbf{1}_n)\,dt + \sigma(t)\,dW(t)\right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

[122] Sofern der Bezug zum relevanten Wahrscheinlichkeitsmaß unmittelbar hergestellt werden kann, wird ggf. auf dessen Angabe verzichtet.

[123] Es wird hierbei die Schreibweise von *Karatzas/Shreve* (1998), S. 11, übernommen.

[124] Vgl. 53.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Dies ergibt mit $\frac{X(0)}{S_0(0)} = x$ die folgende Darstellung für den diskontierten Vermögensprozess ($t \in [0,T]$):

$$\frac{X(t)}{S_0(t)} = x - \int_0^t \frac{c(s)}{S_0(s)}\, ds + \int_0^t \frac{1}{S_0(s)} \pi'(s)(b(s) + \delta(s) - r(s)\mathbf{1}_n)\, ds + \int_0^t \frac{1}{S_0(s)} \pi'(s)\sigma(s)\, dW(s). \tag{2.17}$$

Mit $x = 0$ und $c(.) \equiv 0$ ist der diskontierte kumulierte Gewinn/Verlustprozess daraus ableitbar als ($t \in [0,T]$):

$$\frac{X^{0,0,\pi}(t)}{S_0(t)} = \frac{G(t)}{S_0(t)} = \int_0^t \frac{1}{S_0(s)} \pi'(s)(b(s) + \delta(s) - r(s)\mathbf{1}_n)\, ds + \int_0^t \frac{1}{S_0(s)} \pi'(s)\sigma(s)\, dW(s). \tag{2.18}$$

Vor dem Hintergrund, dass als exogener Zahlungsstrom während des Planungszeitraumes lediglich ein Vermögensabfluss für den Konsum des Investors stattfindet und ein zukünftiger Konsum nicht von einem Dritten geschenkt wird, ist ein negatives Vermögen nicht möglich[125]. Ein Portfolio- und Konsum-Prozess soll deshalb nur dann zulässig sein, wenn der zugehörige Vermögensprozess nicht negativ wird. Insbesondere sind somit auch nur solche Portfolio-Prozesse zulässig, bei denen der kumulierte Gewinn/Verlust-Prozess nach unten beschränkt ist[126]. Es wird somit für ein Konsum-/Portfolio-Prozesspaar $(c(.), \pi(.))$ definiert:

$$(c(t), \pi(t)) \quad \textit{zulässig} \quad \Leftrightarrow \quad X^{x,c,\pi}(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0,T], \text{fast sicher.}$$

Im Folgenden werden nur zulässige Konsum-/Portfolio-Prozesspaare betrachtet bzw. für den kumulierten Gewinn/Verlust-Prozess nur zulässige Portfolio-Prozesse, welche sich auf den zugrunde liegenden Vermögensprozess beziehen. Für ein zum Anfangsvermögen $x\,(\geq 0)$ zulässiges Konsum-/Portfolio-Prozesspaar $(c(.), \pi(.))$ wird $(c(.), \pi(.)) \in \mathcal{A}(x)$ geschrieben. Falls für einen Zeitpunkt $\bar{t}$ $X(\bar{t}) = 0$ gilt, muss auch $c(t) = 0$ ($t \in [\bar{t}, T]$) (fast sicher) gelten.

Anstelle des Portfolio-Prozesses in Absolutbeträgen wird mit Bezug auf den Vermögensprozess im Weiteren häufig auch der *Portfolio-Prozess in Relativbeträgen* $\{p(t)\}_{t\in[0,T]}$ verwendet, der auch als *Prozess der Portfolioanteile*, kurz

[125] Vermögensprozesse werden später auch zur Beurteilung von (bedingten) Zahlungen herangezogen, welche auch negativ sein können. Dann ist die Nicht-Negativitätsbedingung des Vermögensprozesses insofern nicht hinderlich, als der Gegenwartswert der negativen Zahlung als negativer Wert eines vorzeichenverkehrten Rückflusses betrachtet und in dieser Hinsicht mit einem nicht-negativen Verschuldungsprozess gerechnet werden kann.

[126] Dies entspricht der Bedingung zur Vermeidung einer so genannten „doubling strategy“, bei der aus „nichts“ ein beliebiges positives Endvermögen mit Wahrscheinlichkeit eins erzeugbar ist; vgl. hierzu *Karatzas/Shreve* (1998), S. 8 ff., sowie *Duffie* (1996), S. 103 f.

Anteilsprozess, bezeichnet wird. Dieser ist wie folgt gegeben:

$$p(t) := \begin{cases} \frac{1}{X(t)}\pi(t); & \text{für } 0 \leq t < \tau_X, \\ 1; & \text{für } \tau_X \leq t \leq T. \end{cases} \tag{2.19}$$

Dabei ist $\tau_X := \inf\{t \in [0,T] \mid X(t) = 0\}$ eine Stoppzeit mit $\tau(\omega) := \infty$, wenn $X(t,\omega) > 0,\ \forall t \in [0,T]$. Dadurch gelten die Integrierbarkeitsbedingungen, die an den Portfolio-Prozess in Absolutbeträgen gestellt wurden, insbesondere Gl. (2.10)[127]. $\pi(.)$ und $p(.)$ werden beide im Weiteren auch kurz *Portfolio-Prozesse* genannt. Die Festlegung des Wertes für $X(.) = 0$ ist willkürlich; bei nicht vorhandenem Vermögen wird bei einem beliebigen (endlichen) Wert für $p(.)$ stets der Absolutbetrag von null investiert.

Es ist nahe liegend zu fordern, dass die Portfolio-Prozesse zusammen mit den den Handelsobjekten zugrunde liegenden, natürlichen Prozessen so gestaltet sein müssen, dass auf dem Markt $\mathcal{M}^{vst}$ keine Arbitrage möglich ist. Die Bedingung eines arbitragefreien Marktes kann über selbst-finanzierende Portfolio-Prozesse (bzw. Handels-Prozesse) folgendermaßen formuliert werden:

Ein Markt $\mathcal{M}^{vst}$ ist *arbitragefrei*, wenn es keinen selbst-finanzierenden Portfolio-Prozess $(\pi_0(.), \pi'(.))'$ gibt, so dass gilt[128]:

$$P(G(T) \geq 0) = 1 \text{ und } P(G(T) > 0) > 0,$$

wobei $G(0) = 0$, P-fast sicher. Eine Verletzung dieser Bedingung würde bedeuten, dass allein durch Transaktionen am Kapitalmarkt, d.h. ohne eigenen Kapitaleinsatz, ein positives Endvermögen in Umweltzuständen mit (insgesamt) positiver Eintrittswahrscheinlichkeit erzielbar wäre, ohne dass (in anderen Umweltzuständen mit positiver Eintrittswahrscheinlichkeit) Verluste in Kauf zu nehmen wären. Dementsprechend könnten für den betrachteten Markt $\mathcal{M}^{vst}$ Portfolio-Prozesse (bzw. Handels-Prozesse) ausgeschlossen werden, die eine solche Arbitrage-Möglichkeit beinhalten. Es würde sich jedoch nicht als sinnvoll erweisen, die Menge der Handels-Prozesse einzuschränken, soweit es sich zumindest um zulässige handelt. Die Arbitragefreiheit des Marktes sollte demgegenüber durch eine „austarierte“ Parameterkonstellation der Handelsobjekte sichergestellt werden, aufgrund derer mit dem grundsätzlich erlaubten Handel keine risikolosen Gewinne erzielt werden können. Eine hinreichende Bedingung hierfür ergibt sich aus dem Folgenden.

[127] Vgl. hierzu mit Beweis *Karatzas/Shreve* (1998), S. 263 ff.

[128] Vgl. *Bingham/Kiesel* (2004), S. 106, *Karatzas/Shreve* (1998), S. 11, unter Einbeziehung eines Konsumprozesses auch *Korn/Korn* (1999), S. 97, und bei möglichem negativen Anfangsvermögen *Dothan* (1990), S. 299.

Satz 2.14 *Existenz eines Risiko-Marktpreisprozesses*[129]
Gibt es einen progressiv messbaren, d-dimensionalen Prozess $\{\theta(t)\}_{t\in[0,T]}$, *für den (fast immer) gilt:*

$$b(t)+\delta(t)-r(t)\mathbf{1}_n \;=\; \sigma(t)\theta(t), \quad P\text{-fast sicher,} \tag{2.20}$$

$$\int_0^T ||\theta(s)||^2\,ds \;<\; \infty, \quad P\text{-fast sicher,} \tag{2.21}$$

sowie

$$E\left[e^{-\int_0^T \theta'(s)\,dW(s)-\frac{1}{2}\int_0^T ||\theta(s)||^2\,ds}\right]=1, \tag{2.22}$$

dann ist der Markt $\mathcal{M}^{vst}$ *arbitragefrei.* $\theta(.)$ *heißt (d-dimensionaler) Risiko-Marktpreisprozess.*

Umgekehrt existiert auf einem arbitragefreien Markt $\mathcal{M}^{vst}$ *stets ein Prozess* $\theta(.)$, *der Gl. (2.20) erfüllt.*

Beweis: zum ersten Teil[130]
Nach dem Satz von *Girsanov* (Satz 2.11) kann mit $\theta(.)$, wie angegeben, der d-dimensionale Wiener-Prozess $W_0(t)$ definiert werden als:

$$W_0(t) := W(t)+\int_0^t \theta(s)\,ds, \quad t\in[0,T]. \tag{2.23}$$

Mit $Z_0(T) = e^{-\int_0^T \theta'(s)\,dW(s)-\frac{1}{2}\int_0^T ||\theta(s)||^2\,ds}$ ist das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß gegeben durch $P_0(A)=E\left[1_A Z(T)\right]$ $(A\in\mathcal{F}_T)$. Dann nimmt der diskontierte kumulierte Gewinn/Verlust-Prozess nach Gl. (2.24) die Gestalt:

$$M_0^\pi(t) \;:=\; \frac{G(t)}{S_0(t)} = \int_0^t \frac{1}{S_0(s)}\pi'(s)\sigma(s)\,dW_0(s),\; t\in[0,T], \tag{2.24}$$

an. Da $G(.)$ für zulässige Portfolio-Prozesse nach unten beschränkt ist, gilt dies auch für den diskontierten Prozess $\frac{G(.)}{S_0(.)}$. Aus Fatou's Lemma bzw. Satz 2.5 ergibt sich dann, dass die rechte Seite von Gl. (2.24) ein Super-Martingal ist. Somit gilt: $E\left[\frac{G(t)}{S_0(t)}\right] \le \frac{G(0)}{S_0(0)} = 0\,(t\in[0,T])$. Falls $G(T)\ge 0$, P-fast sicher, sein soll, muss also $G(T)=0$, P-fast sicher, gelten. Zur umgekehrten Beweisrichtung siehe *Karatzas/Shreve* (1998), S. 12-14. □

Eine hinreichende Bedingung dafür, dass $Z_0(.)$ ein Martingal ist, besteht darin, dass $\theta(.)$ die *Novikov*-Bedingung $\left(E\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^T ||\theta(s)||^2\,ds}\right]<\infty\right)$ erfüllt[131]. Ist der Portfolio-Prozess $\pi(.)$ in diesem Fall, wobei speziell

[129] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 12, 14 f. Vgl. zur Aussage auch *Harrison/Kreps* (1979), S. 395 ff.
[130] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 14 f.
[131] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 17. Zur *Novikov*-Bedingung vgl. auch S. 55.

$E\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \int_0^T \sigma_{ij}^2(s)\,ds\right] < \infty$ unterstellt wird, von der Gestalt, dass $M_0^\pi(.)$ ein Martingal ist, dann heißt der Portfolio-Prozess *Martingal erzeugend*, wobei dies den Prozessvektor $\pi(.)$ im engeren Sinne und im weiteren Sinne für $(\pi_0(.), \pi'(.))$ umfasst.

Anmerkung 2.3
Auf einem arbitragefreien Markt kann $\theta(t)$ wie folgt eindeutig gewählt werden: Mit $\mathcal{K}(\sigma(t)) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sigma(t)x = \mathbf{0}_n\}$ und $\mathcal{K}^\perp(\sigma(t)) := \{y \in \mathbb{R}^d \mid y'x = 0, \forall x \in \mathcal{K}(\sigma(t))\}$ gibt es, fast sicher, genau ein $\theta(t)$, das Gl. (2.20) erfüllt und für das

$$\theta(t) \in \mathcal{K}^\perp(\sigma(t)), \quad \textit{fast sicher,} \tag{2.25}$$

und fast immer gilt[132]*. Ist $\{\tilde{\theta}(t)\}_{t\in[0,T]}$ ein Prozess, der Gl. (2.20) i.o.S. erfüllt, dann ist $\theta(t) = proj_{\mathcal{K}^\perp(\sigma(t))}\tilde{\theta}(t)$ $(t \in [0,T])$ ein Prozess, der zudem die Bedingung (2.25) erfüllt. Mit Hilfe dieses im positiven Maß eindeutigen Prozesses $\theta(.)$ wird nun ein Kapitalmarkt spezifiziert.*

Ein Kapitalmarkt heißt *standardisiert*[133], wenn

- er arbitragefrei ist,
- die Anzahl der risikobehafteten Anlagen (Aktien) n nicht größer als die Dimension d des zugrunde liegenden Wiener-Prozesses ist $(n \leq d)$ sowie
- für den nach den Gl. (2.20) und (2.25) (fast) eindeutigen Prozess $\theta(.)$ gilt:

$$\int_0^T ||\theta(t)||^2\,dt < \infty, \quad \text{fast sicher,} \tag{2.26}$$

  und $Z_0(t) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t ||\theta(s)||^2\,ds - \int_0^t \theta'(s)\,dW(s)}$ $(t \in [0,T])$ als hiermit definierter Prozess ein Martingal ist, wobei speziell die Bedingung $E\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \int_0^T \sigma_{ij}^2(s)\,ds\right] < \infty$ erfüllt sein soll.

Der diskontierte Vermögensprozess $\frac{X^{x,c,\pi}(.)}{S_0(.)}$ nach Gl. (2.17) hat bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes P_0 mit dem Wiener-Prozess $W_0(.)$, der durch Gl. (2.23) mit dem gerade beschriebenen Prozess $\theta(.)$ definiert ist, die folgende Darstellung $(t \in [0,T])$:

$$\frac{X(t)}{S_0(t)} = x - \int_0^t \frac{c(s)}{S_0(s)}\,ds + \int_0^t \frac{1}{S_0(s)}\pi'(s)\sigma(s)\,dW_0(s) \tag{2.27}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{X(t)}{S_0(t)} + \int_0^t \frac{c(s)}{S_0(s)}\,ds = x + \int_0^t \frac{1}{S_0(s)}\pi'(s)\sigma(s)\,dW_0(s). \tag{2.28}$$

---

[132] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 12-16.
[133] Nach *Karatzas/Shreve* (1998), S. 17, mit geringfügiger Ergänzung im dritten Punkt.

Die linke Seite von Gl. (2.28) repräsentiert hierbei ein lokales Martingal. Unter Verwendung des Prozesses $Z_0(.)$ lässt sich allerdings auch mit Bezug auf das ursprüngliche Wahrscheinlichkeitsmaß P eine Darstellung des diskontierten Vermögensprozesses als lokales Martingal erreichen. Hierzu wird mit Hilfe der Itô-Formel der Prozess $\{Z_0(t)\frac{X(t)}{S_0(t)}\}_{t\in[0,T]}$ als Itô-Prozess dargestellt. Dabei wird der Prozess $\{H_0(t)\}_{t\in[0,T]}$ definiert als:

$$H_0(t) := \frac{Z_0(t)}{S_0(t)}.$$

$H_0(.)$ heißt *Zustandspreis-Dichte-Prozess*. Ihm kommt im Weiteren die Rolle eines Diskontierungsprozesses zu. Da unter den hier gesetzten Annahmen $S_0(t) = S_0(0)e^{\int_0^t r(s)\,ds} \geq 1$ und da ferner $Z_0(t)$ ein nicht-negatives Super-Martingal mit $Z_0(0) = 1$ ist ($t \in [0,T]$), gilt $E[H_0(T)] < \infty$ und $E\left[\int_0^T H_0(t)\,dt\right] < \infty$[134]. Für den Prozess $H_0(.)$ gilt für $t \in [0,T]$ definitionsgemäß:

$$H_0(t) = e^{-\int_0^t (r(s)+\frac{1}{2}\|\theta(s)\|^2)\,ds - \int_0^t \theta'(s)\,dW(s)} \tag{2.29}$$

sowie in Differentialschreibweise:

$$dH_0(t) = -H_0(t)(r(t)\,dt + \theta'(t)\,dW(t)). \tag{2.30}$$

Aus Gl. (2.16) und $dZ_0(t) = -Z_0(t)\theta'(t)\,dW(t)$, wobei $\sigma(t)\theta(t) = b(t) + \delta(t) - r(t)\mathbf{1}_n$ ist, folgt ($t \in [0,T]$):

$$\begin{aligned}
& d\left(Z_0(t)\frac{X(t)}{S_0(t)}\right) \\
&= Z_0(t)\,d\left(\frac{X(t)}{S_0(t)}\right) + \frac{X(t)}{S_0(t)}\,dZ_0(t) + d\left[\frac{X}{S_0}, Z_0\right](t) \\
&= Z_0(t)\left(-\frac{c(t)}{S_0(t)}\,dt + \frac{1}{S_0(t)}\pi'(t)\left((b(t)+\delta(t)-r(t)\mathbf{1}_n)\,dt + \sigma(t)\,dW(t)\right)\right) \\
&\quad -\frac{X(t)}{S_0(t)}Z_0(t)\theta'(t)\,dW(t) - Z_0(t)\frac{1}{S_0(t)}\theta'(t)(\sigma'(t)\pi(t))\,dt \\
&= -\frac{Z_0(t)}{S_0(t)}c(t)\,dt + \frac{Z_0(t)}{S_0(t)}\left[\pi'(t)\sigma(t) - X(t)\theta'(t)\right]\,dW(t).
\end{aligned}$$

Mit dem Zustandspreis-Dichte-Prozess sowie der Anfangsbedingung $Z_0(0)\frac{X(0)}{S_0(0)} = x$ ergibt sich die *Vermögensgleichung* für $t \in [0,T]$ als:

$$H_0(t)X(t) + \int_0^t H_0(s)c(s)\,ds = x + \int_0^t H_0(s)\left[\pi'(s)\sigma(s) - X(s)\theta'(s)\right]\,dW(s). \tag{2.31}$$

Für zulässige Portfolio-Prozesse ist die linke Seite von Gl. (2.31) nicht negativ, folglich auch die rechte. Daraus ergibt sich, dass der Term der rechten Seite

[134] Damit sind die Voraussetzungen 2.1 – 2.3 in *Karatzas/Shreve* (1998), S. 91, erfüllt.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

dieser Gleichung ein nicht negatives lokales Martingal, nach Satz 2.5 also ein Super-Martingal ist. Folglich gilt die Beziehung[135]:

$$E\left[\int_0^T H_0(s)c(s)\,dt + H_0(T)X^{x,c,\pi}(T)\right] \leq x, \tag{2.32}$$

welche als *Budget-Restriktion* bezeichnet werden soll. Mit Bezug auf das Wahrscheinlichkeitsmaß P_0 lautet die sich unmittelbar aus Gl. (2.28) ergebende Budget-Restriktion:

$$E_0\left[\int_0^T \frac{c(t)}{S_0(t)}\,dt + \frac{X^{x,c,\pi}(T)}{S_0(T)}\right] \leq x. \tag{2.33}$$

Die Budget-Restriktion nach Gl. (2.32) bringt zum Ausdruck, dass der Erwartungswert des verbarwerteten zukünftigen Konsums und des verbarwerteten Endvermögens die Anfangsausstattung nicht übersteigt. Die Verbarwertung wird dabei durch Multiplikation des Konsums zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ und des Endvermögens in T mit dem zeitpunktgerechten Wert des Zustandspreis-Dichte-Prozesses $H_0(.)$ erreicht. Die Wahlmöglichkeit des Investors bei vorhandenem Anfangsvermögen beschränkt sich folglich auf eine Verlagerung von Konsum bzw. Endvermögen in zeitlicher Hinsicht und/oder zwischen Umweltentwicklungen. Umgekehrt kann man sagen, dass ein nach zeitlichem Anfall und Umweltwicklung bedingt angestrebter Konsumstrom und ein umweltbedingt formuliertes Endvermögen nur bei entsprechend großer Anfangsausstattung möglich sein können. Eine Anfangsausstattung, die die Budget-Restriktion für einen vorgegebenen Konsumstrom $c(.)$ und ein vorgegebenes Endvermögen $B\ (\geq 0)$ erfüllt, bietet allerdings noch keine Gewähr dafür, dass die angestrebten Zielprozesse auch tatsächlich erreichbar sind. Dies hängt von der Marktstruktur, konkret davon ab, ob die auf dem Markt verfügbaren Handelsobjekte und der Handelsrahmen es gestatten, dass jede Kombination von Konsumprozess und Endvermögen $(c(.), B)$ grundsätzlich generierbar ist. Wenn dies gegeben ist, spricht man von einem vollständigen Kapitalmarkt. Ein solcher wird im Folgenden formalisiert.

Zuvor soll allerdings noch darauf hingewiesen werden, dass auf einem arbitragefreien Kapitalmarkt generell höchstens so viele risikobehaftete Handelsobjekte betrachtet werden müssen, dass die Unsicherheitsquellen, soweit erfassbar, auch vollständig erfasst sind. Bei der hier gegebenen Modellierung mit einem d-dimensionalen Wiener-Prozess können folglich maximal d Unsicherheitsquellen erfassbar sein. Damit sind auch höchstens d, jedoch geeignet gewählte Handelsobjekte zu betrachten, um sämtliche, grundsätzlich nachbildbaren Umweltentwicklungen abbilden zu können. Es kann, und wird im Weiteren, also ohne Beschränkung der Allgemeinheit von $n \leq d$ ausgegan-

[135] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 92.

gen[136]. Die Auswahl der betrachteten Handelsobjekte ist so zu treffen, dass zu keinem Zeitpunkt die weitere bedingte Entwicklung eines dieser Objekte durch die jeweils anderen nachgebildet werden kann. Im Falle $n > d$ wäre eine solche Nachbildung stets möglich, so dass mindestens $n - d$ risikobehaftete Wertpapiere redundant sind. Ob genau diese Anzahl redundant ist oder eine größere Zahl, bestimmt sich nach der Vollständigkeitseigenschaft des Kapitalmarktes, der im Folgenden nachgegangen wird.

Gegeben sei eine $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable $B(\omega) = B^+(\omega) - B^-(\omega)$, wobei $B^+(\omega) = \max(B(\omega), 0)$ und $B^-(\omega) = \max(-B(\omega), 0)$, für die $E_0\left[\frac{|B|}{S_0(T)}\right] < \infty$ gilt und für die $\frac{B}{S_0(T)}$ fast sicher nach unten beschränkt ist ($\frac{B^-}{S_0(T)} \leq k < \infty$, fast sicher, $k \in \mathbb{R}_+$); ferner seien $x^+ = E_0\left[\frac{B^+}{S_0(T)}\right]$ (≥ 0) und $x^- = E_0\left[\frac{B^-}{S_0(T)}\right]$ (≥ 0).

Ein Kapitalmarkt heißt *vollständig*, wenn er standardisiert ist und es zu jeder solchen $\mathcal{F}_T$-messbaren Zufallsvariablen B zum Anfangsvermögen $x = x^+ - x^-$ einen Portfolio-Prozess $(\pi_0(.), \pi'(.))$ gibt, so dass $(\pi_0(.), \pi'(.)) = (\pi_0^+(.), \pi^+(.)') - (\pi_0^-(.), \pi^-(.)')$ ist und die Prozesse $(\pi_0^+(.), \pi^+(.)')$ und $(\pi_0^-(.), \pi^-(.)')$ in Bezug auf Vermögensprozesse $X^{x^+,0,\pi^+}(.)$ bzw. $X^{x^-,0,\pi^-}(.)$ zulässig sind, wobei für sie gilt:

$$X^{x^+,0,\pi^+}(T) = B^+ \quad \text{und} \quad X^{x^-,0,\pi^-}(T) = B^-, \quad \text{jeweils fast sicher,}$$
$$\frac{1}{S_0(t)} X^{x,0,\pi}(t) = \frac{1}{S_0(t)}\left(X^{x^+,0,\pi^+}(t) - X^{x^-,0,\pi^-}(t)\right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \text{ist fast sicher nach unten beschränkt;}$$

damit ist auch:

$$X^{x,0,\pi}(T) = B, \quad \text{fast sicher.}$$

Mit Gl. (2.28) ist $X^{x,0,\pi}(T) = B$, fast sicher, äquivalent zu:

$$\frac{B}{S_0(T)} = x + \int_0^T \frac{1}{S_0(s)} \pi'(s)\sigma(s)\, dW_0(s), \quad \text{fast sicher.} \tag{2.34}$$

In diesem Zusammenhang ist darauf hinzuweisen, dass aufgrund der Anmerkung 2.2 und wegen Satz 2.5 die Budget-Restriktion (2.32) bzw. (2.33) auch für ein möglicherweise negatives, jedoch nach unten beschränktes B, wie für die Definition des vollständigen Kapitalmarktes vorausgesetzt, erfüllt ist[137]. Ein vollständiger Kapitalmarkt kann im Kontext der gegebenen Handelsobjekte auch alternativ charakterisiert werden, wie dies durch den folgenden Satz ausgedrückt wird.

[136] Zur formalen Rechtfertigung dieser Voraussetzung vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 15 f.

[137] Vgl. auch *Karatzas/Shreve* (1998), S. 19. Zudem ist hier $S_0(t) \geq 1$, $\forall t \in [0, T]$.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Satz 2.15 *Alternative Charakterisierung des vollständigen Kapitalmarktes*[138]
Die folgenden Aussagen bezüglich eines standardisierten Kapitalmarktes sind äquivalent:

1. *Der Kapitalmarkt ist vollständig.*

2. *Für jede $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable B mit $E_0\left[\frac{|B|}{S_0(T)}\right] < \infty$ gibt es zum Anfangsvermögen $x = E_0\left[\frac{B}{S_0(T)}\right]$ einen Martingal erzeugenden Portfolio-Prozess $\pi(.)$, der Gl. (2.34) erfüllt.*

3. *Die Anzahl der auf dem Kapitalmarkt gehandelten Aktien stimmt mit der Dimension des zugrunde liegenden Wiener-Prozesses überein $(n = d)$ und der Volatilitätsprozess $\sigma(.)$ ist fast immer, fast sicher nicht singulär.*

Beweis:
Zu 1. und 2.[139]:
Ist der Kapitalmarkt vollständig und ist B $\mathcal{F}_T$-messbar mit $E_0\left[\frac{|B|}{S_0(T)}\right] < \infty$, dann gibt es einen Portfolio-Prozess $(\pi_0(.), \pi'(.))$, der sich aus zwei bezüglich der Vermögensprozesse $X^{x^+,0,\pi^+}(.)$ und $X^{x^-,0,\pi^-}(.)$ — x^+ und x^- wie definiert — zulässigen Prozessen $(\pi_0^+(.), \pi^+(.)')$ und $(\pi_0^-(.), \pi^-(.)')$ zusammensetzt (durch $(\pi_0(.), \pi'(.)) = (\pi_0^+(.), \pi^+(.)') - (\pi_0^-(.), \pi^-(.)'))$. Zudem ist $\dfrac{X^{x,0,\pi}(t)}{S_0(t)}$ $(0 \leq t \leq T)$ nach unten beschränkt. Für $(\pi_0(.), \pi'(.))$ gilt (fast sicher):

$$\frac{X^{x,0,\pi}(t)}{S_0(t)} = x + \int_0^t \frac{1}{S_0(s)} \pi'(s)\sigma(s)\, dW_0(s),\ t \in [0, T],$$

wobei aufgrund der Beschränktheit von $\dfrac{X^{x,0,\pi}(.)}{S_0(.)}$ nach unten und nach Satz 2.5 der Prozess $\int_0^t \frac{1}{S_0(s)} \pi'(s)\sigma(s)\, dW_0(s)$ $(t \in [0, T])$ ein Super-Martingal ist. Da für $t = T$ $E_0\left[\dfrac{X^{x,0,\pi}(T)}{S_0(T)}\right] = E_0\left[\dfrac{B}{S_0(T)}\right] = x$ gilt, hat das Super-Martingal $M_0^\pi(t) := \int_0^t \frac{1}{S_0(s)} \pi'(s)\ \sigma(s)\, dW_0(s)$ $(t \in [0, T])$ den konstanten Erwartungswert null. Damit ist es ein Martingal und $\pi(.)$ ist folglich Martingal erzeugend.

Umgekehrt ist die Bedingung $E_0\left[\frac{|B|}{S_0(T)}\right] < \infty$ für $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariablen B erfüllt, für die gilt: $\frac{B}{S_0(T)}$ ist (fast sicher) nach unten beschränkt

[138] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 22, 24.
[139] Die Beweisidee ist in *Karatzas/Shreve* (1998), S. 22, zu finden; der Beweis wurde an die modifizierte Vollständigkeitsdefinition angepasst.

und $x := E_0\left[\frac{B}{S_0(T)}\right] < \infty$. Für diese B existiert somit nach Voraussetzung ein Martingal erzeugender Portfolio-Prozess $(\pi_0(.), \pi'(.))$ mit:

$$\frac{B}{S_0(T)} = x + \int_0^T \frac{1}{S_0(s)}\pi'(s)\sigma(s)\,dW_0(s), \quad \text{fast sicher.}$$

Bildet man hiervon den bedingten Erwartungswert zum Zeitpunkt $t \in [0,T]$, dann zeigt sich:

$$\frac{X^{x,0,\pi}(t)}{S_0(t)} - x = \int_0^t \frac{1}{S_0(s)}\pi'(s)\sigma(s)\,dW_0(s) = E_0\left[\frac{B}{S_0(T)} \mid \mathcal{F}_t\right] - x, \quad \text{fast sicher.}$$

Da $E_0\left[\frac{B}{S_0(T)} \mid \mathcal{F}_t\right]$ voraussetzungsgemäß nach unten beschränkt und x endlich ist, ist auch der diskontierte Vermögensprozess $\frac{X^{x,0,\pi}(t)}{S_0(t)}$ $(t \in [0,T])$ (fast sicher) nach unten beschränkt, insbesondere auch für $t = T$. Ferner gilt $X^{x,0,\pi}(T) = B$, fast sicher. Da zudem $X^{x^\pm,0,\pi^\pm}(T) = B^\pm$ und der Kapitalmarkt generell als arbitragefrei vorausgesetzt wird, kann der Portfolio-Prozess $\pi(.)$ in die Prozesse $\pi^+(.)$ und $\pi^-(.)$ mit $\pi(.) = \pi^+(.) - \pi^-(.)$ zerlegt werden, so dass $\pi^\pm(.)$ zulässig in Bezug auf $X^{x^\pm,0,\pi^\pm}(.)$ ist.

Zu 1./2. und 3.:
Ausgehend von $n = d$ und einem (fast sicher, fast immer) nicht singulären Volatilitätsprozess $\sigma(.)$[140] ist für jedes $\mathcal{F}_T$-messbare B mit $E_0\left[\frac{|B|}{S_0(T)}\right] < \infty$ durch $M_0(t) := E_0\left[\frac{B}{S_0(T)} \mid \mathcal{F}_t\right]$ $(t \in [0,T])$ ein Martingal gegeben (Satz 2.2). Dieses Martingal besitzt nach Satz 2.12 eine Darstellung:

$$M_0(t) = M_0(0) + \int_0^t \varphi'(s)\,dW_0(s), \quad 0 \le t \le T, \quad \text{fast sicher,}$$

wobei $\int_0^t ||\varphi(s)||^2\,ds < \infty$ $(0 \le t \le T)$. Ein Martingal erzeugender Prozess, der Gl. (2.34) erfüllt, ist dann gegeben durch $\pi'(t) := S_0(t)\varphi'(t)\sigma^{-1}(t)$ $(0 \le t \le T)$. $\pi(.)$ ist zudem ein Portfolio-Prozess, da aufgrund der Stetigkeit des Vermögensprozesses $x + \int_0^t \frac{1}{S_0(s)}\pi'(s)\sigma(s)\,dW_0(s)$ $(0 \le t \le T)$, der ein Itô-Prozess ist, i.V.m. mit der Integrierbarkeitsbedingung hinsichtlich des Prozesses $r(.)$ zunächst Ungl. (2.8) gilt. Darüber hinaus ist wegen $\int_0^t ||\varphi(s)||^2\,ds < \infty$ und der Beschränktheit von $S_0(.)$ mit $t = T$ auch Bedingung (2.10) erfüllt. Da auf dem standardisierten Kapitalmarkt zudem $\int_0^T ||\theta(s)||^2\,ds < \infty$ ist, gilt auch $\int_0^T |\pi'(s)(b(s) + \delta(s) - r(s)\mathbf{1}_n)|\,ds = \int_0^T S_0(s)\varphi'(s)\theta(s)\,ds \le \max_{0\le s\le T} S_0(s) \cdot \int_0^T ||\varphi(s)||^2\,ds \cdot \int_0^T ||\theta(s)||^2\,ds < \infty$, also Ungl. (2.10)[141].

[140] Die erste Beweisrichtung folgt mit Anpassungen *Karatzas/Shreve* (1998), S. 25 f.
[141] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 26.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Umgekehrt[142] sei durch $\{e_1, \ldots, e_d\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^d$ gegeben; ferner seien $\mathcal{K}(\sigma(t)) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sigma(t)x = \mathbf{0}_n\}$ der Kern zur Matrix $\sigma(t)$ und $\mathcal{K}^{\perp}(\sigma(t))$ der Untervektorraum der zum Kern orthogonalen Vektoren. Dann ist durch $\phi(t) := proj_{\mathcal{K}(\sigma(t))}(e_{l(\sigma(t))})$ $(t \in [0,T])$ mit $l(\sigma) := \min\{i \in \{1,\ldots,d\} \mid proj_{\mathcal{K}(\sigma)}(e_i) \neq 0\}$ für $\mathcal{K}(\sigma) \neq \{\mathbf{0}_d\}$, $l(\sigma) := 1$, sonst, ein beschränkter, progressiv messbarer Prozess[143] gegeben. Es gilt $\phi(t) \in \mathcal{K}(\sigma(t))$ und $\mathcal{K}(\sigma(t)) \neq \{\mathbf{0}_d\} \Rightarrow \phi(t) \neq 0$ $(0 \leq t \leq T)$. Mit diesem Prozess wird die $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable B definiert über $B := S_0(T)\left[1 + \int_0^T \phi'(s)\, dW_0(s)\right]$, so dass wegen der Beschränktheit und Messbarkeit von $\phi(.)$ $E_0\left[\frac{|B|}{S_0(T)}\right] < \infty$ und $E_0\left[\frac{B}{S_0(T)}\right] = 1$ gilt. Nach Voraussetzung existiert dann ein Martingal erzeugender Portfolio-Prozess $\pi(.)$, so dass (fast sicher) gilt:

$$\int\limits_0^T \frac{1}{S_0(s)}\pi'(s)\sigma(s)\, dW_0(s) = \frac{B}{S_0(T)} - 1 = \int\limits_0^T \phi'(s)\, dW_0(s).$$

Da die bedingten Erwartungswerte beider Integrale Martingale sind, müssen die Integrale $\int\limits_0^t \frac{1}{S_0(s)}\pi'(s)\sigma(s)\, dW_0(s)$ und $\int\limits_0^t \phi'(s)\, dW_0(s)$, mithin die Integranden (fast sicher) übereinstimmen, so dass $\sigma'(t)\pi(t) = S_0(t)\phi(t)$, fast immer, fast sicher. Mit $\mathcal{R}(\sigma') := \{\sigma' y \mid y \in \mathbb{R}^n\}$ gilt somit $\phi(t) \in \mathcal{R}(\sigma'(t))$. Da jedoch $\mathcal{R}(\sigma') = \mathcal{K}^{\perp}(\sigma)$ ist[144], muss $\phi(t) \in \mathcal{K}^{\perp}(\sigma(t)) \;\wedge\; \phi(t) \in \mathcal{K}(\sigma(t))$ gelten. Einzig $\phi(t) = \mathbf{0}_d$ erfüllt diese Bedingung, woraus nach Konstruktion von $\phi(t)$ unmittelbar $\mathcal{K}(\sigma(t)) = \{\mathbf{0}_d\}$ folgt. Somit gilt $n = d$ und $\sigma(.)$ ist fast immer, fast sicher nicht singulär. $\square$

Obwohl sich die Definition des vollständigen Kapitalmarktes lediglich auf Zufallsvariablen bezieht, die bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{F}_T$ messbar sind, sind auf einem solchen Kapitalmarkt auch früher fällige (Vermögens-)Ansprüche erreichbar. Hierzu dient der folgende Satz, der ein Korollar zu Satz 2.15 ist.

Satz 2.16 *Erreichbarkeit von Zahlungen während des Planungszeitraumes*
Ist $\mathcal{M}^{vst}$ ein vollständiger Kapitalmarkt, dann gibt es zu jeder $\mathcal{F}_t$-messbaren Zufallsvariablen $B(t)$, wobei $E_0\left[\frac{|B(t)|}{S_0(t)}\right] < \infty$ und $\frac{B(t)}{S_0(t)}$ nach unten beschränkt $(t \in [0,T])$ gilt, einen (Martingal erzeugenden) Portfolio-Prozess

[142] Die zweite Beweisrichtung entspricht mit kleineren Ergänzungen *Karatzas/Shreve* (1998), S. 26, und wird der Vollständigkeit halber hier wiedergegeben.

[143] Vgl. zur Herleitung insbesondere der letztgenannten Eigenschaft *Karatzas/Shreve* (1998), S. 13, 26.

[144] Hierzu sei zunächst $r \in \mathcal{R}(\sigma')$ betrachtet. D.h. $\exists y \in \mathbb{R}^n : \;\sigma' y = r$; ferner gilt $\forall x \in \mathcal{K}(\sigma) : \;\sigma x = \mathbf{0}_n$, so dass auch $r'x = (\sigma' y)'x = y'\sigma x = 0$ und folglich $r \in \mathcal{K}^{\perp}(\sigma)$.
Umgekehrt sei $r \in \mathcal{K}^{\perp}(\sigma)$, und es sei $Rang(\sigma) = m \leq d$. Dann ist $Dim(\mathcal{K}(\sigma)) = d - m$. Die Spaltenvektoren von σ' bilden ein Erzeugendensystem für den Untervektorraum $\mathcal{R}(\sigma')$ des $\mathbb{R}^d$ mit $Dim(\mathcal{R}(\sigma')) = m$. Da sämtliche Spaltenvektoren von σ' orthogonal zu jedem Vektor $x \in \mathcal{K}(\sigma)$ sind, gilt dies auch für jeden Vektor $\tilde{r} \in \mathcal{R}(\sigma')$. Wegen $Dim(\mathcal{R}(\sigma')) + Dim(\mathcal{K}(\sigma)) = d$, besitzt jeder Vektor $z \in \mathbb{R}^d$ eine Darstellung $z = \tilde{r} + x$ mit $\tilde{r} \in \mathcal{R}(\sigma')$ und $x \in \mathcal{K}(\sigma)$. Für ein beliebiges $r \in \mathcal{K}^{\perp}(\sigma)$ gilt somit $r \in \mathcal{R}(\sigma')$.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

$\{(\pi_0(s), \pi'(s))\}_{s\in[0,t]}$, *so dass mit* $x = E_0\left[\frac{B(t)}{S_0(t)}\right]$ *gilt:*

$$X^{x,0,\pi}(t) = B(t), \quad \textit{fast sicher.} \tag{2.35}$$

Beweis:
Satz 2.16 ergibt sich aus Satz 2.15 (3.), indem ein Martingal erzeugender Portfolio-Prozess $\{(\pi_0(s), \pi'(s))\}_{0\leq s\leq t}$ wie im zweiten Beweisabschnitt zu letztgenanntem Satz konstruiert wird. □

Gemäß Satz 2.16 sind auch beliebige Konsumprozesse auf einem vollständigen Kapitalmarkt erreichbar und somit bewertbar. Damit ist der Markt spezifiziert, auf dem Investitionsentscheidungen zu treffen sein sollen. Geht man von allgemeinen Investitionsobjekten aus, so müssen deren Zahlungscharakteristika folglich dergestalt sein, dass sie in zeitlicher und stochastischer Hinsicht im zugrunde gelegten Wahrscheinlichkeitsraum messbar sind. Dabei ist natürlich zu berücksichtigen, dass der hier gewählte Kapitalmarkt in verschiedenerlei Hinsicht spezifisch ist. Drei wesentliche Punkte seien hier angeführt: Zunächst wurde eine zeitlich und stochastisch kontinuierliche Modellierung herangezogen[145]. Ferner blieben Sprungprozesse außer Acht, mithin wurden wegen des (ausschließlichen) Bezuges auf eine durch Wiener-Prozesse generierte Stochastik stetige (Vermögens-)Ergebnisprozesse unterstellt. Darüber hinaus wurden Transaktionskosten vernachlässigt. Z.T. aus Vereinfachungsgesichtspunkten, insbesondere hinsichtlich des letztgenannten Punktes, basiert die Wahl für die bis dato entwickelte Modellierung jedoch auch auf dem Bestreben, einen geeigneten Modellrahmen für Investitionsentscheidungen zu finden, im Rahmen derer die zu beurteilenden Investitionen kontinuierlichen Wertschwankungen ausgesetzt sind, die sich in ihrer Summe, insbesondere für großvolumige und sich aus zahlreichen Determinanten zusammensetzenden Investitionen, zu einem stetigen Wertprozess verdichten. Exogene Schocks, die eine entsprechende sprunghafte Wirkung auf den Wert eines Investitionsprozesses ausüben und infolgedessen mittels Sprungprozessen abzubilden wären, werden deshalb für „gewöhnliche" Investitionseinzel- und Portfolioentscheidungen nicht einbezogen. Da diese Effekte realiter allerdings nicht auszuschließen sind, erfolgt wiederum aus Vereinfachungsgründen eine gewisse Einschränkung gegenüber wirklichen Sachverhalten, insbesondere bei Betrachtung von Investitionen, welche kleineren, sprunghaften exogenen Einflüssen ggf. stärker ausgesetzt sind. Im folgenden Abschnitt werden nun Investitionsentscheidungen in Gestalt der Bewertung bedingter Ansprüche sowie der Zusammenstellung von Portfolios auf einem vollständigen Kapitalmarkt näher betrachtet.

---

[145] Vgl. zu einer diskreten Modellierung eines Finanzmarktes mit Betonung von Gleichgewichtsaspekten *Magill/Quinzii* (1995), insbes. S. 211 ff.

2.2 Investitionsentscheidungen auf dem vollständigen Kapitalmarkt

2.2.1 Vorbemerkungen zu Investitionseinzel- und Portfolio-Entscheidungen im gegebenen Kontext

Bei *Investitionseinzelentscheidungen* sind (bedingte) Zahlungen aus einer Investition als gegeben vorauszusetzen. Es geht im Rahmen einer zahlungsorientierten Sichtweise dann darum zu beurteilen, ob die durch ihre Zahlungsreihe bzw. ihren Zahlungsstrom repräsentierte Investition — unter Berücksichtigung der zeitlichen und stochastischen Transfermöglichkeiten des Kapitalmarktes hinsichtlich einzubringender und aus der Investition zurückfließender Finanzmittel — angenommen oder verworfen wird. Die Investitionszahlungen sind dabei nicht durch Maßnahmen des Entscheiders beeinfluss- bzw. modifizierbar. Neben einer klaren Abgrenzung des Investitionsobjektes in dem Sinne, dass die Investitionszahlungsreihe (im Folgenden auch stellvertretend für Investitions„zahlungsstrom" verwendet) die Differenzzahlungen zur Alternative vollständig, in zeitlicher und stochastischer Sicht, erfasst, erscheint a priori vor allem die Spezifikation eines Zielkriteriums notwendig. Letzteres erweist sich auf einem vollständigen Kapitalmarkt, der konkretisiert durch die Annahmen des *Abschnittes 2.1.2* auch vollkommen ist, jedoch als von untergeordneter Bedeutung, sofern elementare Charakteristika des bzw. der Entscheidenden unterstellt werden können[146]. Dies ergibt sich daraus, dass zeitlich bzw. umweltbedingt divergierende Zahlungen, unabhängig von ihrer Höhe und ihrem Vorzeichen, in für (weitestgehend) beliebige Entscheider äquivalente Zahlungen bezüglich eines einheitlichen Bezugspunktes (als Zahlung in einem herausgehobenen Zustand) gebracht werden können; als solcher ist insbesondere eine sichere Zahlung zu Beginn des Planungszeitraumes zu betrachten. Der Investitionskalkül wird damit zu einem durch den Modellrahmen etwas komplexer als in „üblichen" Anwendungen ausgestalteten Kapitalwertkalkül; insofern gibt es auch einen eindeutigen Bewertungsmaßstab für die Investition. Die danach vorgenommene Reihung steht im Einklang mit dem primären Ziel des Entscheiders, welcher als nutzenmaximierendes Wirtschaftssubjekt vorausgesetzt wird. Das zunächst angesprochene Abgrenzungsproblem ist vielfach ein Erhebungsproblem, das für die hier verfolgten Zwecke als gelöst zu betrachten ist. Diesbezüglich wird (allerdings) angenommen, dass die jeweils verwendete Modellierung gerade die Differenzzahlungsreihe (zwischen Durchführung und Unterlassung der Investition) abbildet. Eine Auswahl zwischen mehreren sich gegenseitig ausschließenden Investitionsalternativen führt zur separaten Beurteilung der einzelnen Alternativen und Wahl der Alternative mit dem höchsten Zielerreichungsgrad. Bei Interdependenzen zwischen verschiedenen Investitionen sind bei endlich vielen Investitionskombinationen diese jeweils einzeln als eine Investition zu beurteilen, der sämtliche anderen Kombinationen, ggf. inkl. der

[146] Vgl. auch *Troßmann* (1998), S. 41 f.

Unterlassungsalternative, nunmehr mit Ausschließlichkeit gegenüberstehen. Grundsätzlich kann dabei auch der Fall auftreten, dass die kombinative Zahlungsreihe von der additiven Zusammenfassung der Zahlungsreihen zu den separat betrachteten Einzelinvestitionen abweicht. Investitionseinzelentscheidungen werden in *Abschnitt 2.2.2* kurz mit Bezug auf Investitionszahlungen angesprochen, welche allgemeine Messbarkeitseigenschaften im hier zugrunde liegenden Markt erfüllen. Zum Entscheidungsproblem bei abweichenden zeit-/zustandsdiskreten oder speziell deterministischen Modellierungen soll nicht eigens eingegangen werden. Deterministische Modellierungen, die auf einem vollkommenen und vollständigen Kapitalmarkt basieren, führen letztlich auf den Kapitalwertkalkül als dem hierfür anzuwendenden Verfahren, um zu einer Investitionsentscheidung zu gelangen[147]. Die Erweiterung um Unsicherheit, die mittels diskreter, endlich vieler Umweltzustände abbildbar ist, führt auf die von *Arrow* (1953) und *Debreu* (1959) beschriebene Modellwelt, in der Gegenwartspreise existieren zu elementaren Wertpapieren, welche einen in der Höhe eins normierten Zahlungsanspruch zu einem durch den Zeitpunkt ($t = \bar{t}$) und die Umweltentwicklung (ω) gekennzeichneten Zustand (und nur dann) repräsentieren[148]. Die Gesamtheit der Gegenwartspreise zu allen derartigen zukünftigen Zuständen entspricht für die dann „einfachere“ Modellwelt dem hier verwendeten Zustandspreis-Dichte-Prozess ($H_0(.)$). Mit Hilfe der Gegenwartspreise können schließlich beliebige zustandsabhängige Investitionszahlungen als Barwerte ausgedrückt werden.

Im Falle mehrerer, sich bereits nicht mehr originär ausschließender Investitionen geht es darum, eine „optimale“ Kombination von sachlich separierten Einzelinvestitionen zusammenzustellen. Dass bei endlicher Kombinationsanzahl das Entscheidungsproblem auf dasjenige bei sich ausschließenden Investitionsentscheidungen reduzierbar ist, stellt nur auf das Lösungsverfahren ab, im Grunde handelt es sich schon hier um ein *Programm-Entscheidungs-* oder *Portfolioproblem*. Im Falle nicht mehr endlich vieler Investitionskombinationen, wie dies bereits bei nicht nur ganzzahlig durchführbaren Investitionen vorkommen kann, wird schließlich deutlich, dass dieses Problem einer eigenständigen Behandlung bedarf. Ziel innerhalb eines allgemeinen Programm-Entscheidungsproblems kann es wiederum sein, sämtliche im Planungszeitraum anfallenden Zahlungen mit Hilfe der Möglichkeiten des vollständigen (und vollkommenen) Kapitalmarktes auf einen bestimmten Zustand zu beziehen und das Programm so zu gestalten, dass der entstehende Saldo in diesem Zustand optimal, konkret der Wert zu diesem Zeitpunkt maximal wird. Gegenüber Investitionseinzelentscheidungen besteht das Optimierungsproblem gerade darin, eine explizite Anweisung zu finden, *wie* das Investitionsprogramm zusammenzustellen ist, so dass dieser optimale Zahlungssaldo entsteht, wobei die Entstehung des Saldos unmittelbar mit Transaktionen auf dem Kapitalmarkt verbunden ist. Dabei handelt es sich genau genommen

[147] Vgl. hierzu etwa *Troßmann* (1998), S. 43 ff., *Hax* (1985), S. 13 f., 33 ff.
[148] Vgl. zum diskreten Fall bspw. *Kruschwitz* (2002), S. 143 ff.

um ein Investitions- und Finanzierungsprogramm, für das im Weiteren aber stellvertretend auch nur der Begriff des Investitionsprogrammes verwendet wird. Im gegebenen Kontext kommt den Programm-Entscheidungsproblemen allerdings eine weitaus größere Bedeutung zu, welche in einer „geeigneten" Verteilung der Ressourcen auf verschiedene Zustände zum Ausdruck kommt. Investitionsprogramme sind insbesondere im Hinblick auf das primäre Ziel des Investors zu formulieren; d.h. es geht darum, ein nutzenmaximierendes Programm zusammenzustellen. Die Existenz von Investitionsprogrammen, die die Transformation einer zustandsdefinierten Zahlung in eine Zahlung in einem anderen Zustand bzw. in Zahlungen in mehreren anderen Zuständen ermöglichen, ist schließlich auch die Voraussetzung für das bisher beschriebene Vorgehen der Investitionseinzelentscheidung. Wegen der Vollständigkeit des Marktes sind schon mit den vorhandenen Finanzmarktinstrumenten (Aktien, Bond) grundsätzlich sämtliche bedingten Zahlungen generierbar, die auch finanzierbar sind. Insofern werden sich die Ausführungen zum Programm-Entscheidungsproblem auf die Zusammenstellung eines Portfolios aus den am Markt vorhandenen Instrumenten im Hinblick auf die Erfüllung eines Nutzenoptimierungszieles durch Verteilung ggf. entnehmbarer Ressourcen auf Zustände konzentrieren. Der Frage der Bestimmung danach optimaler Programme, und ihrer dynamischen Anpassung an sich entwickelnde Informationsstände, wird ausführlicher in *Abschnitt 2.2.3* zur dynamischen Portfolio-Optimierung nachgegangen.

Allgemein wird der in *Abschnitt 2.1.2* eingeführte Markt vorausgesetzt, wobei insbesondere im Rahmen der Behandlung der dynamischen Portfolio-Optimierung die Situation ohne Steuern durch diejenige unter einem idealen, in *Abschnitt 2.2.3.4* definierten Steuersystem ergänzt wird. Mit Investitionseinzelentscheidungen setzt die Erörterung wie angekündigt ein.

2.2.2 Investitionseinzelentscheidungen

Für Investitionseinzelentscheidungen ist hier von messbaren Investitionszahlungen auszugehen, die die Voraussetzungen für die Generierung eines duplizierenden Vermögensprozesses mit einem Portfolio-Prozess $(\pi_0(.), \pi'(.))$, der sich aus zulässigen Portfolio-Prozessen $(\pi_0^{\pm}(.), \pi^{\pm}(.)')$ zusammensetzt, erfüllen[149]; diesbezüglich werden realiter Investitionszahlungen nach unten begrenzt sein, so dass Vermögensprozesse, die diese nachbilden, ebenfalls nach unten begrenzt sind. Vermögensprozesse, die Investitionszahlungen kumulativ nachbilden und damit die durch die Investition induzierte Reinvermögensentwicklung widerspiegeln, sollten bereits deshalb nach unten beschränkt sein, weil eine Aufzehrung des Unternehmensvermögens bei begrenzter Haftung der Eigentümer einen Zwang zur Zerschlagung, d.h. die

[149] Vgl. die Charakterisierung der Zufallsvariablen B im Zusammenhang der Definition des vollständigen Kapitalmarktes sowie in Satz 2.16).

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Insolvenz, nach sich ziehen wird, welche ab einer endlichen Grenze auch bei unbeschränkt haftenden Gesellschaftern angenommen werden kann. Hinsichtlich der Struktur zu bewertender Investitionszahlungen können auch Rückflussprozesse unterstellt werden, die in kumulativer Sicht eine Gestalt $\Psi_0(t) = \Psi_0^{fv}(t) + \Psi_0^{lm}(t)$ $(0 \leq t \leq T)$ aufweisen, wobei $\Psi_0^{fv}(.)$ einen Prozess mit beschränkter Variation und $\Psi_0^{lm}(.)$ ein lokales Martingal darstellen[150]. Gelten für diese Prozesse $E_0\left[\int_0^T \frac{d\check{\Psi}(s)}{S_0(s)}\right] < \infty$[151] und $E_0\left[\int_0^T \frac{d[\Psi^{lm}]_s}{S_0^2(s)}\right] < \infty$, dann gibt es mit dem Anfangsvermögen $x = E_0\left[\int_0^T \frac{d\Psi(s)}{S_0(s)}\right] < \infty$ einen Martingal erzeugenden Portfolio-Prozess $\pi(.)$, so dass:

$$\frac{X^{x,0,\pi}(t)}{S_0(t)} = x - \int_0^t \frac{d\Psi_0(s)}{S_0(s)}\, ds + \int_0^t \frac{1}{S_0(s)} \pi'(s)\sigma(s)\, dW_0(s),\ 0 \leq t \leq T,\ \text{fast sicher},$$

und $X(T) = 0$, fast sicher; dabei sind die Beschränktheitsbedingungen des diskontierten Vermögensprozesses erfüllt. Der Veräußerer des Investitionszahlungsstromes $\Psi_0(.)$ würde in der Gegenwart mindestens einen Betrag in Höhe von x verlangen, weil er nur dann in der Lage wäre, Zahlungen in Höhe der Investitionsrückflüsse an den Erwerber zu leisten, ohne dass er mit positiver Wahrscheinlichkeit am Ende des Planungszeitraumes einen Verlust zu befürchten hat. Mit x kann er demgegenüber den Portfolio-Prozess $\pi(.)$ abbilden und somit seine Verpflichtungen aus dem Verkauf (fast sicher) erfüllen. Umgekehrt wird ein Erwerber des Investitionszahlungsstromes nicht bereit sein, mehr als x zu bezahlen, möchte er nicht ebenfalls riskieren, mit positiver Wahrscheinlichkeit einen Verlust bis zum Planungshorizont zu generieren. Der Erwerber wird sich folglich stets gemäß dem Prozess $(-\pi_0(.), -\pi'(.))$ netto verschulden, so dass die Rückflüsse aus der gekauften Investitionszahlungsreihe bei jeder Umweltentwicklung ausreichen werden, um die Nettoverschuldung bedienen und sich ihr schließlich entledigen zu können. Der Betrag $x = E_0\left[\int_0^T \frac{d\Psi(s)}{S_0(s)}\right]$ wird damit zum gegenwärtigen Marktpreis für die Investition(szahlungsreihe), also zu deren Ertragswert. Eine von x abweichende Bewertung würde auf dem unterstellten friktionslosen Markt demgegenüber Arbitragemöglichkeiten eröffnen, so dass sie auf einem arbitragefreien Markt keinen Bestand hätte.

Bietet sich einem Investor somit eine Sachinvestitionsmöglichkeit, deren Rückflussstrom den dergestalt ermittelten Ertragswert x aufweist, so wird er die Investition durchführen, sofern die Anschaffungsauszahlung A_0 im Be-

[150] Vgl. zum Folgenden detaillierter *Karatzas/Shreve* (1998), S. 18 ff. und insbesondere S. 39 ff. Ein Prozess der dargestellten Form wird *Semimartingal* genannt. Das Subskript „0" kennzeichnet den Bezug einer Prozesseigenschaft bzw. des Erwartungswertoperators zum Wahrscheinlichkeitsmaß P_0, ansonsten ist das Wahrscheinlichkeitsmaß P zugrunde zu legen — eine Ausnahme hiervon bildet der Kursprozess des risikolosen Bonds $S_0(.)$, welcher sich auf P bezieht. Zum Verhältnis von $\Gamma_0^{lm}(.)$ und $\Gamma^{lm}(.)$ sowie $\Gamma_0^{fv}(.)$ und $\Gamma^{fv}(.)$ vgl. *ebd.*, S. 18.

[151] $\check{\Psi}(t)$ steht für die totale Variation des Prozesses auf dem Intervall $[0, t]$; vgl. S. 41.

trag unterhalb dieses Wertes bleibt, andernfalls wird er sie, abgesehen von der Indifferenzsituation $x = A_0$, ablehnen. Die Entscheidungsregel ist dabei unabhängig von der Zustands-Präferenz des Investors, da er im Fall $K_0 := x - A_0 > 0$ durch Realisation der Investition und Verkauf der Investitionsrückflüsse seinen bisherigen Konsumstrom weiterhin realisieren und ergänzen kann durch einen zusätzlichen Konsumstrom, den er am Kapitalmarkt für K_0 erwirbt. Im Fall $K_0 := x - A_0 < 0$ könnte er seinen ohne die Investition erreichbaren Konsumstrom nicht realisieren, da er durch Aufwendung des Betrages x am Planungsbeginn über Kapitalmarkttransaktionen den Investitionsrückfluss ohnehin generieren könnte und gegenüber einer tatsächlichen Realisation dabei den Betrag $A_0 - x$ einsparen würde. Mit diesem zusätzlich gegenüber der Investitionsrealisation verfügbaren Betrag erreicht der Investor (i.d.R.) ein höheres Nutzenniveau. Anders formuliert, vernichtet der Investor durch die Realisation der Investition Konsummöglichkeiten. Die einzige notwendige Voraussetzung in den beiden vom Arbitragegleichgewicht abweichenden Fällen ist, dass der Investor ein Mehr an Konsummöglichkeiten einem Weniger vorzieht (*Annahme des „gierigen" Investors*)[152]. Für den Manager eines Unternehmens ergibt sich daraus das Postulat der *Marktwertmaximierung (Shareholder Value Maximierung)*, d.h. er realisiert genau diejenigen Investitionen, die den Marktwert des Unternehmens steigern, also solche, für die $K_0 > 0$ oder zumindest nicht $K_0 < 0$ gilt. Damit handelt er im Interesse aller Eigner des Unternehmens, unabhängig von deren individuellen Konsumpräferenzen, die i.d.R. wechselseitig divergieren[153]. Anzumerken ist, dass sich die Idealität des Kapitalmarktes sowohl auf das betrachtete Unternehmen als auch auf seinen bzw. seine Eigner als Marktakteure erstreckt. Dabei ist insbesondere auch der zweite Punkt essentiell, ist er doch Voraussetzung dafür, dass die Investoren den maximierten Marktwert in ein nutzenmaximierendes Konsummuster transformieren können[154].

Die Entscheidungsregel ist allerdings nur dann von praktischer Bedeutung, wenn es (Sach-)Investitionen geben kann, die tatsächlich eine von x abweichende Anschaffungsauszahlung aufweisen, in ihrer stochastischen Entwicklung aber gleichwohl durch die im existenten Kapitalmarkt bereits abbildbare Unsicherheit duplizierbar sind. Derartige Situationen sind für unternehmensoriginäre Sachinvestitionsmöglichkeiten kaum zu vermuten, zumal

[152] Vgl. hierzu etwa *Neus* (2001), S. 31, 43, sowie *Knobloch* (2003), S. 163 ff.

[153] Die Marktwertmaximierung als von den Präferenzen der Investoren unabhängiges Zielkriterium für das Management gilt allerdings nur auf vollkommenen und vollständigen Märkten. Abweichungen vom Idealmarkt führen i.d.R. dazu, dass Investitionsentscheidungen nicht mehr präferenzunabhängig getroffen werden können; vgl. *Wilhelm* (1983), S. 243. Zur Marktwertmaximierung im Kontext der Annahmen eines vollkommenen und vollständigen Kapitalmarktes vgl. *Hachmeister* (2000), S. 11 ff., mit weiterführenden Hinweisen. Beachte die *ebd.*, insbes. S. 15, zu findende stärkere Differenzierung zwischen Vollständigkeit des Marktes und der Möglichkeit zur Duplikation bedingter Zahlungen; allerdings betrifft die Unterscheidung nicht das hier verfolgte Untersuchungsziel.

[154] Ihren Urgrund findet die Argumentation im Separationstheorem von *Irving Fisher* aus dem Jahr 1930 (vgl. die Edition von *Barber* (1997)).

diese i.d.R. auch nicht marktgehandelte Risiken aufweisen dürften. Insofern kommt diesbezüglich dem Ertragswert x zunächst nur eine eher theoretische Bedeutung zu. Derivative Ansprüche, d.h. solche, deren Wert ausschließlich an den Wert bzw. die Wertentwicklung eines oder mehrerer gehandelter Objekte anknüpft, sind demgegenüber mit diesem Ansatz grundsätzlich bewertbar. Die konkrete Bewertbarkeit richtet sich allerdings auch nach der „Berechenbarkeit“ des Ausdruckes $E_0\left[\int_0^T \frac{d\Psi(s)}{S_0(s)}\right]$, welche hierbei das eigentliche (Rechen-)Problem darstellt. Allerdings ist auch in diesem Fall zu fragen, ob nicht ein chimärenhaftes Investitions*entscheidungs*problem gegeben ist. Denn weshalb sollte das betrachtete Wirtschaftssubjekt ein allein auf am idealen Markt gehandelten Risiken basierendes Investitionsobjekt besitzen, dessen Anschaffungsauszahlung vom marktgerechten Preis abweicht? Insofern dient der Kalkül vornehmlich dazu, den marktgerechten Preis des zustandsabhängigen Zahlungsstromes, mithin auch den Marktwert des Unternehmens, zu ermitteln[155].

Ausgehend von einem Marktwert der Unternehmung entsteht ein Investitionsauswahlproblem nun durch den bereits angesprochenen Aspekt, dass der Marktwert in ein nutzenmaximierendes Konsumprogramm umgesetzt wird. Grundsätzlich auch im Rahmen des Unternehmens möglich, vorausgesetzt, auch individualisierte Ausschüttungen seien möglich, betrifft dieses Auswahlproblem doch die individuelle Sphäre eines Eigners. Die erste Alternative erscheint allenfalls dann als real, wenn besondere gesellschaftsrechtliche Vereinbarungen innerhalb des Eignerkreises von Personenhandelsgesellschaften dies gestatten oder es sich um einen Einzelunternehmer handelt (personenbezogene Unternehmen)[156]. Der Eigentümer hat durch Kapitalmarkttransaktionen ein für ihn nutzenoptimales Investitionsprogramm auf Basis der am Kapitalmarkt vorhandenen Finanzinstrumente zu bestimmen, das im Hinblick auf Umweltentwicklungen bedingt sein wird. Dieses Investitionsproblem ist Gegenstand der dynamischen Portfolio-Optimierung, die nun dargestellt wird.

2.2.3 Die dynamische Portfolio-Optimierung unter Idealmarktbedingungen

Aus Sicht eines Investors ist bei gegebenem Anfangsvermögen x ein nutzenmaximierendes Portfolio zusammenzustellen und ggf. in seiner Zusammensetzung sich verändernden Umweltgegebenheiten anzupassen. Nutzen kann der Investor während des Planungszeitraumes durch Konsumentnahmen, repräsentiert durch den Konsumprozess $c(.)$, und/oder aus dem Endvermögen

[155] Die damit formulierte Einschränkung erstreckt sich natürlich auch auf den „gewöhnlichen“ Kapitalwertkalkül, sofern der Kalkulationszinssatz den für die Duplikation der zu bewertenden Zahlungen heranziehbaren Zinssatz eines idealen Marktes repräsentiert und nicht anderweitig zustande kommt — oder gar Deo ex Machina gestiftet wird.

[156] Vgl. hierzu *Schneider* (1992), S. 6.

$X(T)$ erfahren, wobei gemäß der zugrunde gelegten Marktgestalt von einem endlichen Planungszeitraum ausgegangen wird. Die Nutzenbeiträge von Konsum bzw. Endvermögen werden durch Nutzenfunktionen abgebildet, die im Mittelpunkt des folgenden Abschnittes stehen; hierdurch wird die Operationalisierung der Annahme eines nutzenmaximierenden Investors möglich. In den darauf folgenden Abschnitten werden verschiedene, gleichwohl wechselseitig in Verbindung stehende Nutzen-Maximierungsprobleme dargestellt und Lösungen hierfür präsentiert.

2.2.3.1 Zugrunde liegendes Nutzenkonzept

Zunächst wird der Nutzen als numerisch messbar vorausgesetzt, d.h. für einen dem Investor zufließenden Betrag kann ein Nutzenwert als Zahl angegeben werden; die Transformation erfolgt über eine Nutzenfunktion. Mit Axiomen rationalen Verhaltens, wie sie (bspw.) durch *v. Neumann/Morgenstern* formuliert wurden[157], existiert eine solche (kardinale) Nutzenfunktion. Mit ihr können mögliche Nutzenwerte innerhalb eines Spieles, d.h. einer Situation, in der verschiedene, mit Wahrscheinlichkeiten zu belegende Ergebnisse möglich sind, durch Bilden des Erwartungswertes über die Nutzenwerte der Ausgänge zu einem Erwartungsnutzen(wert) komprimiert werden. Dieser Erwartungswert ist dem Spiel nutzenäquivalent. Auch wenn Beispiele konstruierbar sind, die die generelle Gültigkeit des Konzeptes des Erwartungsnutzens, welcher auch als Bernoulli-Nutzen bezeichnet wird, in Frage stellen, bleibt dieses Konzept das weithin akzeptierteste, nicht zuletzt aufgrund der für „normale" Situationen großen Plausibilität des Axiomensystems, auf dem es fußt[158]. Es wird deshalb auch der dynamischen Portfolio-Optimierung zugrunde gelegt. Insofern kann die folgende, das bisherige Prämissensystem ergänzende Annahme formuliert werden:

Annahme zur Nutzenmaximierung: Jeder Investor richtet sich nach dem *Bernoulli-Prinzip*, d.h. er maximiert seinen Erwartungsnutzen. Zudem wird der Investor als *risikoavers* mit stets positivem Grenznutzen angenommen.

---

[157] Vgl. die originär 1944 formulierten Axiome in *v. Neumann/Morgenstern* (1973), S. 15 ff., zum Folgenden insbesondere S. 26, sowie mit Verweisen auf alternative Axiomensysteme *Laux* (2003), S. 171 ff., oder *Fishburn* (1964), S. 28 f., 37. Für beliebige Objekte $u, v, w \in \mathcal{U}$ mit einer Relation „$\succ$" und beliebige Zahlen $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ sollen nach *v. Neumann/Morgenstern* die folgenden Axiome erfüllt sein: Vollständigkeit der Ordnung ($u, v \in \mathcal{U} \Rightarrow u \succ v \vee v \succ u \vee \prec\succ v$), Transitivität ($u \succ v \wedge v \succ w \Rightarrow u \succ w$), Ordnungs- und Verknüpfungsaxiome ($u \prec (\succ) v \Rightarrow u \prec (\succ) \alpha u + (1-\alpha) v$; $u \prec (\succ) w \prec (\succ) v \Rightarrow \exists \alpha : \alpha u + (1-\alpha) v \prec (\succ) w$), Algebra der Verknüpfung ($\alpha u + (1-\alpha) v = (1-\alpha) v + \alpha u$; $\alpha(\beta u + (1-\beta) v) + (1-\alpha) v = \gamma u + (1-\gamma) v$ mit $\gamma = \alpha\beta$). Vgl. mit alternativer Formulierung des Axiomensystems *Kruschwitz* (2002), S. 88 ff., oder *Ingersoll* (1987), S. 30 ff.

[158] Vgl. zur Kritik am Bernoulli-Prinzip und dem positiven Resümee *Laux* (2003), S. 171, 194 ff.; vgl. auch *Copeland/Weston/Shastri* (2005), S. 68 f. Eine Wiedergabe der Abhandlung von *Daniel Bernoulli* aus dem Jahr 1738 auf Deutsch findet sich bei *Kruschwitz/Kruschwitz* (1996).

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Im Folgenden ist die Gestalt der (insbesondere Risikoaversion implizierenden) Nutzenfunktion des Investors noch zu spezifizieren. Zu berücksichtigen ist in diesem Zusammenhang auch, welche Nutzen stiftenden Beträge Gegenstand der Optimierung sein sollen. Es werden diesbezüglich die simultane Optimierung von Konsumentnahmen und Endvermögen, die Endvermögensoptimierung bei gegebenem Konsumstrom, der ggf. gleich null ist, sowie die Entnahmeoptimierung bei gegebenem Endvermögen dargestellt[159].

Eine *Nutzenfunktion*[160] ist eine im ersten Argument stetige Funktion $U: [0,\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow [-\infty,\infty)$, so dass für jedes $t \in [0,T]$ gilt:

- $dom(U(t,.)) := \{x \in \mathbb{R} \mid U(t,x) > -\infty\} \subseteq [0,\infty)$ und nicht leer,
- $U'(t,x) := \frac{\partial}{\partial x}U(t,x) > 0$ ist stetig, positiv und streng monoton fallend im Inneren von $dom(U(t,.))$ und es ist: $U'(\infty) := \lim\limits_{x\rightarrow\infty} U'(t,x) = 0$.

Für das Weitere wird $dom(U(t,.)) = [0,\infty) \vee (0,\infty)$ unterstellt[161], wobei im Falle $dom(U(t,.)) = (0,\infty)$ zudem $\lim_{x\downarrow 0} U'(x) = \infty$ gelte. Ferner wird vorausgesetzt, dass ein dem Zeitpunkt $t\,(\in [0,T])$ vorausgehender oder nachfolgender Konsum den Wert der Nutzenfunktion in t nicht beeinflusst. Es wird also von einem zeitlich separierbaren Nutzen ausgegangen, so dass sich der gesamte Nutzenwert eines Konsumstromes aus der Addition der Nutzenwerte aller Zeitpunkte des Betrachtungszeitraumes ergibt[162]. Ggf. wird auch

---

[159] Die Beschreibung folgt in weiten Teilen *Karatzas/Shreve* (1998), S. 88-136, bzw. *Karatzas/Lehoczky/Shreve* (1987). Darstellungen finden sich auch bei *Korn/Korn* (1999), S. 236-249, und *Elliott/Kopp* (1999), S. 251-270.

[160] Vgl. *Karatzas/Lehoczky/Shreve* (1987), S. 1564 f., *Karatzas/Shreve* (1998), S. 94 f.

[161] Damit erfolgt eine formale Spezialisierung gegenüber *Karatzas/Shreve* (1998), S. 94 f., wobei der Fall, dass $\bar{x} := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid U(x) > -\infty\} \neq 0$ ist, hier abweichend behandelt wird.

[162] Damit erfolgt eine Spezialisierung dergestalt, dass die nach den Zeitpunkten $t \in [0,T]$ differenzierten Ergebnismengen Z_t unabhängig im „Nutzenfunktionssinne“ nach *Fishburn* (1964), S. 38 f., sind. Dies ist der Fall, wenn Spiele über zeitkombinierte Ergebnismengen genau dann als äquivalent beurteilt werden, d.h. den gleichen Nutzen stiften, wenn sie für jeden Zeitpunkt isoliert betrachtet jeweils das gleiche Spiel repräsentieren. Dies sei an einem Beispiel nach *Kürsten* (2002), S. 140, der es in einem gegenüber der Nutzenunabhängigkeit kritischen Zusammenhang verwendet, verdeutlicht: Es wird das Spiel $[pa;(1-p)b]$ so definiert, dass das Ergebnis a mit der Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$, das Ergebnis b mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$ eintritt. Die Ergebnismenge, aus der a bzw. b stammen, kann sowohl aus Skalaren als auch (alternativ) aus Vektoren bestehen. Es werden ferner die Vektoren $x^1 = (x_1^1, x_2^1)'$ und $x^2 = (x_1^2, x_2^2)'$ bestimmt, deren erste (zweite) Komponente jeweils eine Zahlung in $t = 1\,(2)$ repräsentiert. Nutzenunabhängigkeit bedeutet hier, dass der Entscheider indifferent ist zwischen den Spielen $[0{,}5\ (100,0)'; 0{,}5\ (0,100)']$ und $[0{,}5\ (100,100)'; 0{,}5\ (0,0)']$, da für jeden Zeitpunkt betrachtet gleiche Spiele entstehen, nämlich $[0{,}5\ 100; 0{,}5\ 0]$ für $t = 1$ und $[0{,}5\ 0; 0{,}5\ 100]$, welches das gleiche Spiel wie $[0{,}5\ 100; 0{,}5\ 0]$ ist, für $t = 2$. Das in diesem Fall Störende, nämlich dass ein Spiel, welches über den gesamten Planungszeitraum hinweg unabhängig von der Umweltentwicklung den Rückfluss 100 aufweist, als gleichwertig zu erachten ist gegenüber einem Spiel, bei dem das Risiko über die Umweltentwicklungen im Zeitablauf nicht nivelliert wird, ist für die vorliegende Anwendung im Ergebnis allerdings nicht in dieser Extremität zu erwarten. Von den Modellprämissen her gesehen, ist ein solches Resultat aber nicht ausgeschlossen.

die Funktion $U(t,.)$ für festes $t\,(\in [0,\infty))$ Nutzenfunktion genannt; hierfür wird auch kurz $U(.)$ geschrieben.

Die Voraussetzung eines stets positiven Grenznutzens stimmt mit der Annahme eines (stets) gierigen Investors überein, die für die Arbitragefreiheit von im Übrigen idealisierten Kapitalmärkten sorgt. Sie dürfte in Bezug auf die Investoren, an die im Rahmen der dynamischen Portfolio-Optimierung zu denken ist, nicht in Frage zu stellen sein[163].

Aufgrund der (strengen) Konkavität der Nutzenfunktion (im Inneren von $dom(U(t,.))$) folgt unmittelbar, dass der Investor risikoavers ist. Risikoaversion bedeutet, dass der Investor ein sicheres Ergebnis stets einem unsicheren Ergebnis mit gleichem Erwartungswert vorzieht. Konkret ist er durch eine Nutzenfunktion $U(.)$ gekennzeichnet[164], für die die Bedingung $U(E[X]) > E[U(X)]$ gilt, d.h. der Erwartungsnutzen als Erwartungswert der Nutzenwerte, welche den möglichen Ausprägungen der Zufallsvariablen X zuzuordnen sind[165], wird durch den Investor geringer bewertet als der Nutzen, den er bei sicherer Zahlung des Erwartungswertes der unsicheren Zahlung hätte; diese Bedingung ist für konkave Nutzenfunktionen, wie hier unterstellt, erfüllt[166]. Risikofreude wäre demgegenüber bei $U(E[X]) < E[U(X)]$ und Risikoneutralität im Falle von $U(E[X]) = E[U(X)]$ gegeben. Im Weiteren sei davon ausgegangen, dass die jeweilige Risikoeinstellung für sämtliche möglichen Zufallsvariablen X, welche den Vermögenswert kennzeichnen, gilt.

Die Annahme risikoaverser Investoren und damit einer konkaven Nutzenfunktion scheint grundsätzlich einem natürlichen Verhalten zu entsprechen, da ein abnehmender Grenznutzen ($U'(x)$ fällt mit steigendem x) bedeutet, dass ein stets gleicher Vermögenszuwachs $\vartriangle x$ bei kleineren Ausgangsvermögen einen höheren Nutzenzuwachs bringt als bei größeren; somit dürfte die Motivation zur Vermögenssteigerung für kleine Vermögen ebenfalls größer sein[167]. Bei ins Unendliche strebenden Vermögen würde dementsprechend die Motivation, das Vermögen noch um den Betrag $\vartriangle x$ zu steigern, gegen null

[163] Möglicherweise ist dies insbesondere hinsichtlich solcher Investoren anzunehmen, die sich die Mühe machen, eine Optimierung in diesem Sinne durchzuführen bzw. durchführen zu lassen.

[164] Die folgenden Erläuterungen beziehen sich auf stets auf $dom(U(.))$ als Definitionsbereich.

[165] Da die Nutzenfunktion $U(.)$ hier über reelle Werte definiert ist, repräsentiert „$E[U(X)]$" eine verkürzende Schreibweise in dem Sinne, dass hierbei für jede Ausprägung der reellwertigen Zufallsvariablen X ein Nutzenwert zu berechnen und über sämtliche Nutzenwerte anschließend der Erwartungswert zu bestimmen ist. Eine *v. Neumann/Morgenstern*-Nutzenfunktion gewährleistet, dass der Nutzen des durch die Zufallsvariable X ausgedrückten Spieles dem Erwartungswert der Nutzenwerte zu den möglichen Ausgängen des Spieles entspricht; vgl. *v. Neumann/Morgenstern* (1973), S. 24, Bedingung (3:1:b). Insofern muss der Definitionsbereich der Nutzenfunktion nicht auch Spiele, welche durch eine Zufallsvariable repräsentiert werden können, umfassen, er kann vielmehr auf reelle Zahlen beschränkt bleiben.

[166] Vgl. bspw. *Kruschwitz* (2002), S. 102.

[167] Vgl. *Copeland/Weston/Shastri* (2005), S. 55.

sinken, was durch einen gegen null strebenden Grenznutzen zum Ausdruck kommt (Sättigung)[168]. Für die vorliegende Darstellung soll deshalb auch dieser „natürliche“ Fall vorausgesetzt werden. Hinzuzufügen ist allerdings, dass es offensichtlich auch Verhaltensweisen gibt, die nicht mit einer risikoaversen Einstellung im Einklang stehen. Hierbei ist bspw. an Glücksspiele zu denken, die Teilnehmer der Tatsache zum Trotz finden, dass der erwartete Rückfluss geringer ist als der Kapitaleinsatz[169]. Darüber hinaus wird teilweise auch für große und gegen Risiken diversifizierte Vermögen (insbesondere von Finanzinstitutionen) ein Verhalten *wie* bei Risikoneutralität als zulässig erachtet[170]. Für den hier im Vordergrund stehenden (natürlichen) Investor soll allerdings kein besonderer Umstand zutreffen, insbesondere seien hinsichtlich des letzten Punktes Streuungen des Vermögens nicht auszuschließen, für die eine lineare Nutzenfunktion keine geeignete Näherung mehr repräsentiert.

Risikoaverses Verhalten kann durch verschiedene Typen von Nutzenfunktionen beschrieben werden. Neben empirisch ermittelbaren sind im Hinblick auf die weitere Optimierung vor allem analytische Repräsentationen nötig, die eine adäquate Beschreibung des Risikoverhaltens bieten. Allerdings können unter den analytischen Nutzenfunktionen, die Risikoaversion implizieren, wiederum mehr oder weniger sinnvolle unterschieden werden. Als Maßstab hierfür werden vielfach Maße der Risikoaversion nach *Arrow/Pratt*[171] herangezogen. Diese sind für eine Nutzenfunktion $U(.)$, die zweimal (stetig) differenzierbar ist, definiert als:

$$\begin{aligned} ARA(x) &:= -\frac{U''(x)}{U'(x)} && \text{absolute Risikoaversion,} \\ RRA(x) &:= -\frac{xU''(x)}{U'(x)} && \text{relative Risikoaversion.} \end{aligned}$$

Die absolute Risikoaversion stellt für ein bestimmtes Ausgangsvermögen (x) den Betrag der Abnahme des Grenznutzens $(-U''(x))$ ins Verhältnis zum Grenznutzen $(U'(x))$. Nimmt dieses Verhältnis mit zunehmendem Vermögen ab, so bedeutet dies zunächst, dass sich die relative Abnahme des Grenznutzens verlangsamt. Intuitiv könnte dies bedeuten, dass man eher als bei einer stärkeren Krümmung der Nutzenkurve an der betrachteten Stelle bereit ist, streuende Rückflüsse in Kauf zu nehmen. Konkret kann gezeigt werden, dass sich die Risikoprämie, die ein Investor zum Ausgleich dafür verlangt, dass er eine sichere Zahlung gegen einen risikobehafteten Rückfluss mit gleichem Erwartungswert tauscht, proportional und gleichgerichtet zur absoluten Risi-

[168] Vgl. *Korn/Korn* (1999), S. 238 f.

[169] Vgl. *Kruschwitz* (2002), S. 103, mit dem Beispiel für einen schematisierten Verlauf einer daran angepassten Nutzenfunktion. Beispiele für situativ bestimmtes Verhalten, für das die Unterstellung von Risikoaversion keine adäquate Abbildung liefert, werden in *Goldberg* (1990) und *Varian* (1990) diskutiert; gegenüber einem eher skeptischen Resümee *Goldberg's* schließt *Varian* (1990), S. 225, „In some cases, merely assuming risk averse behavior as a primitive assumption may be adequate. I think that this is true for most questions one might ask about the behavior of ordinary consumers“.

[170] Vgl. *Gale/Hellwig* (1985), S. 650.

[171] Vgl. *Arrow* (1971), S. 94, und *Pratt* (1964), S. 122, 134.

koaversion (ARA) verändert[172]. Steigt folglich die ARA mit dem Vermögen x an, wird sich auch die Risikoprämie vergrößern, bleibt sie konstant, gilt dies auch für die Risikoprämie, und verringert sie sich schließlich, so wird sich der Investor für die Risikoübernahme mit einer geringeren Prämie zufrieden geben. Von den drei damit unterschiedenen Fällen erscheint der letztgenannte am plausibelsten, da das gleiche Risiko für einen reichen Investor leichter in Kauf zu nehmen ist als für einen relativ ärmeren[173]. Eine sinnvolle Nutzenfunktion sollte folglich eine abnehmende absolute Risikoaversion aufweisen.

Für die relative Risikoaversion (RRA) ist eine solche Abgrenzung nach intuitiv einleuchtendem Verhalten nicht ohne weiteres möglich. Formal ergibt sie sich aus dem folgenden Sachverhalt: Ist der streuende Rückfluss proportional zum Vermögen — an die Stelle der Zufallsvariablen $\tilde{z}$ bei der Ermittlung der ARA tritt die Zufallsvariable $x\tilde{z}$ —, so ist die auf das Vermögen zu beziehende Risikoprämie nunmehr proportional zur RRA[174]. Gemeinhin erscheint eine konstante relative Risikoaversion als plausibel[175]. Eine solche impliziert, dass der Investor eine konstante Risikoaversion gegenüber proportionalen Vermögensverlusten, i.S.v. $\frac{ARA}{x} = konst.$, besitzt[176]. Für verschiedene Nutzenfunktionen ergibt sich hinsichtlich der durch sie abgebildeten absoluten bzw. relativen Risikoaversion das in Tab. 2.2 wiedergegebene Bild (hierbei seien $x \geq 0$ bzw. $x > 0$ sowie $a, b > 0$).

Es zeigt sich, dass vor allem die Nutzenfunktionen des „power type“ und die logarithmische Nutzenfunktion konsistent mit einem plausiblen Investorenverhalten gegenüber Risiko sind. Diese Funktionstypen werden deshalb im Weiteren besondere Berücksichtigung erfahren. Sämtliche in Tab. 2.2 aufgeführten Nutzenfunktionen sind Spezialfälle der Klasse der so genannten HARA-Nutzenfunktionen (hyperbolic absolute risk averse ~; mit positivem Grenznutzen), welche die folgende allgemeine Gestalt aufweisen[177]:

$$U_{HARA}(x) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{cx}{1-\gamma} + d\right)^{\gamma}, \quad d > 0, c > 0,$$

wobei für x die Bedingung $\frac{cx}{1-\gamma} + d > 0$ gelten muss. Hierbei ist $\lim_{\gamma \to 1} U_{HARA}(x) = cx$ sowie $\lim_{\gamma \to 0} U_{HARA}(x) = \ln x$[178].

[172] Vgl. *Pratt* (1964), S. 124 f., — für „kleine“ Risiken.

[173] Vgl. *Kruschwitz* (2002), S. 109.

[174] Vgl. *Pratt* (1964), S. 133 ff.

[175] Vgl. *Kruschwitz* (2002), S. 111, sowie mit einem Hinweis auf eine unterstützende empirische Untersuchung *Copeland/Weston/Shastri* (2005), S. 57; nach der dort zitierten Studie von *Friend/Blume* (1975) war mit dem Verhalten privater Investoren eine konstante RRA von 2 — oder *zumindest* in dieser Höhe; vgl. *Friend/Blume* (1975), S. 920 — mit (demzufolge) abnehmender ARA vereinbar.

[176] Vgl. *Copeland/Weston/Shastri* (2005), S. 56, zur absoluten und relativen Risikoaversion auch die Charakterisierung in *Kruschwitz* (2002), S. 109-111, und *Neus* (2001), S. 457.

[177] Vgl. *Ingersoll* (1987), S. 39 f., *Kruschwitz* (2002), S. 111 ff., wobei hier $c > 0$ verlangt wird, um einen positiven Grenznutzen zu erhalten; vgl. hierzu auch *Merton* (1971), S. 389.

[178] Vgl. bspw. *Kruschwitz* (2002), S. 111 f.

Tabelle 2.2

Beispiel konkaver Nutzenfunktionen mit positiven Grenznutzen

Nutzenfunktion (Bezeichnung)	ARA (x)	$\frac{\partial}{\partial x} ARA(x)$	RRA (x)	$\frac{\partial}{\partial x} RRA(x)$
$U(x) = ax - bx^2$ ($\frac{a}{2b} > x$; quadratisch)	$\frac{2b}{a-2bx}$	zunehm.	$\frac{2b}{(a/x)-2b}$	zunehm.
$U(x) = -e^{-bx}$ (exponentiell)	b	konst.	bx	zunehm.
$U^{(\beta)}(x) = \frac{x^\beta}{\beta}$ ($\beta \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$) („power type")	$(1-\beta)\frac{1}{x}$	abnehm.	$1-\beta$	konst.
$U^{(0)}(x) = \ln x$ (logarithmisch)	$\frac{1}{x}$	abnehm.	1	konst.

Anknüpfend an die logarithmische und die Nutzenfunktionen vom „power type" wird bei Einbeziehung des Zeitaspektes vielfach auch folgenden Funktionen eine besondere Rolle zukommen:

$$U^{(p)}(t,x) = e^{-\alpha t} U^{(p)}(x), \quad t \in [0,T],\ p \in (-\infty, 1),\ \alpha > 0.$$

Die damit beschriebenen Funktionen stellen eine Zeitpräferenz zwischen den logarithmisch oder über eine „Power-type"-Funktion gemessenen Nutzen zu verschiedenen Zeitpunkten her. Der Faktor α „gewichtet" (in gewisser Weise) den zeitlichen Anfall eines Nutzenwertes und kommt damit in seiner Bedeutung einem Diskontierungszinssatz für Nutzenwerte gleich (Zeitpräferenzrate[179] bzw. (zeitliche) Konsumpräferenzrate)[180].

Zur allgemeinen Nutzenfunktion $U(.,.)$ bzw. kurz $U(.)$[181], die eine Funktion $U : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$ mit $U'(.,x) > 0$ bzw. $U'(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}_{++}$, ist, existiert eine Umkehrfunktion $I(.)$[182] zur ersten Ableitung auf dem Intervall $(0, U'(0+))$, wobei $U'(0+) = \lim_{x \downarrow 0} U'(x)$ $(\in (0, \infty])$, so dass

$$I := (U')^{-1} :\ (0, U'(0+)) \to (0, \infty)$$

streng monoton fallend und stetig ist. Für $U'(0+) < \infty$ wird $I(.)$ durch $I(y) = 0$ für $U'(0+) \leq y < \infty$ auf das Intervall $(0, \infty)$ stetig fortgesetzt.

Zur Ableitung eines optimalen Portfolios wird eine Transformation der Nutzenfunktion[183] von Bedeutung sein, die wie folgt eingeführt wird: Das *konvexe*

[179] Vgl. *Bitz* (1981), S. 304. Zur Modellierung der Zeitpräferenz in einem mehrperiodigen Kontext vgl. auch *Hempelmann/Lürwer/Brackschulze* (2002).

[180] Auf die in Fn. 162, S. 83, skizzierte Problematik der damit erfolgenden Vergleichbarmachung von Nutzen, welche zeit- und zustandsabhängig sind, sei erinnert.

[181] Vgl. S. 83.

[182] Vgl. hierzu — mit geringfügiger Modifikation — *Karatzas/Shreve* (1998), S. 95.

[183] Die Darstellung orientiert sich am Begriff der Nutzenfunktion mit einem Argument; dies entspricht der Nutzenfunktion mit zwei Argumenten, von denen das erste als fest zu betrachten ist.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Dual $\tilde{U}(.) : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ zur Nutzenfunktion $U(.)$ ist definiert als:

$$\tilde{U}(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{U(x) - xy\}. \tag{2.36}$$

Für das konvexe Dual gilt[184]:

$$\tilde{U}(y) = \begin{cases} U(I(y)) - yI(y), & y > 0, \\ U(\infty) := \lim_{x \to \infty} U(x), & y = 0, \\ \infty, & y < 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

Dabei können die Werte für $y \leq 0$ unmittelbar aus der Definition abgelesen werden. Der Funktionswert für $y > 0$ ergibt sich, indem man das Supremum (Maximum) der Funktion $u(x) = U(x) - xy$ über $x \in dom(U)(:= dom(U(.)))$ bildet[185]. Aus $u'(x) = U'(x) - y = 0$ folgt dabei $y = U'(x)$ und $x = I(y)$, falls es ein solches $x \in (0, \infty)$ gibt. Dies ist stets dann der Fall, wenn $dom(U) = (0, \infty)$, da annahmegemäß dann $\lim_{x \downarrow 0} U'(x) = \infty$ gilt sowie generell $\lim_{x \to \infty} U'(x) = 0$ vorausgesetzt wurde; für $\nexists x : y = U'(x)$ und somit $dom(U) = [0, \infty)$, muss wegen $\lim_{x \to \infty} U'(x) = 0$ und der Monotonie von $U'(x)$ im Inneren von $dom(U)$ gelten: $u'(x) < 0 \, (x \in (0, \infty))$. Das Maximum wird folglich an der Stelle $x = 0$ angenommen. Da in diesem Fall $y \geq U'(0+)$ ist, gilt ebenfalls $x = I(y)$. Für $y > 0$ ist also $I(y)$ das in Gl. (2.36) extremierende x. Zudem ist $x = I(y)$ wegen des streng monotonen Verhaltens von $U'(.)$ eindeutig. Aus Gl. (2.37) folgt ferner:

$$\tilde{U}'(y) = U'(I(y))I'(y) - I(y) - yI'(y) = -I(y), \quad 0 < y < \infty. \tag{2.38}$$

Im Folgenden sollen optimale Portfolios (im Zeitablauf) bestimmt werden. Hierbei werden verschiedene Optimierungsprobleme, je nach spezifischer Situation eines Investors, behandelt. Es wird mit dem Fall einer simultanen Maximierung von Nutzenbeiträgen aus (laufendem) Konsum und dem am Planungshorizont verbleibenden Endvermögen begonnen.

2.2.3.2 Nutzenoptimierung über Konsum und Endvermögen

Den Ausgangspunkt bildet ein Investor mit einem Ausgangsvermögen $x > 0$. Dieser sucht eine Lösung für das folgende Optimierungsproblem.

Problem $(\mathcal{KE})$[186]:
Finde ein optimales Prozesspaar $(c_{KE}(.), \pi_{KE}(.)) \in \mathcal{A}(x)$[187], auch kurz $(c_{KE}, \pi_{KE}) \in \mathcal{A}(x)$[188], aus einem Konsum- $(c_{KE}(.))$ und einem zulässigen Portfolio-

[184] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 96.

[185] Da $dom(U)$ annahmegemäß nicht leer ist, gibt es ein x in dieser Menge mit $U(x) > -\infty$, so dass andere Werte des Definitionsbereiches von $U(.)$ nicht berücksichtigt zu werden brauchen.

[186] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 98, *Korn/Korn* (1999), S. 239.

[187] Vgl. S. 65.

[188] Sofern im Kontext als Prozess erkennbar, wird die Kennzeichnung der Argumente von Prozessen mitunter weggelassen.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Prozess $(\pi_{0,KE}(.), \pi'_{KE}(.))$, für das gilt:

$$V_{KE}(x) := \sup_{(c,\pi)\in\mathcal{A}_{KE}(x)} E\left[\int_0^T U_1(t, c(t))\,dt + U_2(X^{x,c,\pi}(T))\right], \tag{2.39}$$

wobei

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{KE}(x) \quad := \quad & \Bigg\{(c,\pi) \in \mathcal{A}(x) \mid E\int_0^T \min\left[0, U_1(t, c(t))\right]\,dt \\ & + E\left[\min\left[0, U_2(X^{x,c,\pi}(T))\right]\right] > -\infty\Bigg\}.\end{aligned} \tag{2.40}$$

$U_1(., c(.))$ kennzeichnet die Nutzenfunktion des Investors zum Konsum $c(.)$; $U_2(X(T))$ gibt den Nutzenbeitrag an, den der Investor aus dem Endvermögen $X(T)$ erhält.

Die simultane Berücksichtigung von Konsum und Endvermögen kann auch als Form des Wohlstandsstrebens aufgefasst werden. Das Vorgehen zur Lösung des Problems wird für die nachfolgend dargestellten Probleme der Entnahmeoptimierung bei gegebenem Endvermögen und der Endvermögensoptimierung bei gegebenem Entnahme- bzw. Konsumstrom[189] wieder aufgegriffen und deshalb hier ausführlich behandelt. Grundsätzlich ist bei Verfolgen der angeführten Problemstellung Folgendes zu beachten: Eine Konkretisierung der Nutzenfunktionen hat der Tatsache Rechnung zu tragen, dass $c(.)$ einen üblicherweise tatsächlich konsumierten Geldstrom repräsentiert, während der Nutzen, den das Endvermögen stiftet, aus Sicht von T eine Bewertung für ein zukünftig Nutzen stiftendes Potential (nach dem Konsum $c(T)$) beinhaltet. Durch die Repräsentation des Nutzens eines (ggf. umweltentwicklungsbedingten) Nutzenpotentials, das explizit in die Optimierung einbezogen wird, sind letztlich zwei unterschiedliche Nutzen stiftende Tatbestände in den Nutzenfunktionen zu erfassen, weshalb Schwierigkeiten bei der Operationalisierung von $U_1(.,.)$ und $U_2(.)$ nicht auszuschließen sind[190]. Von daher beziehen die beiden nachfolgend behandelten Problemstellungen eine (zusätzliche) Rechtfertigung, in denen entweder ein Konsumstrom oder ein Endvermögen fixiert

[189] Die Begriffe „Entnahme“ und „Konsum“ werden hier synonym verwendet; vgl. auch die folgenden Ausführungen.

[190] Vgl. *Kruschwitz* (2003), S. 12 f. Beim Wohlstandsstreben, unter das auch die betrachtete simultane Optimierung von Konsum und Endvermögen zu rechnen ist, liegt eine „mehrfache Zielsetzung vor“ (*Schneider* (1992), S. 66). Dabei ist anzumerken, dass der Begriff des Wohlstandsstrebens stets Situationen umfasst, in denen eine Austauschregel zwischen gegenwärtigen und zukünftigen Entnahmen (inkl. Endvermögen) vorauszusetzen ist, während die „reine“ Entnahmeoptimierung — als Entnahmemaximierung — durch die (optimale) Wahl des gegenwärtigen Entnahmeniveaus bei gegebener Relation der zukünftigen Entnahmen zum gegenwärtigen gekennzeichnet ist, vgl. *Schneider* (1992), S. 65 f. Letzteres ist hier — nicht zuletzt aufgrund der Stochastik auch der Entnahmen — keineswegs der Fall, so dass unter diesem Blickwinkel die im Weiteren behandelte Optimierung von Entnahmen (bei gegebenem Endvermögen) ebenfalls als Wohlstandsstreben i.o.S. zu verstehen ist.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

ist und die Optimierung sich auf den Nutzen bezieht, der sich einheitlich auf einen Verbrauch (Konsum) oder eine „Bestandsbewertung“ gründet.

Für die Lösung des Problems $(\mathcal{KE})$ wird die Funktion:

$$\mathcal{X}_{KE}(y) := E\left[\int_0^T H_0(t) I_1(t, yH_0(t))\,dt + H_0(T) I_2(yH_0(T))\right], \quad y \in \mathbb{R}_{++}, \quad (2.41)$$

eingeführt, wobei $I_1(.,.)$ bzw. $I_2(.)$ die Umkehrfunktionen (i.o.S.) zu $U_1(.,.)$ bzw. $U_2(.)$ repräsentieren. Die Funktion $\mathcal{X}_{KE}(.)$ bildet auf dem vollständigen Kapitalmarkt den Gegenwartswert von Zahlungsansprüchen ab, die über die Inverse der Grenznutzenfunktion $I(.)$ bestimmt sind. In den weiteren Ausführungen wird sich zeigen, dass die optimalen Rückflüsse in Gestalt von Konsum resp. Endvermögen über die Funktion $I(.)$ festgelegt werden, wodurch die Funktionsdefinition ihren Sinn erhält. Bezüglich der Funktion $\mathcal{X}_{KE}(.)$, die *Betragsfunktion (für Konsum und Endvermögen)* genannt werden soll, werden für endliches y endliche Funktionswerte vorausgesetzt. Es gilt im Weiteren also Folgendes:

Annahme[191]: Die Nutzenfunktionen $U_1(.,.)$ und $U_2(.)$ seien dergestalt, dass $\mathcal{X}_{KE}(y) < \infty, \quad \forall y \in \mathbb{R}_{++}$.

Satz 2.17 *Eigenschaften und Inverse der Betragsfunktion* $\mathcal{X}_{KE}(.)$[192]
Die Funktion $\mathcal{X}_{KE}(.)$ *ist monoton fallend und stetig auf dem Intervall* $(0, \infty)$ *sowie streng monoton fallend auf dem Intervall* $(0, z_{KE})$, *wobei:*

$$z_{KE} := \sup\{y > 0 \mid \mathcal{X}_{KE}(y) > \mathcal{X}_{KE}(\infty)\} > 0 \quad (2.42)$$

mit $\mathcal{X}_{KE}(\infty) := \lim_{y\to\infty} \mathcal{X}_{KE}(y) = 0$; *ferner ist* $\mathcal{X}_{KE}(0+) := \lim_{y\downarrow 0} \mathcal{X}_{KE}(y) = \infty$. *Auf dem Intervall* $(0, z_{KE})$ *hat die Funktion* $\mathcal{X}_{KE}(.)$ *eine streng monoton fallende Inverse* $\mathcal{Y}_{KE} : (0, \infty) \to (0, z_{KE})$, *so dass:*

$$\mathcal{X}_{KE}(\mathcal{Y}_{KE}(x)) = x, \quad \forall x \in (0, \infty). \quad (2.43)$$

Zur Lösung des Problems $(\mathcal{KE})$ wird die Maximierung des Erwartungsnutzens unter der Nebenbedingung, dass der Konsumprozess und das verbleibende Endvermögen die Budget-Restriktion zum Anfangsvermögen x einhalten müssen, über eine zu maximierende Lagrange-Funktion ausgedrückt, für die die zugehörigen *Kuhn-Tucker-Bedingungen* erfüllt sein müssen. Diese werden jedoch nur soweit verwendet, dass ein Konsumprozess $c(.)$ und das sich damit ergebende Endvermögen ξ als Kandidaten für die gesuchten optimalen Konsum- und Endvermögenswerte ermittelt werden. Die Optimalität des

[191] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 101, sowie mit hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit dieser Annahme *ebd.*, S. 107 i.V.m. S. 96 f. Letzteres ist bspw. dann gegeben, wenn für geeignete $\beta \in (0,1)$, $\gamma \in (1,\infty)$ gilt: $\beta U'(x) \geq U'(\gamma x)$, $\forall x \in (0,\infty)$, sowie $\mathcal{X}_{KE}(y) < \infty$ für ein $y > 0$.

[192] Vgl. zu Satz und Beweis *Karatzas/Shreve* (1998), S. 101 f. (Lemma 3.6.2), wobei hier aufgrund der abweichenden Definition der Nutzenfunktion $\mathcal{X}_{KE}(\infty) = 0$ ist.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Konsumprozesses sowie des aufgrund der Vollständigkeit des Marktes hierzu existierenden Portfolio-Prozesses wird hernach gezeigt[193].

Die Lagrange-Funktion mit dem Lagrange-Multiplikator $y \geq 0$ zur Maximierung des Erwartungsnutzens aus Konsum und Endvermögen unter Beachtung der Budget-Restriktion (2.32) lautet:

$$L(c,\xi,y) := E\left[\int_0^T U_1(t,c(t))\,dt + U_2(\xi)\right] + y\underbrace{\left(x - E\left[\int_0^T H_0(t)c(t)\,dt + H_0(T)\xi\right]\right)}_{\substack{\geq 0,\ \text{Budget-Restriktion}\\ \text{zum Anfangsvermögen } x}}.$$

Nach der Definition des konvexen Duals gemäß Gl. (2.37) gilt für die entsprechenden Funktionen zu $U_1(t,.)$ und $U_2(.)$:

$$\begin{aligned} xy + E\left[\int_0^T [U_1(t,c(t)) - yH_0(t)c(t)]\,dt\right] + E\left[U_2(\xi) - yH_0(T)\xi\right] \\ \leq\ xy + E\left[\int_0^T \tilde{U}_1(t,yH_0(t))\,dt\right] + E\left[\tilde{U}_2(yH_0(T))\right], \end{aligned}$$

was für $y > 0$ wegen Gl. (2.37) und der Eigenschaften des konvexen Duals mit Gleichheit genau dann erfüllt ist, wenn:

$$c(t) = I_1(t,yH_0(t)),\ t \in [0,T], \quad \text{und} \quad \xi = I_2(yH_0(T)).$$

Dabei ist es nahe liegend, das optimale Prozesspaar (c,π) in der Menge zu suchen, für die die Budget-Restriktion für $c(.)$ und $\xi = X^{x,c,\pi}$ mit Gleichheit erfüllt, also bindend ist, so dass insbesondere auch $y > 0$ gelten kann. Für ein Paar (c,π), das das Budget nicht voll ausschöpft, ist demgegenüber zu vermuten, dass mit dem übrig bleibenden Anfangsvermögen eine Steigerung des Erwartungsnutzens durch höheren Konsum und/oder ein höheres Endvermögen erreicht werden kann; dass dies zutrifft, wird sich aus dem Folgenden ergeben. Bei einem Anfangsvermögen $x > 0$ sind mit $y = \mathcal{Y}_{KE}(x) > 0$, eingesetzt in obige Gleichungen für $c(.)$ und ξ, ein Konsumprozess $c_{KE}(.)$ und ein Endvermögen $\xi_{KE}(.)$ gegeben, die die Budget-Restriktion (mit Gleichheit) erfüllen. Da zudem $x > 0 = \mathcal{X}_{KE}(\infty)$ und $\mathcal{X}_{KE}(.)$ stetig auf $(0,\infty)$ sind, ist $y = \mathcal{Y}_{KE}(x) < z_{KE}$ der einzige Wert, der diese Bedingung erfüllt. Kandidaten für den optimalen Konsumprozess und das optimale Endvermögen sind danach ($c_{KE}(.)$ und ξ_{KE} jeweils nicht negativ):

$$c_{KE}(t) = I_1(t,\mathcal{Y}_{KE}(x)H_0(t)),\ t \in [0,T] \text{ und} \tag{2.44}$$

$$\xi_{KE} = I_2(\mathcal{Y}_{KE}(x)H_0(T)). \tag{2.45}$$

Wegen der Vollständigkeit des Kapitalmarktes folgt die Existenz eines zulässigen Portfolio-Prozesses $(\pi_{0,KE}(.),\pi'_{KE}(.))$, so dass $(c_{KE}(.),\pi_{KE}(.)) \in \mathcal{A}(x)$ und $\xi = X^{x,c_{KE},\pi_{KE}}(T)$. Es gilt nunmehr die folgende Aussage.

[193] Die Darstellung entspricht weitgehend derjenigen bei *Karatzas/Shreve* (1998), S. 102 ff.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Satz 2.18 *Optimalität von $c_{KE}(.)$ und ξ_{KE}*[194]
Für $x > 0$, $c_{KE}(.)$ und ξ_{KE} gegeben durch die Gl. (2.44) bzw. (2.45) sowie mit $\pi_{KE}(.)$ als dem zulässigen Portfolio-Prozess, für den $(c_{KE}(.), \pi_{KE}(.)) \in \mathcal{A}(x)$ und $\xi = X^{x,c_{KE},\pi_{KE}}(T)$ gilt, ist $(c_{KE}(.), \pi_{KE}(.)) \in \mathcal{A}_{KE}(x)$ Lösung des Problems $(\mathcal{KE})$.

Beweis:
Zunächst ist $(c_{KE}(.), \pi_{KE}(.)) \in \mathcal{A}_{KE}(x)$ zu zeigen. Es sei hierfür $\bar{d} \in (0, \infty)$, so dass $U_1(t, \bar{d}) > -\infty$ $(t \in [0,T])$ und $U_2(\bar{d}) > -\infty$ sind; dann gilt wegen der Gl. (2.36) und (2.37) (für bel. $t \in [0,T]$):

$$\begin{aligned}
U_1(t, c_{KE}(t)) - \mathcal{Y}_{KE}(x)H_0(t)c_{KE}(t) &= \tilde{U}_1(t, \mathcal{Y}_{KE}(x)H_0(t)) \\
&\geq U_1(t, \bar{d}) - \mathcal{Y}_{KE}(x)H_0(t)\bar{d}, \\
U_2(\xi_{KE}) - \mathcal{Y}_{KE}(x)H_0(T)\xi_{KE} &= \tilde{U}_2(\mathcal{Y}_{KE}(x)H_0(T)) \\
&\geq U_2(t, \bar{d}) - \mathcal{Y}_{KE}(x)H_0(t)\bar{d}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt[195]:

$$\begin{aligned}
&E\left[\int_0^T \min\left[0, U_1(t, c_{KE}(t))\right] dt + \min\left[0, U_2(\xi_{KE})\right]\right] \\
&\geq \int_0^T \min\left[0, U_1(t, \bar{d})\right] dt + \min\left[0, U_2(\bar{d})\right] - \mathcal{Y}_{KE}(x)\bar{d}E\left[\int_0^T H_0(t)\, dt + H_0(T)\right] \\
&> -\infty.
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $(c_{KE}(.), \pi_{KE}(.))$ das Supremum in der Definitionsgleichung (2.39) erreicht. Hierfür sei ein anderes zulässiges Prozesspaar $(\bar{c}_{KE}(.), \bar{\pi}_{KE}(.)) \in \mathcal{A}_{KE}(x)$ mit $\bar{\xi}_{KE} := X^{x,\bar{c}_{KE},\bar{\pi}_{KE}}$ betrachtet. Dann gilt wiederum aufgrund der Gl. (2.36) und (2.37) (für bel. $t \in [0,T]$):

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_1(t, \underbrace{\mathcal{Y}_{KE}(x)H_0(t)}_{=y}) &= U_1(t, \underbrace{I(\overbrace{\mathcal{Y}_{KE}(x)H_0(t)}^{=y})}_{=c_{KE}(t)}) - \underbrace{\mathcal{Y}_{KE}(x)H_0(t)}_{=y}\underbrace{I(\overbrace{\mathcal{Y}_{KE}(x)H_0(t)}^{=y})}_{=c_{KE}(t)} \\
&\geq U_1(t, \bar{c}_{KE}(t)) - \underbrace{\mathcal{Y}_{KE}(x)H_0(t)}_{=y}\bar{c}_{KE}(t), \\
\tilde{U}_2(\underbrace{\mathcal{Y}_{KE}(x)H_0(T)}_{=y}) &= U_2(\underbrace{I(\overbrace{\mathcal{Y}_{KE}(x)H_0(T)}^{=y})}_{=\xi_{KE}}) - \underbrace{\mathcal{Y}_{KE}(x)H_0(T)}_{=y}\underbrace{I(\overbrace{\mathcal{Y}_{KE}(x)H_0(T)}^{=y})}_{=\xi_{KE}} \\
&\geq U_2(\bar{\xi}_{KE}) - \underbrace{\mathcal{Y}_{KE}(x)H_0(T)}_{=y}\bar{\xi}_{KE},
\end{aligned}$$

so dass sich durch die Bildung des Erwartungswertes über die additiv zusam-

[194] Mit geringfügigen Anpassungen vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 103 f. Zum nachfolgend aufgeführten Beweis vgl. *ebd.*

[195] Vgl. bezüglich $-E\left[\int_0^T H_0(t)\, dt + H_0(T)\right] > -\infty$ S. 69.

mengefassten Nutzenwerte das Folgende ergibt:

$$\begin{aligned}
&E\left[\int_0^T U_1(t, c_{KE}(t))\,dt + U_2(\xi_{KE})\right] \\
&\quad \geq E\left[\int_0^T U_1(t, \bar{c}_{KE}(t))\,dt + U_2(\bar{\xi}_{KE})\right] \\
&\quad +\mathcal{Y}_{KE}(x)\left(\underbrace{E\left[\int_0^T H_0(t)c_{KE}(t)\,dt + H_0(T)\xi_{KE}\right]}_{=x}\right. \\
&\quad \left. -E\left[\int_0^T H_0(t)\bar{c}_{KE}(t)\,dt + H_0(T)\underbrace{\bar{\xi}_{KE}}_{=X^{x,\bar{c}_{KE},\bar{\pi}_{KE}}(T)}\right]\right) \\
&\quad \geq E\left[\int_0^T U_1(t, \bar{c}_{KE}(t))\,dt + U_2(\bar{\xi}_{KE})\right].
\end{aligned}$$

Berücksichtigt wurde insbesondere, dass das Paar $(\bar{c}_{KE}(.), \bar{\xi}_{KE}) \in \mathcal{A}(x)$ die Budget-Restriktion erfüllt; für $(c_{KE}(.), \xi_{KE})$ gilt dies sogar mit Gleichheit. □

Anmerkung 2.4 [196]
Bei $V_{KE}(x) < \infty$ ist das Tripel $(c_{KE}(.), \xi_{KE}, \pi_{KE}(.))$, welches das Problem $(\mathcal{KE})$ löst, bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig.

Dadurch, dass das (fast immer, fast sicher) eindeutige optimale Konsum-/ Portfolio-Prozesspaar $(c_{KE}(.), \pi_{KE}(.))$ die Budget-Restriktion mit Gleichheit erfüllt, würde sich bei einem höheren Budget $x +_{\Delta} x$ $({}_{\Delta}x > 0)$ ein anderes Paar als optimal erweisen; dieses müsste wegen der Eindeutigkeit (im nicht unterscheidbaren Sinne) der Lösung einen höheren Erwartungsnutzen aufweisen. Dies spricht grundsätzlich für die Marktwertmaximierung, durch die der Investor das größte Gegenwartsvermögen erhält, welches ihm die Realisierung eines größtmöglichen (Erwartungs-)Nutzens erlaubt.

Nachdem nun die Gestalt des optimalen Konsumprozesses und des optimalen Endvermögens bestimmt worden sind, ist zu fragen, wie diese realisiert werden. Gesucht ist somit der zugehörige (zulässige) Portfolio-Prozess, dessen Existenz aufgrund der Vollständigkeit des Marktes postuliert werden konnte. Hierzu dient der folgende Satz, in dem auch der zugehörige Vermögensprozess beschrieben wird.

Satz 2.19 *Optimaler Portfolio-Prozess und Vermögensprozess*[197]
Zum Ausgangsvermögen $x > 0$ seien $c_{KE}(.)$ der optimale Konsumprozess und ξ_{KE} das optimale Endvermögen nach Satz 2.18 mit zugehörigem Portfolio-Prozess $\pi_{KE}(.)$. Ferner bezeichne $X_{KE}(t) = X^{x,c_{KE},\pi_{KE}}(t)$ $(t \in [0,T])$ den

[196] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 104, mit Beweis.
[197] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 104, zum Satz.

sich ergebenden, optimalen Vermögensprozess. Dann gilt für den optimalen Vermögensprozess:

$$X_{KE}(t) = \frac{1}{H_0(t)} E\left[\int_t^T H_0(s) c_{KE}(s)\, ds + H_0(T)\xi_{KE} \mid \mathcal{F}_t\right], \quad t \in [0,T]. \quad (2.46)$$

Der optimale Portfolio-Prozess ist für $t \in [0,T]$ gegeben durch:

$$\pi_{KE}(t) = (\sigma'(t))^{-1} \left(\frac{\psi_{KE}(t)}{H_0(t)} + X_{KE}(t)\theta(t)\right), \quad (2.47)$$

wobei sich der Prozess $\psi_{KE}(.)$ aus der Darstellung des Martingals

$$M_{KE}(t) := E\left[\int_0^T H_0(s) c_{KE}(s)\, ds + H_0(T)\xi_{KE} \mid \mathcal{F}_t\right] \quad (2.48)$$

unter Heranziehung des Martingaldarstellungssatzes (Satz 2.7) aus $M_{KE}(t) = x + \int_0^t \psi'_{KE}(s)\, dW(s)$ mit $\int_0^T ||\psi_{KE}(t)||^2\, dt < \infty$ ergibt.

Beweis:
Auszugehen ist von der Vermögensgleichung (2.31) und der für $c_{KE}(.)$, ξ_{KE} bindenden Budget-Restriktion, die beide nochmals angegeben werden:

$$\begin{aligned} H_0(t)X(t) + \int_0^t H_0(s)c(s)\, ds &= x + \int_0^t H_0(s)\left[\pi'(s)\sigma(s) - X(s)\theta'(s)\right] dW(s), \\ &\qquad 0 \le t \le T \quad \text{(Vermögensgleichung)}, \\ x &= E\left[\int_0^T H_0(s)c_{KE}(s)\, ds + H_0(T)\xi_{KE}\right] \\ &\qquad \text{(Budget-Restriktion)}. \end{aligned}$$

Aus der bindenden Budget-Restriktion ergibt sich, dass das Super-Martingal der rechten Seite der Vermögensgleichung für alle $t \in [0,T]$ einen konstanten Erwartungswert besitzt und folglich ein Martingal ist. Bildet man somit die bedingte Erwartung über die bis T gehende Vermögensgleichung zum Zeitpunkt $t \in [0,T]$[198] und betrachtet man zudem die Vermögensgleichung für diesen Zeitpunkt selbst, so ist (mit $X(t)$ kurz für $X^{x,c_{KE},\pi_{KE}}(t)$):

$$\begin{aligned} &E\left[\int_0^T H_0(s)c_{KE}(s)\, ds + H_0(T)\xi_{KE} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= x + \int_0^t H_0(s)\left[\pi'_{KE}(s)\sigma(s) - X(s)\theta'(s)\right] dW(s) \\ &\quad + \underbrace{E\left[\int_t^T H_0(s)\left[\pi'_{KE}(s)\sigma(s) - X(s)\theta'(s)\right] dW(s)\right]}_{=0} \\ &= H_0(t)X(t) + \int_0^t H_0(s)c_{KE}(s)\, ds, \end{aligned}$$

[198] Der Spezialfall $t = T$ soll nicht eigenständig behandelt werden.

wobei der Prozess $M_{KE}(t) = E\left[\int_0^T H_0(s)c_{KE}(s)\,ds + H_0(T)\xi_{KE} \mid \mathcal{F}_t\right]$ ein Martingal ist[199]. Da ferner ($t \in [0,T]$):

$$\begin{aligned} &E\left[\int_0^T H_0(s)c_{KE}(s)\,ds + H_0(T)\xi_{KE} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= E\left[\int_t^T H_0(s)c_{KE}(s)\,ds + H_0(T)\xi_{KE} \mid \mathcal{F}_t\right] + \int_0^t H_0(s)c_{KE}(s)\,ds, \end{aligned}$$

gilt nunmehr:

$$E\left[\int_t^T H_0(s)c_{KE}(s)\,ds + H_0(T)\xi_{KE} \mid \mathcal{F}_t\right] = H_0(t)X(t).$$

Hinsichtlich der Bestimmung des optimalen Portfolio-Prozesses $\pi_{KE}(.)$ gilt zunächst, dass das Martingal $M_{KE}(.)$ nach dem Martingaldarstellungssatz 2.7 darstellbar ist als:

$$M_{KE}(t) = x + \int_0^t \psi'_{KE}(s)\,dW(s), \quad t \in [0,T],$$

mit $\int_0^T ||\psi_{KE}(t)||^2\,dt < \infty$. Mit den bisherigen Schritten gilt dann für $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} x + \int_0^t \psi'_{KE}(s)\,dW(s) &= E\left[\int_0^T H_0(s)c_{KE}(s)\,ds + H_0(T)\xi_{KE} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= x + \int_0^t H_0(s)\left[\pi'_{KE}(s)\sigma(s) - X(s)\theta'(s)\right]\,dW(s). \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich der Integranden der stochastischen Integrale ergibt sich schließlich für positive Vermögen $X^{x,c_{KE},\pi_{KE}}(t) > 0$[200] mit $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} &\psi'_{KE}(t) = H_0(t)(\pi'_{KE}(t)\sigma(t) - X^{x,c_{KE},\pi_{KE}}(t)\theta'(t)) \\ \Leftrightarrow\quad &\pi_{KE}(t) = (\sigma'(t))^{-1}\left(\frac{\psi_{KE}(t)}{H_0(t)} + X(t)\theta(t)\right). \qquad \square \end{aligned}$$

Im Folgenden soll die simultane Optimierung von erwartetem Nutzen aus Konsum und Endvermögen an einem Beispiel konkretisiert werden. Entsprechend ihrer bereits herausgestellten Bedeutung werden dabei die logarithmische und die „Power-type"-Nutzenfunktionen verwendet, wobei der sich daraus zum Zeitpunkt $t\,(\in [0,T])$ ergebende Nutzenwert durch Diskontierung über den Faktor e^{-kt} in zeitlicher Hinsicht mit anderen Nutzenbeiträgen vergleichbar gemacht wird. k steht folglich für die Diskontierungsrate (aus der Konsumpräferenz).

---

199 Vgl. *Korn/Korn* (1999), S. 76 f., sowie Satz 2.2.

200 P-fast sicher ist: Falls $X(t) = 0$, muss $(\pi_{0,KE}(\bar{t}), \pi'_{KE}(\bar{t})) = \mathbf{0}_{n+1}$ ($\bar{t} \in [t,T]$) gelten, da für einen zulässigen Vermögensprozess $X(\hat{t}) \geq 0$ ($\hat{t} \in [0,T]$) erfüllt sein muss, was bei $\pi_{KE}(\bar{t}) \neq \mathbf{0}_n$ wegen Gl. (2.15) nicht sichergestellt wäre. Zudem muss aufgrund der Budget-Restriktion aus Sicht des Zeitpunktes t $c_{KE}(\bar{t}) = 0$ ($\bar{t} \in [t,T]$) sein. Vgl. zur „absorbierenden" Eigenschaft eines Zustandes mit $X(.) = 0$ auch *Karatzas/Shreve* (1998), S. 92 f., sowie *Duffie* (1996), S. 196.

Beispiel 2.5 *Konsum- und Endvermögensoptimierung bei logarithmischer und bei „Power-type"-Nutzenfunktion mit Diskontierungsrate*
Zunächst werde die Optimierung für eine *logarithmische Nutzenfunktion mit Diskontierungsterm*, angewendet auf Konsum und Endvermögen, betrachtet. Konkret seien[201]:

$$U_1(t,c) = e^{-kt} \ln c, \quad U_2(\xi) = e^{-kT} \ln \xi.$$

Aus

$$U_1'(t,c) := \frac{\partial U_1(t,c)}{\partial c} = e^{-kt}\frac{1}{c}, \quad U_2'(\xi) = e^{-kT}\frac{1}{\xi}$$

folgt dann:

$$I_1(t,y) = e^{-kt}\frac{1}{y}, \quad I_2(y) = e^{-kT}\frac{1}{y},$$

so dass nach Gl. (2.41):

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{KE}(y) &= E\left[\int_0^T H_0(t)e^{-kt}\frac{1}{yH_0(t)}\,dt + H_0(T)e^{-kT}\frac{1}{yH_0(T)}\right] \\ &= \frac{1}{yk}\left[1+(k-1)e^{-kT}\right]. \end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{Y}_{KE}(x) = \frac{1}{xk}\left[1+(k-1)e^{-kT}\right]$ und für den optimalen Konsumprozess sowie das optimale Endvermögen ergibt sich[202]:

$$\begin{aligned} c_{KE}(t) &= I_1(t, \mathcal{Y}_{KE}(x)H_0(t)) = \frac{xk}{\left(1+(k-1)e^{-kT}\right)H_0(t)}e^{-kt}, \; t \in [0,T], \\ \xi_{KE} &= I_2(\mathcal{Y}_{KE}(x)H_0(T)) = \frac{xk}{\left(1+(k-1)e^{-kT}\right)H_0(T)}e^{-kT}. \end{aligned}$$

Der zugehörige Vermögensprozess ist gemäß Gl. (2.46) für $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} X_{KE}(t) &= \frac{1}{H_0(t)}E\left[\int_t^T H_0(s)\frac{xk}{\left(1+(k-1)e^{-kT}\right)H_0(s)}e^{-ks}\,ds \right. \\ &\qquad \left. +H_0(T)\frac{xk}{\left(1+(k-1)e^{-kT}\right)H_0(T)}e^{-kT} \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right] \\ &= \frac{1}{H_0(t)}\frac{xk}{1+(k-1)e^{-kT}}\frac{1}{k}\left(-e^{-kT}+e^{-kt}+ke^{-kT}\right) \\ &= \frac{1}{H_0(t)}x\frac{e^{-kt}+(k-1)e^{-kT}}{1+(k-1)e^{-kT}}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $X_{KE}(T) = \xi_{KE}$ und $X_{KE}(0) = x$. Zur Ermittlung des optimalen Portfolio-Prozesses wird das Martingal $M_{KE}(.)$ benötigt, welches

[201] Zur Optimierung ohne Diskontierungsrate vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 104 f.
[202] Vgl. auch *Karatzas/Lehoczky/Shreve* (1987), S. 1573, die anstelle der hier verwendeten konstanten Dämpfungsrate k lediglich einen adaptierten, messbaren und (gleichmäßig) beschränkten Prozess $k(.)$ unterstellen.

sich aus Gl. (2.48) unter Verwendung des für den Vermögensprozess soeben ausgewerteten Terms für $t \in [0,T]$ wie folgt ergibt:

$$\begin{aligned}M_{KE}(t) &= E\left[\int_t^T H_0(s)c_{KE}(s)\,ds + H_0(T)\xi_{KE} \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right] + \int_0^t H_0(s)c_{KE}(s)\,ds \\ &= x\frac{e^{-kt}+(k-1)e^{-kT}}{1+(k-1)e^{-kT}} + \int_0^t H_0(s)\frac{xk}{\left(1+(k-1)e^{-kT}\right)H_0(s)}e^{-ks}\,ds = x.\end{aligned}$$

Das Martingal entspricht einer Konstanten und der Prozess $\psi_{KE}(.)$ nach Satz 2.19 ist identisch null. Der optimale Portfolio-Prozess für $t \in [0,T]$ ist dann:

$$\begin{aligned}\sigma'(t)\pi_{KE}(t) &= X_{KE}(t)\theta(t) \\ \Rightarrow \qquad \pi_{KE}(t) &= X_{KE}(t)\left(\sigma(t)\sigma'(t)\right)^{-1}(b(t)+\delta(t)-r(t)\mathit{1}_n), \qquad (2.49)\end{aligned}$$

wobei stets $\pi_{0,KE}(t) = X_{KE}(t) - \pi'_{KE}(t)\mathbf{1}_n$ zu ergänzen ist.

Gl. (2.47) zeigt, dass bei logarithmischem Nutzen das optimale Portfolio allein über die aktuellen (in t gegebenen) Ausprägungen der Variablen für die Parameterprozesse und den gegenwärtigen Wert des Vermögens bestimmt werden kann. Die konkrete Gestalt der Parameter*prozesse* $r(.)$, $\sigma(.)$, $b(.)$ und $\delta(.)$ ist hierfür nicht notwendig. Ebenso wenig fließt eine bspw. vom Planungshorizont T abhängige Erwartung über zukünftige Prozessentwicklungen in die Zusammenstellung des Portfolios ein. Die optimale Portfolio-„Strategie" kann somit als kurzsichtig (*myopisch*) bezeichnet werden. Sie stimmt mit der Wahl einer Portfolio-Zusammenstellung in einem statischen Kontext überein, bei dem die Parameterwerte die bezeichneten aktuellen Prozesswerte besitzen[203].

Mit der Bestimmung des optimalen Portfolio-Prozesses und des optimalen Konsumprozesses ist das Problem $(\mathcal{KE})$ für logarithmischen, (durch die Diskontierungsrate) gedämpften Nutzen gelöst. Der Zielfunktionswert wird für die Entscheidung im Grunde nicht benötigt; gleichwohl soll seine Ermittlung der Vollständigkeit halber sowie unter dem Aspekt, dass bei einer kardinalen Nutzenfunktion auch Differenzen im Erwartungsnutzen — bspw. aufgrund eines durch Anstrengung steigerbaren Ausgangsvermögens — unmittelbare Bedeutung haben, im Folgenden noch angegeben werden. Mit Gl. (2.39) sowie dem optimalen Konsumprozess und dem optimalen Endvermögen gilt[204]:

$$\begin{aligned}V_{KE}(x) &= E\left[\int_0^T U_1(t,c(t))\,dt + U_2(\xi)\right] \\ &= E\left[\int_0^T e^{-kt}\ln\frac{xke^{-kt}}{\left(1+(k-1)e^{-kT}\right)H_0(t)}\,dt + e^{-kT}\ln\frac{xke^{-kT}}{\left(1+(k-1)e^{-kT}\right)H_0(T)}\right]\end{aligned}$$

[203] Dies lässt sich aus der Behandlung einer analogen Problemstellung im erweiterten Kontext eines unvollständigen Kapitalmarktes herleiten; vgl. *Abschnitt 3.3.2.3*, insbesondere Anmerkung 3.2, S. 196.

[204] Aufgrund des konstanten Dämpfungsfaktors k ist dies ein Spezialfall von *Karatzas/Lehoczky/Shreve* (1987), S. 1574; vgl. oben Fn. 202, S. 96.

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{k}e^{-kt}\ln\frac{xk}{1+(k-1)e^{-kT}}\Bigg|_0^T + e^{-kT}\ln\frac{xk}{1+(k-1)e^{-kT}} \\
&\quad +E\left[\int_0^T(-kt)e^{-kt}\,dt - kTe^{-kT}\right] - E\left[\int_0^T e^{-kt}\ln H_0(t)\,dt\right] - E\left[e^{-kT}\ln H_0(T)\right] \\
&= \frac{1}{k}\left(1+(k-1)e^{-kT}\right)\ln\frac{xk}{1+(k-1)e^{-kT}} \\
&\quad -E\left[\int_0^T e^{-kt}\ln H_0(t)\,dt + e^{-kT}\ln H_0(T)\right] - \frac{1}{k}\left(1-(kT-k^2T+1)e^{-kT}\right).
\end{aligned}
$$

Mit $H_0(.)$ als Itô-Prozess kann unter Rückgriff auf Gl. (2.30) $d\ln H_0(t) = -(r(t)+\frac{1}{2}\|\theta(t)\|^2)\,dt - \theta'(t)\,dW(t)$ geschrieben werden, so dass gilt:

$$
\begin{aligned}
&E\left[\int_0^T e^{-kt}\ln H_0(t)\,dt + e^{-kT}\ln H_0(T)\right] \\
&= E\left[\int_0^T e^{-kt}\left(-\int_0^t\left(r(s)+\tfrac{1}{2}\|\theta(s)\|^2\right)\,ds\right)\,dt + \int_0^T e^{-kt}\left(-\int_0^t\theta'(s)\,dW(s)\right)\,dt\right. \\
&\quad \left. + e^{-kT}\left(-\int_0^T\left(r(s)+\tfrac{1}{2}\|\theta(s)\|^2\right)\,ds\right) + e^{-kT}\left(-\int_0^T\theta'(s)\,dW(s)\right)\right] \\
&= E\left[\int_0^T e^{-kt}\left(-\int_0^t\left(r(s)+\tfrac{1}{2}\|\theta(s)\|^2\right)\,ds\right)\,dt + e^{-kT}\left(-\int_0^T\left(r(s)+\tfrac{1}{2}\|\theta(s)\|^2\right)\,ds\right)\right].
\end{aligned}
$$

Bei *deterministischen* Koeffizienten kann schließlich der Erwartungswertoperator weggelassen werden.

Nach der Darstellung der Portfolio-Optimierung für logarithmische Nutzenfunktionen wird im Weiteren der Fall von *Nutzenfunktionen des „power type" mit Diskontierungsterm* behandelt[205]. Hierzu wird von den folgenden Funktionen ausgegangen:

$$
U_1(t,c) = e^{-kt}\frac{1}{\beta}c^\beta, \quad U_2(\xi) = e^{-kT}\frac{1}{\beta}\xi^\beta; \quad \beta < 1,\, \beta \neq 0.
$$

Damit ist:

$$
\begin{aligned}
U_1'(t,c) &= e^{-kt}c^{\beta-1},\ U_2'(\xi) = e^{-kT}\xi^{\beta-1} \\
\text{und}\quad I_1(t,y) &= e^{\frac{kt}{\beta-1}}y^{\frac{1}{\beta-1}},\ I_2(y) = e^{\frac{kT}{\beta-1}}y^{\frac{1}{\beta-1}}.
\end{aligned}
$$

Nach Gl. (2.41) ist nunmehr:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}_{KE}(y) &= E\left[\int_0^T H_0(t)e^{\frac{k}{\beta-1}t}y^{\frac{1}{\beta-1}}H_0(t)^{\frac{1}{\beta-1}}\,dt + H_0(T)e^{\frac{k}{\beta-1}T}y^{\frac{1}{\beta-1}}H_0(T)^{\frac{1}{\beta-1}}\right] \\
&= y^{\frac{1}{\beta-1}}\underbrace{E\left[\int_0^T e^{\frac{k}{\beta-1}t}H_0(t)^{\frac{\beta}{\beta-1}}\,dt + e^{\frac{kT}{\beta-1}}H_0(T)^{\frac{\beta}{\beta-1}}\right]}_{=\mathcal{X}_{KE}(1)}.
\end{aligned}
$$

[205] Die Behandlung von „Power-type"-Nutzenfunktionen ohne Dämpfungsterm ist für den gegebenen Kontext in *Karatzas/Shreve* (1998), S. 105 f., zu finden. Das weitere Beispiel folgt dieser Quelle mit den sich aus der Hinzunahme des Dämpfungsterms ergebenden Anpassungen.

Somit ist $\mathcal{Y}_{KE}(x) = \left(\frac{x}{\mathcal{X}_{KE}(1)}\right)^{\beta-1}$ und es ergeben sich die optimalen Prozesse:

$$\begin{aligned} c_{KE}(t) &= e^{\frac{kt}{\beta-1}}(H_0(t))^{\frac{1}{\beta-1}}\left(\frac{x}{\mathcal{X}_{KE}(1)}\right),\ t\in[0,T],\\ \xi_{KE} &= e^{\frac{kT}{\beta-1}}(H_0(T))^{\frac{1}{\beta-1}}\left(\frac{x}{\mathcal{X}_{KE}(1)}\right). \end{aligned}$$

Der Vermögensprozess wird dann zunächst nach Gl. (2.46) für $t \in [0,T]$ bestimmt zu:

$$\begin{aligned} X_{KE}(t) &= \frac{1}{H_0(t)}E\left[\int_t^T H_0(s)e^{\frac{k}{\beta-1}s}(H_0(s))^{\frac{1}{\beta-1}}\left(\frac{x}{\mathcal{X}_{KE}(1)}\right)ds\right.\\ &\quad \left.+H_0(T)e^{\frac{kT}{\beta-1}}(H_0(T))^{\frac{1}{\beta-1}}\left(\frac{x}{\mathcal{X}_{KE}(1)}\right)\ \Big|\ \mathcal{F}_t\right]\\ &= \frac{1}{H_0(t)}\left(\frac{x}{\mathcal{X}_{KE}(1)}\right)E\left[\int_t^T (H_0(s))^{\frac{\beta}{\beta-1}}e^{\frac{k}{\beta-1}s}\,ds + (H_0(T))^{\frac{\beta}{\beta-1}}e^{\frac{kT}{\beta-1}}\ \Big|\ \mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

Aufgrund von Gl. (2.29) gilt für $t \in [0,T]$ $(H_0(t))^{\frac{\beta}{\beta-1}}e^{\frac{kt}{\beta-1}} = m(t)\Lambda(t)$ mit den Prozessen:

$$\begin{aligned} m(t) &:= e^{\frac{kt}{\beta-1}-\frac{\beta}{\beta-1}\int_0^t r(s)\,ds+\frac{\beta}{2(\beta-1)^2}\int_0^t\|\theta(s)\|^2\,ds},\\ \Lambda(t) &:= e^{-\frac{\beta}{\beta-1}\int_0^t\theta'(s)\,dW(s)-\frac{\beta^2}{2(\beta-1)^2}\int_0^t\|\theta(s)\|^2\,ds}. \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Itô ist hierbei $d\Lambda(t) = \Lambda(t)(-\frac{\beta}{\beta-1}\theta'(t)\,dW(t) - \frac{\beta^2}{2(\beta-1)^2}\|\theta(t)\|^2\,dt + \frac{\beta^2}{2(\beta-1)^2}\|\theta(t)\|^2\,dt) = -\Lambda(t)\frac{\beta}{\beta-1}\theta'(t)\,dW(t)$, also $\Lambda(.)$ ein Martingal[206]. Dann ist für $t \in [0,T]$:

$$X_{KE}(t) = \frac{1}{H_0(t)}\left(\frac{x}{\mathcal{X}_{KE}(1)}\right)E\left[\int_t^T m(s)\Lambda(s)\,ds + m(T)\Lambda(T)\ \Big|\ \mathcal{F}_t\right].$$

Eine explizite Herleitung des Portfolio-Prozesses für beliebige, stochastische Parameterprozesse ist im Unterschied zum Fall logarithmischer Nutzenfunktionen nicht möglich.

Werden die Parameterprozesse $r(.)$ und $\theta(.)$ jedoch als *deterministisch* vorausgesetzt, dann lässt sich ein optimaler Portfolio-Prozess wie folgt ableiten: Zunächst ist $m(.)$ ein stetiger, deterministischer Prozess, so dass mit dem (stetigen) Martingal $\Lambda(.)$ aus $E\left[e^{\frac{ks}{\beta-1}}(H_0(s))^{\frac{\beta}{\beta-1}}\ \Big|\ \mathcal{F}_t\right] = m(s)\Lambda(t)$ $(0 \le t \le s \le T)$ folgt[207]:

$$\begin{aligned} &E\left[\int_t^T (H_0(s))^{\frac{\beta}{\beta-1}}e^{\frac{k}{\beta-1}s}\,ds + (H_0(T))^{\frac{\beta}{\beta-1}}e^{\frac{kT}{\beta-1}}\ \Big|\ \mathcal{F}_t\right]\\ &= \int_t^T E\left[(H_0(s))^{\frac{\beta}{\beta-1}}e^{\frac{k}{\beta-1}s}\ \Big|\ \mathcal{F}_t\right]ds + E\left[(H_0(T))^{\frac{\beta}{\beta-1}}e^{\frac{kT}{\beta-1}}\ \Big|\ \mathcal{F}_t\right]\\ &= \Lambda(t)\left(\int_t^T m(s)\,ds + m(T)\right). \end{aligned}$$

[206] $\theta(.)$ ist dergestalt vorausgesetzt, dass auch $Z_0(.)$ ein Martingal ist.

[207] Der Erwartungswertoperator über ein Integral kann im vorliegenden Fall auf den Integranden angewendet werden; vgl. hierzu sowie zu diesbezüglichen Voraussetzungen im Einzelnen *Hoel/Port/Stone* (1972), S. 128 ff., insbes. S. 133.

Mit $\Lambda(0) = 1$ ist somit $\mathcal{X}_{KE}(1) = \int_0^T m(s)\,ds + m(T)$ eine in $t = 0$ bestimmbare Größe, und es folgt:

$$X_{KE}(t) = \frac{x}{\mathcal{X}_{KE}(1)H_0(t)}\Lambda(t)\left(\int_t^T m(s)\,ds + m(T)\right).$$

Mit dem optimalen Konsumprozess $c_{KE}(.)$ und dem optimalen Endvermögen ξ_{KE} ergibt sich für $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
M_{KE}(t) &= X_{KE}(t)H_0(t) + \int_0^t H_0(s)c_{KE}(s)\,ds \\
&= \frac{x}{\mathcal{X}_{KE}(1)}\Lambda(t)\left(\int_t^T m(s)\,ds + m(T)\right) + \frac{x}{\mathcal{X}_{KE}(1)}\int_0^t \underbrace{e^{\frac{ks}{\beta-1}}(H_0(s))^{\frac{\beta}{\beta-1}}}_{=m(s)\Lambda(s)}\,ds \\
&= \frac{x}{\mathcal{X}_{KE}(1)}\left[\Lambda(t)\left(\int_t^T m(s)\,ds + m(T)\right) + \int_0^t m(s)\Lambda(s)\,ds\right].
\end{aligned}$$

Damit ist ($t \in [0,T]$):

$$\begin{aligned}
dM_{KE}(t) &= \frac{x}{\mathcal{X}_{KE}(1)}\left[\left(\int_t^T m(s)\,ds + m(T)\right)d\Lambda(t) + \Lambda(t)(-m(t))\,dt + m(t)\Lambda(t)\,dt\right] \\
&= \frac{x}{\mathcal{X}_{KE}(1)}\left(\int_t^T m(s)\,ds + m(T)\right)\Lambda(t)\tfrac{-\beta}{\beta-1}\theta'(t)\,dW(t).
\end{aligned}$$

Für die Darstellung des Martingals $M_{KE}(.)$ über die Gleichung $M_{KE}(t) = x + \int_0^t \psi'_{KE}(s)\,dW(s)$ folgt:

$$\begin{aligned}
\psi_{KE}(t) &= \frac{x}{\mathcal{X}_{KE}(1)}\left(\int_t^T m(s)\,ds + m(T)\right)\Lambda(t)\tfrac{-\beta}{\beta-1}\theta(t) \\
&= -H_0(t)X_{KE}(t)\tfrac{\beta}{\beta-1}\theta(t), \quad t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich als optimaler Portfolio-Prozess:

$$\begin{aligned}
\pi_{KE}(t) &= (\sigma'(t))^{-1}\left(-\frac{1}{H_0(t)}H_0(t)X_{KE}(t)\tfrac{\beta}{\beta-1}\theta(t) + X_{KE}(t)\theta(t)\right) \\
&= \tfrac{1}{1-\beta}X_{KE}(t)\left(\sigma(t)\sigma'(t)\right)^{-1}\left(b(t) + \delta(t) - r(t)\mathbf{1}_n\right), \quad t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Dies entspricht einer Portfolio-Zusammenstellung im Zeitpunkt t, die allein auf Basis der in t gegebenen Parameterwerte $b = b(t)$, $\delta = \delta(t)$, $r = r(t)$ und $\sigma = \sigma(t)$ erfolgt. Insofern entspricht im Falle deterministischer Koeffizienten für die betrachteten Nutzenfunktionen des „power type“ die Lösung des dynamischen Portfolio-Problems einer myopischen Strategie. Wiederum ergänzend wird noch der Zielfunktionswert bei optimaler Prozesswahl angegeben. Es gilt mit den bisher verwendeten Prozessen $m(.)$ und $\Lambda(.)$ hierfür:

$$\begin{aligned}
V_{KE}(x) &= E\left[\int_0^T e^{-kt}\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{kt}{\beta-1}}(H_0(t))^{\frac{1}{\beta-1}}\frac{x}{\mathcal{X}_{KE}(1)}\right)^{\beta}dt\right. \\
&\qquad \left.+e^{-kT}\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{kT}{\beta-1}}(H_0(T))^{\frac{1}{\beta-1}}\frac{x}{\mathcal{X}_{KE}(1)}\right)^{\beta}\right] \\
&= \left(\frac{x}{\mathcal{X}_{KE}(1)}\right)^{\beta}\frac{1}{\beta}\left(\int_0^T m(s)\,ds + m(T)\right) = \frac{1}{\beta}x^{\beta}(\mathcal{X}_{KE}(1))^{1-\beta}. \quad \square
\end{aligned}$$

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

2.2.3.3 Nutzenoptimierung alternativ über Konsum oder Endvermögen

Es wird wiederum ein Investor mit einem Ausgangsvermögen $x > 0$ vorausgesetzt. Dieser möchte den Erwartungsnutzen aus Konsum (über den Planungszeitraum hinweg) oder alternativ den Erwartungsnutzen aus dem Endvermögen optimieren. Im ersten Fall soll ein ggf. umweltbedingt zu formulierendes Endvermögen, im zweiten Fall entsprechend ein Konsumprozess vorgegeben sein. Da der als solcher modellierte Konsum unmittelbar Nutzen stiftet und ein Endvermögen lediglich als Potential für einen jenseits des Planungszeitraumes Nutzen stiftenden (eigenen oder fremden) Konsum dient, erscheint eine Optimierung des Konsumstromes bei einem fixierten Endvermögen (ggf. gleich null) zunächst als die gegenüber der Endvermögensoptimierung bei gegebenem Konsum vorzuziehende Variante. Grundsätzlich ist dies insbesondere bei großen Planungszeiträumen plausibel, die einen entsprechend hohen Anteil am Lebenskonsumzeitraum des Investors umfassen und für die folglich gerade die Bestimmung eines (intertemporalen) Konsum(prozesse)s das Kernproblem der Investitionsentscheidung repräsentiert; u.U. kann zudem bezweckt sein, den „gesamten Lebenskonsum" zu optimieren. Das Endvermögen hat bei langen, wenn auch nicht so weit angelegten Planungszeiträumen ein hinreichend großes Konsumpotential für die Zeit nach dem Planungshorizont sicherzustellen, welche im Vergleich zu kurzen Planungszeiträumen weniger Gewicht besitzt und für die nicht zuletzt aufgrund gewisser Schwierigkeiten der Prognose individueller Bedürfnisse und äußerer Umstände, die für die Nutzenabwägung des Investors von Bedeutung sein mögen, ggf. auch ein in seiner Höhe festes Endvermögen erreicht werden soll. Die Annahme eines endlichen Planungszeitraumes behält auch dann ihre Berechtigung, wenn grundsätzlich der gesamte Lebenskonsum des Investors optimiert werden soll. Bei einem unendlichen Planungszeitraum[208] ist der maximale Konsumzeitraum zwar erfasst, aber es werden auch Konsumströme in die Optimierung einbezogen, in deren Genuss der Investor mit Sicherheit nicht mehr gelangt. Die Optimierung von Konsumbeiträgen jenseits einer bestimmten zeitlichen Schranke macht von daher wenig Sinn. Im Übrigen müsste bei solchen Betrachtungen bereits generell die Sterbewahrscheinlichkeit in die Formulierung der Nutzenfunktion eingehen. Erscheint insofern bei großen Planungszeiträumen die Entnahmeoptimierung bis zu einem endlichen Planungshorizont — ggf. mit Vorgabe eines Endvermögens — berechtigt, ist sie doch für kurze Planungszeiträume infrage zu stellen. Kurzfristige Entscheidungsprobleme der hier behandelten Art können sich dadurch ergeben, dass der Investor eine attraktive Anlage seines Vermögens sucht und dabei eine gewisse Vorstellung darüber besitzt, wie er die Unsicherheit über die Höhe des am Planungshorizont erreichten Vermögens, das zugleich sein dann für die weitere Zukunft verfügbares Konsumpotential bestimmt, bewertet. Daneben mag er eine verhältnismäßig präzise Vorstel-

[208] Der Fall eines nicht exogen vorgegebenen endlichen Planungshorizontes wurde bspw. in *Karatzas/Lehoczky/Sethi/Shreve* (1986) behandelt.

lung über seine Konsumwünsche während des Planungszeitraumes haben. In einem solchen Fall besteht das Entscheidungsproblem des Investors in der Optimierung des (zustandsabhängigen) Endvermögens am Planungshorizont, wobei für einen gegebenen, nicht notwendig deterministischen oder gar konstanten Entnahmestrom zu sorgen ist. Ein Orientierungspunkt für die Sinnhaftigkeit eines der im Folgenden zu behandelnden Optimierungsprobleme mag sich folglich aus der (ggf. abzuschätzenden) Relation ergeben, welche der für den Konsumstrom bzw. das Endvermögen bereitzustellende Betrag gegenüber dem Ausgangsvermögen aufweist. Grundsätzlich kann dabei auch die im vorigen Abschnitt behandelte simultane Optimierung von Entnahme und Endvermögen in Betracht gezogen werden. Ferner sei noch angemerkt, dass die im Folgenden behandelte Entnahmeoptimierung lediglich Nutzen aus Konsum, d.h. aus dem Verbrauch finanzieller Mittel, berücksichtigt. Hierbei wird versucht, die für einen „gewöhnlichen“ Investor nahe liegendste Problemstellung als Interpretation zugrunde zu legen. Vermögen kann allerdings auch Nutzen stiften, ohne dass es untergeht — bspw. durch den hierdurch vermittelten gesellschaftlichen Einfluss oder via Prestigezuwachs; umgekehrt kann ein (partieller) Vermögensverlust mit Prestigeeinbußen verbunden sein[209]. Derartige Nutzen stiftende Tatbestände, die nicht notwendigerweise mit einer Verminderung des Vermögens einhergehen, werden durch die hier abgebildeten Entnahmen nicht erfasst. Sie können ggf. aber Bestandteil einer Nutzenbewertung im Rahmen einer Endvermögensoptimierung sein, die auf den Nutzen eines am Planungshorizont verfügbaren Vermögensbestandes abstellt. In diese Bewertung mag auch ein Vererbungsnutzen Eingang finden, den der Investor aus der Möglichkeit der Vererbung von Vermögen an seine Nachkommen[210] (noch zu seinen Lebzeiten) zieht. Im Einzelnen sollen die verschiedenen Nutzen stiftenden Tatbestände jedoch nicht weiter erörtert werden; bezweckt ist lediglich, die für verschiedene Investoren differenzierte Sinnhaftigkeit des Einsatzes der Optimierungsprobleme zu illustrieren. Diesen wendet sich die weitere Darstellung zu, dabei voraussetzend, dass der Anwender die für ihn zutreffende Optimierungsvariante wählt.

Der *Entnahmeoptimierung bei gegebenem Endvermögen* liegt das folgende Problem zugrunde:

Problem $(\mathcal{K})$[211]:
Gegeben sei ein $\mathcal{F}_T$-messbares Endvermögen $\bar{\xi} \geq 0$, das am Planungshorizont nach sämtlichen Konsumentnahmen noch vorhanden sein soll. Für $\bar{\xi}$ gelte: $x_{\bar{\xi}} = E_0\left[\frac{\bar{\xi}}{S_0(T)}\right]$ mit $x_{\bar{\xi}} \in [0, \infty)$. Ferner sei x das Anfangsvermögen des

[209] Vgl. zu einer Erörterung unternehmerischer Präferenzstrukturen — im Kontext von Effekten bezüglich des unternehmerischen Anstrengungsverhaltens — *Moxter* (1964), hier insbes. S. 25 f.

[210] Vgl. hierzu *Becker* (1976), S. 282 ff., *Wenger* (1983), S. 211 f.

[211] Das Entnahmeproblem wird in *Karatzas/Shreve* (1998), S. 111 f., bzw. *Karatzas/Lehoczky/Shreve* (1987), S. 1565 ff., ohne Berücksichtigung eines nicht verschwindenden Endvermögens behandelt; vgl. ebenso die Darstellung bei *Elliott/Kopp* (1999), S. 258 ff.

Investors. Finde dann ein optimales Paar $(c_K, \pi_K) \in \mathcal{A}(x)$ aus einem Konsum- $(c_K(.))$ und einem zulässigen Portfolio-Prozess $(\pi_{0,K}(.), \pi'_K(.))$, für das gilt:

$$V_K(x) \quad := \quad \sup_{(c,\pi)} E\left[\int_0^T U_1(t, c(t))\, dt\right], \qquad \text{mit } (c,\pi) \in \mathcal{A}_K(x) \ \wedge \ X^{x,c,\pi}(T) = \bar{\xi} \text{ fast sicher.} \tag{2.50}$$

Dabei wird ein Zielfunktionswert von $-\infty$ wiederum ausgeschlossen durch die Bedingung $(c_K, \pi_K) \in \mathcal{A}_K(x)$ mit:

$$\mathcal{A}_K(x) := \left\{ (c,\pi) \in \mathcal{A}(x) \;\middle|\; E\left[\int_0^T \min\left[0, U_1(t, c(t))\right]\, dt\right] > -\infty \right\}. \tag{2.51}$$

Anstelle einer Restriktion $X^{x,c,\pi}(T) \geq \bar{\xi}$ wurde die Gleichheitsbedingung gewählt, da $\bar{\xi}$ auf dem vollständigen Markt mit einem Anfangsvermögen erreichbar ist, das zugleich das minimale Anfangsvermögen für alle Ansprüche $\tilde{\xi} \geq \bar{\xi}$ (fast sicher) repräsentiert und damit den größten Teil des tatsächlich vorhandenen Anfangsvermögens x für den Konsum belässt.

Aufgrund der Vollständigkeit des Marktes ist das Problem $(\mathcal{K})$ in zwei Schritten lösbar: Zunächst impliziert die Marktbedingung die Existenz eines zulässigen Portfolio-Prozesses $\bar{\pi}_K(.)$, der beim Ausgangsvermögen $x_{\bar{\xi}}$ das gewünschte Endvermögen $\bar{\xi}$ erreicht; hierfür ist $\bar{c}_K(.) \equiv 0$. $x_{\bar{\xi}}$ ist minimal in dem Sinne, dass für ein $\tilde{x} < x_{\bar{\xi}}$ die Budget-Restriktion (2.33) mit $\bar{\xi} = X(T)$ für keinen zulässigen Portfolio-Prozess erfüllt wäre[212]. Damit ergibt sich, dass für die Existenz einer Lösung des Problems $(\mathcal{K})$ notwendig $x \geq x_{\bar{\xi}}$ ist. Die Nebenbedingung $X^{x,c_K,\pi_K}(T) = \bar{\xi}$ ist folglich erfüllbar mit einem zulässigen Prozess $\pi_K(.)$, für den gilt: $(\pi_{0,K}(t), \pi'_K(t)) = (\hat{\pi}_{0,K}(t), \hat{\pi}'_K(t)) + (\bar{\pi}_{0,K}(t), \bar{\pi}'_K(t))$ $(0 \leq t \leq T)$, wobei $\bar{\pi}_K(.)$ wiederum zulässig in Bezug auf den zugehörigen Vermögensprozess $X^{x_{\bar{\xi}},0,\bar{\pi}_K}(.)$ (mit $x_{\bar{\xi}} = E_0\left[\frac{\bar{\xi}}{S_0(T)}\right] = E\left[H_0(T)\bar{\xi}\right] = \bar{\pi}_{0,K}(0) + \bar{\pi}'_K(0)\mathbf{1}_n$) ist und für den Portfolio-Prozess $\hat{\pi}_K(.)$ gilt: $X^{\hat{x},c_K,\hat{\pi}_K}(T) = 0$, fast sicher. Das Portfolio-Problem kann deshalb auch als Problem der Bestimmung eines Prozesses $\hat{\pi}_K(.)$ betrachtet werden. Dabei ist wegen $x_{\bar{\xi}} = E_0\left[\frac{\bar{\xi}}{S_0(T)}\right]$ und $1 \leq S_0(T) < \infty$ der Vermögensprozess $X^{x_{\bar{\xi}},0,\bar{\pi}_K}(.)$ mit (fast sicher) $X^{x_{\bar{\xi}},0,\bar{\pi}_K}(T) = \bar{\xi}$ (fast sicher) nach oben beschränkt. Aufgrund der verlangten Zulässigkeit von $(c_K(.), \pi_K(.))$ muss deshalb der Vermögensprozess $X^{\hat{x},c_K,\hat{\pi}_K}(.)$ nach unten beschränkt sein[213]. Ferner

[212] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 23, deren Begründung wird unten (S. 203) wiedergegeben.

[213] Die Betrachtung bezieht sich damit auf Portfolio-Prozesse $\hat{\pi}_K(.)$, für welche die Budget-Restriktion Gültigkeit besitzt; vgl. hierzu die bereits in Fn. 126, S. 65, erwähnten „doubling strategies“ für die Situationen, in denen nicht nach unten beschränkte Vermögensentwicklungen möglich sind. Im Übrigen ist der Markt ohnehin als arbitragefrei vorausgesetzt.

ist der Fall $x = x_{\bar{\xi}}$ vernachlässigbar, der letztlich bedeutet, dass keine Mittel für den Konsum bereitstehen, so dass auch nichts konsumiert werden kann[214]. Im Folgenden wird also $\hat{x} := x - x_{\bar{\xi}} > 0$ vorausgesetzt.

Ausgehend von einem Anfangsvermögen in Höhe von $\hat{x}$ kann in einem zweiten Schritt nun der Konsumstrom $c_K(.)$ für ein Endvermögen von null optimiert werden. Hierfür wird analog der Vorgehensweise in *Abschnitt 2.2.3.2* die Betragsfunktion $\mathcal{X}_K(y)$ mit der bereits eingeführten Funktion $I_1(.,.)$ wie folgt definiert:

$$\mathcal{X}_K(y) := E\left[\int_0^T H_0(t) I_1(t, yH_0(t))\,dt\right], \quad y \in \mathbb{R}_{++}, \tag{2.52}$$

und es wird gefordert[215]:

Annahme: $\mathcal{X}_K(y) < \infty, \quad \forall y \in \mathbb{R}_{++}$.

Als Kandidat für den optimalen Konsumprozess $c_K(.)$ ergibt sich aus der Lagrange-Funktion:

$$L_K(c, \bar{\xi}, y) := E\left[\int_0^T U_1(t, c(t))\,dt\right] + y\left(\underbrace{x - E\left[H_0(T)\bar{\xi}\right]}_{=\hat{x}} - E\left[\int_0^T H_0(t)c(t)\,dt\right]\right)$$

zunächst $c(t) = I_1(t, yH_0(t))\,(t \in [0,T])$[216] und in Verbindung mit der Bedingung, dass die Budget-Restriktion zum Anfangsvermögen $\hat{x}$ mit Gleichheit erfüllt ist:

$$c_K(t) = I_1(t, \mathcal{Y}_K(\hat{x})H_0(t)), \quad t \in [0,T],$$

wobei $\mathcal{Y}_K : (0,\infty) \to (0, z_K)$ die Umkehrfunktion zu $\mathcal{X}_K(.)$ repräsentiert; z_K ist analog z_{KE} gemäß Gl. (2.42) definiert.

Analog dem Beweis zu Satz 2.18 kann gezeigt werden, dass $E\left[\int_0^T \min\left[0, U_1(t, c_K(t))\right]\,dt\right] > -\infty$ ist und dass der nicht negative Konsumprozess $c_K(.)$ zusammen mit dem ihn realisierenden Portfolio-Prozess $\hat{\pi}_K(.)$ zu einem höheren Zielfunktionswert führt als ein beliebiges Prozesspaar

[214] Dabei wird jedoch der Aspekt vernachlässigt, dass wegen des zu erzielenden (ggf. fast sicher) positiven Endvermögens (stets) ein verschuldungsfähiges Vermögen vorhanden ist, so dass der Prozess $\hat{\pi}_K(.)$ zusammen mit $c_K(.)$ a priori nicht zulässig bezüglich des dadurch generierten Vermögensprozesses $X^{\hat{x},c_K,\hat{\pi}}(.)$ bei $\hat{x} = x - x_{\bar{\xi}}$ zu sein braucht. Dieser Aspekt ist jedoch auch im Fall $x > x_{\bar{\xi}}$, zumindest implizit, zu berücksichtigen, weshalb auf eine eigenständige Diskussion für $x = x_{\bar{\xi}}$ verzichtet wird. Das Postulat, dass in diesem Fall ein Konsum von null folgt, ergibt sich ebenfalls aus dieser Erörterung, wobei noch der Fall zu unterscheiden ist, dass das Prozesspaar $(c_K(t), \pi_K(t))$ $(t \in [0,T])$ für $c_K(.) \equiv 0$ evtl. nicht in der Menge $\mathcal{A}_K(\hat{x})$ ist und dann keine Lösung existiert.

[215] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 111; vgl. auch die Anmerkung zur Annahme bezüglich $\mathcal{X}_{KE}(.)$ in Fn. 191, S. 90.

[216] Es ist analog wie bei der simultanen Konsum- und Endvermögensoptimierung vorzugehen; vgl. S. 91.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

$(\tilde{c}(.), \tilde{\pi}(.))$, für das $E[\int_0^T H_0(t)\tilde{c}(t)\,dt] \le \hat{x}$ (neben: $E\left[\int\limits_0^T \min\left[0, U_1(t, \tilde{c}(t))\right]\,dt\right]$ $> -\infty$ und $X^{\hat{x},\tilde{c},\tilde{\pi}}(.)$ ist nach unten beschränkt) gilt.

Aufgrund der Vollständigkeit des Kapitalmarktes ist zudem $(c_K(.), \hat{\pi}_K(.)) \in \mathcal{A}(\hat{x})$. Damit ist $(\pi_{0,K}(t), \pi'_K(t)) = (\hat{\pi}_{0,K}(t), \hat{\pi}'_K(t)) + (\bar{\pi}_{0,K}(t), \bar{\pi}'_K(t))$ $(0 \le t \le T)$ ein zulässiger Portfolio-Prozess, der das Problem $(\mathcal{K})$ löst.

Bei der Bestimmung von $\hat{\pi}_K(.)$ kann wiederum auf die Ausführungen des vorangegangen Abschnittes verwiesen werden. In analoger Anwendung von Satz 2.19 ist[217]:

$$\hat{X}_K(t) = \frac{1}{H_0(t)} E\left[\int_t^T H_0(s)c_K(s)\,ds \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right], \quad t \in [0,T], \tag{2.53}$$

der Vermögensprozess zu $(c_K(.), \hat{\pi}_K(.))$ und der Portfolio-Prozess selbst ist für $t \in [0,T]$ gegeben durch:

$$\hat{\pi}_K(t) = (\sigma'(t))^{-1}\left(\frac{\hat{\psi}_K(t)}{H_0(t)} + \hat{X}_K(t)\theta(t)\right) \tag{2.54}$$

mit dem Prozess $\hat{\psi}_K(.)$ aus der Martingaldarstellung von:

$$\hat{M}_K(t) := E\left[\int_0^T H_0(s)c_K(s)\,ds \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right], \quad t \in [0,T], \tag{2.55}$$

mit $\int_0^T ||\hat{\psi}_K(t)||^2\,dt < \infty$.

Der Vermögensprozess zum Konsum-/Portfolio-Prozesspaar $(c_K(.), \pi_K(.))$ erhält damit die Gestalt:

$$X_K^{x,c_K,\pi_K}(t) = \frac{1}{H_0(t)}\left(E\left[\int_t^T H_0(s)c_K(s)\,ds \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right] + E\left[H_0(T)\bar{\xi} \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right]\right),\ t \in [0,T]. \tag{2.56}$$

Bemerkung: Die Entnahmeoptimierung ist auch dann anwendbar, wenn anstelle des vorgegebenen Endvermögens bzw. zusätzlich zu diesem noch ein Mindestkonsumprozess $\bar{c}(.)$ zu erfüllen ist, über den hinaus erst Nutzenstiftung stattfindet. Statt des (ggf. auch zusätzlich zu dem) für das vorgegebene Endvermögen bereitzustellenden Betrages $\bar{x}_\xi = E_0\left[\frac{\bar{\xi}}{S_0(T)}\right]$ ist dann der Betrag $\breve{x} = E_0\left[\int_0^T \frac{\bar{c}(t)}{S_0(t)}\,dt\right]$ vom vorhandenen Anfangsvermögen $x\,(> \breve{x}[+\bar{x}])$ zu reservieren.

---

[217] Vgl. auch *Karatzas/Shreve* (1998), S. 112.

Analog der Entnahmeoptimierung bei gegebenem Endvermögen erfolgt die *Optimierung des Endvermögens bei gegebenen Entnahmen*:

Problem $(\mathcal{E})$[218]:

Gegeben sei ein messbarer, nicht negativer Entnahmestrom $\int_0^T \bar{c}(t)\,dt$, der die vorgegebenen Konsumentnahmen während des Planungszeitraumes repräsentiert. Für ihn gelte: $x_{\bar{c}} = E_0\left[\int_0^T \frac{\bar{c}(t)}{S_0(t)}\,dt\right]$ mit $x_{\bar{c}} \in [0,\infty)$. Finde dann ein optimales Paar $(\bar{c},\pi_E) \in \mathcal{A}(x)$, d.h. (noch) einen zulässigen Portfolio-Prozess $(\pi_{0,E}(.),\pi'_E(.))$, für den gilt:

$$V_E(x) := \sup_{(\bar{c},\pi)\in\mathcal{A}_E(x)} E\left[U_2(X^{x,\bar{c},\pi}(T))\right], \tag{2.57}$$

wobei

$$\mathcal{A}_E(x) := \left\{(\bar{c},\pi) \in \mathcal{A}(x) \mid E\left[U_2(X^{x,\bar{c},\pi}(T))\right] > -\infty\right\}. \tag{2.58}$$

Analog zur Entnahmeoptimierung wurde bereits vorausgesetzt, dass das optimale Konsum-/Portfolio-Prozesspaar lediglich die verlangten Entnahmen $\int_0^T \bar{c}(t)\,dt$ und keine darüber hinausgehenden beinhaltet. Für die Existenz eines (nicht trivialen) Optimierungsproblems wird im Weiteren $\hat{x} := x - x_{\bar{c}} > 0$ als positives Ausgangsvermögen, welches in ein optimales Endvermögen transformiert werden soll, vorausgesetzt.

Die Lösung des Problems $(\mathcal{E})$ erfolgt analog der des Problems $(\mathcal{K})$, wobei wiederum auf die Vorgehensweise zur Lösung von Problem $(\mathcal{KE})$ aus *Abschnitt 2.2.3.2* zurückzugreifen ist. Die Betragsfunktion $\mathcal{X}_E(y)$ (mit Umkehrfunktion $\mathcal{Y}_E(x) : (0,\infty) \to (0,z_E)$ — z_E analog Gl. (2.42) definiert) hat nunmehr die Gestalt:

$$\mathcal{X}_E(y) := E\left[H_0(T)I_2(yH_0(T))\right], \quad y \in \mathbb{R}_{++}; \tag{2.59}$$

für sie wird verlangt[219]:

Annahme: $\mathcal{X}_E(y) < \infty, \quad \forall y \in \mathbb{R}_{++}$.

Als optimales Endvermögen ergibt sich:

$$\xi_E = I_2(\mathcal{Y}_E(\hat{x})H_0(T)).$$

Der optimale Portfolio-Prozess $\pi_E(.)$ setzt sich additiv zusammen aus dem Prozess $\bar{\pi}_E(.)$, der nunmehr der Realisierung des festgelegten Konsums $\bar{c}(.)$ dient, und dem Prozess $\hat{\pi}_E(.)$, der im Hinblick auf den Erwartungsnutzen aus dem Endvermögen bei verschwindenden Konsumentnahmen optimal ist $((\pi_{0,E}(t),\pi'_E(t)) = (\hat{\pi}_{0,E}(t),\hat{\pi}'_E(t)) + (\bar{\pi}_{0,E}(t),\bar{\pi}'_E(t))\ (0 \leq t \leq T))$. Der Vermögensprozess zum (optimalen) Portfolioprozess $\hat{\pi}_K(.)$ beim Anfangsvermögen $\hat{x}$ ist[220]:

$$\hat{X}_E(t) = \frac{1}{H_0(t)} E\left[H_0(T)\xi_E \mid \mathcal{F}_t\right]; \tag{2.60}$$

---

[218] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 114 f., bzw. *Karatzas/Lehoczky/Shreve* (1987), S. 1567 ff., dargestellt auch bei *Elliott/Kopp* (1999), S. 263 ff., jeweils ohne vorgegebenen Entnahmestrom.

[219] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 111.

[220] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 114.

ferner ist der Portfolio-Prozess $\hat{\pi}(.)$ für $t \in [0,T]$ gegeben durch:

$$\hat{\pi}_E(t) = (\sigma'(t))^{-1} \left(\frac{\hat{\psi}_E(t)}{H_0(t)} + \hat{X}_E(t)\theta(t) \right) \tag{2.61}$$

mit dem Prozess $\hat{\psi}_E(.)$ aus der Martingaldarstellung von:

$$\hat{M}_E(t) := E\left[H_0(T)\xi_E \mid \mathcal{F}_t\right] = H_0(t)\hat{X}_E(t), \quad t \in [0,T], \tag{2.62}$$

wobei $\int_0^T ||\hat{\psi}_E(t)||^2 \, dt < \infty$ ist. Der Vermögensprozess zum Portfolio-Prozess $\pi_E(.)$ sieht danach wie folgt aus:

$$X_E^{x,\bar{c},\pi_E}(t) = \frac{1}{H_0(t)} \left(E\left[\int_t^T H_0(s)\bar{c}(s)\, ds \mid \mathcal{F}_t \right] + E\left[H_0(T)\xi_E \mid \mathcal{F}_t\right] \right), \quad t \in [0,T]. \tag{2.63}$$

Anstelle eines vorgegebenen Konsumstromes, resp. zusätzlich zu einem solchen, kann auch ein $\mathcal{F}_T$-messbares Mindestendvermögen $\bar{\xi}$ vorgegeben sein, bei dessen Überschreiten erst ein Nutzenbeitrag entsteht. Die Konsumoptimierung bei gegebenem Endvermögen (und Mindestkonsumstrom) sowie die Endvermögensoptimierung bei gegebenem Entnahmestrom (und Mindestendvermögen) sollen jeweils an einem Beispiel, das an Beispiel 2.5 anknüpft, aufgegriffen werden.

Beispiel 2.6 *zu Konsumoptimierung und zu Endvermögensoptimierung*
Gegeben seien ein Mindestkonsum(prozess) $\bar{c}(.)$ und ein Mindestendvermögen $\bar{\xi}$ — jeweils geeignet gewählt —, so dass gilt: $\bar{x} = E\left[\int_0^T H_0(t)\bar{c}(t)\, dt + H_0(T)\bar{\xi}\right]$. Das Anfangsvermögen x des Investors sei größer als die zur Deckung der Minimalanforderungen notwendige Anfangsausstattung: $\hat{x} := x - \bar{x} > 0$.

Für das *Konsumoptimierungsproblem* werde eine logarithmische Nutzenfunktion mit konstantem Dämpfungsterm unterstellt, so dass sich Folgendes ergibt:

$U_1(t,c) = e^{-kt}\ln c;\ U_1'(t,c) = e^{-kt}\frac{1}{c};\ I_1(t,y) = e^{-kt}\frac{1}{y};$

$\mathcal{X}_K(y) = E\left[\int\limits_0^T H_0(t)e^{-kt}\frac{1}{yH_0(t)}\, dt\right] = \frac{1}{yk}\left(1-e^{-kT}\right);\ \mathcal{Y}_K(x) = \frac{1}{xk}\left(1-e^{-kT}\right).$

Der Nutzen stiftende, optimale Konsumprozess hat dann die Gestalt:

$$c_K(t) = I_1(t,\mathcal{Y}_K(\hat{x})H_0(t)) = e^{-kt}\frac{\hat{x}k}{\left(1-e^{-kT}\right)H_0(t)}, \quad t \in [0,T].$$

(Der gesamte Konsumprozess ergibt sich folglich zu $c(.) = c_K(.) + \bar{c}(.)$.) Der zum Konsumprozess $c_K(.)$ gehörende Vermögensprozess ist ($t \in [0,T]$):

$$\hat{X}_K(t) = \frac{1}{H_0(t)}E\left[\int\limits_t^T H_0(s)c_K(s)\, ds \mid \mathcal{F}_t\right] = \frac{\hat{x}}{H_0(t)}\frac{e^{-kt}-e^{-kT}}{1-e^{-kT}}.$$

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Das Martingal $\hat{M}_K(.)$ ist wie bereits in Beispiel 2.5 eine Konstante, denn für $t \in [0,T]$ gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{M}_K(t) &= E\left[\int_0^T H_0(s)c_K(s)\,ds \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right] \\
&= E\left[\int_t^T H_0(s)c_K(s)\,ds \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right] + \int_0^t H_0(s)c_K(s)\,ds \\
&= E\left[\int_t^T H_0(s)e^{-ks}\frac{\hat{x}k}{\left(1-e^{-kT}\right)H_0(s)}\,ds \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right] \\
&\quad + \int_0^t H_0(s)e^{-ks}\frac{\hat{x}k}{\left(1-e^{-kT}\right)H_0(s)}\,ds \\
&= \hat{x}.
\end{aligned}$$

Folglich ist $\hat{\psi}_E(.) \equiv \mathbf{0}_n$. Für die zu optimierende Portfolio-Prozesskomponente $\hat{\pi}_K(.)$ gilt damit:

$$\hat{\pi}_K(t) = (\sigma'(t))^{-1}\hat{X}_K(t)\theta(t) = (\sigma'(t))^{-1}\frac{\hat{x}}{H_0(t)}\frac{e^{-kt}-e^{-kT}}{1-e^{-kT}}\theta(t), \quad t \in [0,T].$$

Die Bestimmung des optimalen Portfolio-Prozesses setzt folglich voraus, dass das relevante Ausgangsvermögen $\hat{x}$ berechenbar ist. Dazu muss der für die Mindestanforderungen in $t=0$ notwendige Betrag $\bar{x}$ ermittelt werden können. Dies ist jedoch nicht ohne eine zusätzliche Spezifizierung der Prozesse möglich. Deshalb sei *angenommen*, dass der risikolose Zinssatz-Prozess $r(.)$ deterministisch und die Konsum- bzw. Endvermögensvorgaben jeweils Konstanten seien ($\bar{c}(.) \equiv \bar{c}$, $\bar{\xi}$ konstant).

Zum gesuchten Portfolio-Prozess $\bar{\pi}_K(.)$ kann der folgende Vermögensprozess angegeben werden:

$$\bar{X}_K(t) = \frac{1}{H_0(t)}E\left[\int_t^T H_0(s)\bar{c}(s)\,ds + H_0(T)\bar{\xi} \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right], \quad t \in [0,T],$$

welcher sich nach Voraussetzung (insbesondere der Martingaleigenschaft von $Z_0(.)$) vereinfachen lässt zu:

$$\begin{aligned}
\bar{X}_K(t) &= \frac{1}{H_0(t)}\left(\int_t^T E\left[Z_0(s) \mid \mathcal{F}_t\right]\frac{\bar{c}}{S_0(s)}\,ds + E\left[Z_0(s) \mid \mathcal{F}_t\right]\frac{\bar{\xi}}{S_0(T)}\right) \\
&= S_0(t)\left(\bar{c}\int_t^T \frac{1}{S_0(s)}\,ds + \bar{\xi}\frac{1}{S_0(T)}\right), \quad t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Ferner ist folgendes Martingal gegeben ($t \in [0,T]$):

$$\begin{aligned}
\bar{M}_K(t) &= E\left[\int_0^T H_0(s)\bar{c}(s)\,ds + H_0(T)\bar{\xi} \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right] \\
&= \bar{c}\int_0^t H_0(s)\,ds + \bar{c}\int_t^T E\left[H_0(s) \mid \mathcal{F}_t\right]\,ds + \bar{\xi}E\left[H_0(T) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \bar{c}\int_0^t H_0(s)\,ds + Z_0(t)\left(\bar{c}\int_t^T \frac{1}{S_0(s)}\,ds + \bar{\xi}\frac{1}{S_0(T)}\right).
\end{aligned}$$

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Für dieses gilt mit $dZ_0(t) = -Z_0(t)\theta'(t)\,dW(t)$:

$$\begin{aligned} d\bar{M}_K(t) &= \left(\bar{c}H_0(t) - \bar{c}Z_0(t)\frac{1}{S_0(t)}\right) dt + \left(\bar{c}\int_t^T \frac{1}{S_0(s)}\,ds + \bar{\xi}\frac{1}{S_0(T)}\right) dZ_0(t) \\ &= -Z_0(t)\left(\bar{c}\int_t^T \frac{1}{S_0(s)}\,ds + \bar{\xi}\frac{1}{S_0(T)}\right)\theta'(t)\,dW(t), \quad t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Für den Integranden-Prozess in der Martingaldarstellung von $\bar{M}_K(.)$ ist damit:

$$\bar{\psi}_K(t) = -Z_0(t)\left(\bar{c}\int_t^T \frac{1}{S_0(s)}\,ds + \bar{\xi}\frac{1}{S_0(T)}\right)\theta'(t), \quad t \in [0,T],$$

so dass der zugehörige Portfolio-Prozess analog Gl. (2.47) für $t \in [0,T]$ lautet:

$$\bar{\pi}_K(t) = (\sigma'(t))^{-1}\left(-\frac{Z_0(t)}{H_0(t)}\left(\bar{c}\int_t^T \frac{1}{S_0(s)}\,ds + \bar{\xi}\frac{1}{S_0(T)}\right)\theta(t) + \bar{X}_K(t)\theta(t)\right) = 0.$$

Vollständig formuliert ist der Portfolio-Prozess somit gegeben als $(\bar{\pi}_{0,K}(t), \bar{\pi}'_K(t)) = (\bar{X}_K(t),\, 0)$ $(t \in [0,T])$. Dies entspricht der Anlage des gesamten Vermögens im risikolosen Bond. Der Portfolio-Prozess spiegelt hierdurch wider, dass die Auszahlungsanforderungen in Gestalt des Konsumprozesses $\bar{c}(.)$ sowie des Endvermögens $\bar{\xi}$ Konstanten sind und beide Komponenten deshalb bei sämtlichen Umweltentwicklungen denselben Wert aufweisen müssen. Mindestentnahme und Mindestendvermögen sind damit als risikolos vorgegeben. Die Erfüllung dieser Vorgabe ist nur mit einer risikolosen Anlage des hierfür in $t = 0$ notwendigen Betrages $\bar{x}$ zu gewährleisten. Darüber hinaus ist die Bestimmung des Betrages $\bar{x}$ hier nur möglich, weil der Zinsprozess deterministisch ist. Bei einem sich stochastisch entwickelnden risikolosen Zinssatz[221] wüsste man in $t = 0$ nicht mit Sicherheit, welcher Betrag für die fixierten Entnahmen und das vorgegebene Endvermögen bereitzustellen ist. Für den resultierenden Portfolio-Prozess ergibt sich für das Beispiel nun $\pi_K(t) = \hat{\pi}_K(t)$ sowie $\pi_{0,K}(t) = \bar{X}_K(t) + \hat{X}_K(t) - \pi'_K(t)\mathbf{1}_n$ $(t \in [0,T])$.

Im zweiten Teil des Beispieles geht es um das Problem der *Endvermögensoptimierung*, für das von einer Nutzenfunktion vom „power type“ und den folgenden daran anknüpfenden Funktionen ausgegangen wird[222]:

$$\begin{aligned} &U_2(\xi) = \tfrac{1}{\beta}\xi^\beta\ (\beta < 1,\ \beta \neq 0);\ U_2'(\xi) = \xi^{\beta-1};\ I_2(y) = y^{\frac{1}{\beta-1}}; \\ &\mathcal{X}_E(y) = E\left[H_0(T)I_2(yH_0(T))\right] = y^{\frac{1}{\beta-1}}E\left[(H_0(T))^{\frac{\beta}{\beta-1}}\right] = y^{\frac{1}{\beta-1}}\mathcal{X}_E(1); \\ &\mathcal{Y}_E(x) = \left(\frac{\hat{x}}{\mathcal{X}_E(1)}\right)^{\beta-1} \end{aligned}$$

[221] Der Prozess $r(.)$ beschreibt einen risikolosen Bond, sofern er vorhersagbar ist. Hierbei bezieht sich die „Risikolosigkeit“ auf einen infinitesimalen Anlagezeitraum.

[222] Ein Dämpfungsterm entfällt. Bei gegebenen Parametern k und T würde die Erweiterung der nachfolgend aufgeführten Funktion vom „power type“ um den Faktor $e^{-kT} > 0$ nur eine positiv affine Transformation der Nutzenfunktion bewerkstelligen, welche jedoch dieselbe Präferenzordnung implizieren würde; vgl. *v. Neumann/Morgenstern* (1973), S. 25.

Das optimale Endvermögen (ohne Mindestendvermögen) ist nun:

$$\xi_E = I_2(\mathcal{Y}_E(\hat{x})H_0(T)) = \left(\frac{x}{\mathcal{X}_E(1)}\right)(H_0(T))^{\frac{1}{\beta-1}}.$$

Als Vermögensprozess ergibt sich:

$$\begin{aligned}\hat{X}_E(t) &= \frac{1}{H_0(t)}E\left[H_0(T)\xi_E \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \frac{\hat{x}}{H_0(t)\mathcal{X}_E(1)}E\left[(H_0(T))^{\frac{\beta}{\beta-1}} \mid \mathcal{F}_t\right], \quad t \in [0,T].\end{aligned}$$

Analog der Vorgehensweise in Beispiel 2.5 werden die folgenden Prozesse verwendet ($t \in [0,T]$):

$$\begin{aligned}\tilde{m}(t) &:= e^{-\frac{\beta}{\beta-1}\int_0^t r(s)\,ds+\frac{\beta}{2(\beta-1)^2}\int_0^t \|\theta(s)\|^2\,ds}, \\ \Lambda(t) &:= e^{-\frac{\beta}{\beta-1}\int_0^t \theta'(s)\,dW(s)-\frac{\beta^2}{2(\beta-1)^2}\int_0^t \|\theta(s)\|^2\,ds},\end{aligned}$$

wobei das Martingal $\Lambda(.)$ unmittelbar dem genannten Beispiel entnommen ist, so dass wiederum $d\Lambda(t) = -\Lambda(t)\frac{\beta}{\beta-1}\theta'(t)\,dW(t)$ sowie $\Lambda(0) = 1$ vorausgesetzt werden kann. Damit ist $E\left[(H_0(T))^{\frac{\beta}{\beta-1}} \mid \mathcal{F}_t\right] = E\left[\tilde{m}(T)\Lambda(T) \mid \mathcal{F}_t\right]$.

Um einen Portfolio-Prozess explizit herleiten zu können, sind weitere Annahmen bezüglich der Parameterprozesse notwendig. Im Folgenden wird deshalb wieder von *deterministischen* Parameterprozessen ausgegangen. Dann gilt für $t \in [0,T]$:

$$E\left[\tilde{m}(T)\Lambda(T) \mid \mathcal{F}_t\right] = \Lambda(t)\tilde{m}(T) \quad \text{sowie} \quad \mathcal{X}_E(1) = \Lambda(0)\tilde{m}(T) = \tilde{m}(T).$$

Der Vermögensprozess stellt sich nun dar als:

$$\hat{X}_E(t) = \frac{\hat{x}}{H_0(t)\tilde{m}(T)}\Lambda(t)\tilde{m}(T) = \hat{x}\frac{\Lambda(t)}{H_0(t)}, \quad t \in [0,T].$$

Für das Martingal $\hat{M}_E(.)$ gilt für $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}\hat{M}_E(t) &= H_0(t)\hat{X}_E(t) = \hat{x}\Lambda(t) \quad \text{und} \\ d\hat{M}_E(t) &= \hat{x}\,d\Lambda(t) = -\hat{x}\Lambda(t)\tfrac{\beta}{\beta-1}\theta'(t)\,dW(t),\end{aligned}$$

so dass $\hat{\psi}_E(t) = -\hat{x}\Lambda(t)\dfrac{\beta}{\beta-1}\theta(t) = -\dfrac{\beta}{\beta-1}H_0(t)\hat{X}_E(t)\theta(t)$ und schließlich

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_E(t) &= (\sigma'(t))^{-1}\left(-\frac{\beta}{\beta-1}H_0(t)\hat{X}_E(t)\theta(t)\frac{1}{H_0(t)} + \hat{X}_E(t)\theta(t)\right) \\ &= (\sigma'(t))^{-1}\frac{1}{1-\beta}\hat{X}_E(t)\theta(t).\end{aligned}$$

Voraussetzung für die Bestimmung des optimalen Portfolio-Prozesses ist, dass das für den zu optimierenden Teil zur Verfügung stehende Anfangsvermögen $\hat{x}$ bekannt ist. Bei konstanten $\bar{c}(.) \equiv \bar{c}$ und $\bar{\xi}$ kann $\hat{x}$ wie im ersten Teil dieses Beispieles ermittelt werden. Es gilt dann analog $\bar{\pi}_E(.) = 0$ sowie $\pi_E(t) = \hat{\pi}_E(t)$ und $\pi_{0,E}(t) = \bar{X}_E(t) + \hat{X}_E(t) - \pi_E'(t)\mathbf{1}_n$ ($t \in [0,T]$). $\square$

Der Fall einer Entnahmeoptimierung bei einem vorgegebenen, konstanten Mindestkonsumstrom und ohne Mindestendvermögen (Problem $(\mathcal{E})$ mit $\bar{c}(.) = \bar{c}$, $\bar{\xi} = 0$) ist äquivalent zur Entnahmeoptimierung mit einer Nutzenfunktion $U(c - \bar{c})$, deren Definitionsbereich durch $(\bar{c}, \infty)$ bzw. $[\bar{c}, \infty)$ gegeben ist und folglich nicht in die Klasse der hier betrachteten Nutzenfunktionen fällt. Das Problem entspricht der Entnahmeoptimierung mit Erhaltungskonsum, wie sie in *Karatzas/Shreve* (1998), S. 113 f., dargestellt ist. Analoges gilt für die Vorgabe eines deterministischen Mindestendvermögens im Rahmen einer Endvermögensoptimierung bei vorgegebenem Konsum von null, wie bei *Karatzas/Shreve* (1998), S. 115 f., beschrieben (Portfolio-Versicherung). Beide Optimierungsprobleme sind folglich Spezialfälle der in diesem Abschnitt behandelten Entnahme- bzw. Endvermögensoptimierung mit (allgemeinen) Mindestkonsum- oder/und Mindestendvermögensvorgaben[223].

Damit ist die Behandlung der Optimierungsprobleme auf vollständigen Kapitalmärkten in ihrer bisher eingeführten, allgemeinen Form im Wesentlichen abgeschlossen. Der nachfolgende Abschnitt dient der Ergänzung der Rahmenbedingungen um den Fall von Steuern auf Vermögenszuwächse. Dem schließt sich eine Darstellung des Spezialfalles deterministischer Parameterprozesse an.

2.2.3.4 Ergänzung der Idealmarktbedingungen um ein Steuersystem

Gegenstand dieses Abschnittes ist die Darstellung der dynamischen Portfolio-Optimierung unter den idealen Marktbedingungen des *Abschnittes 2.1.2*, welche nunmehr durch ein Steuersystem ergänzt werden. Hierfür wird im Folgenden zunächst das Steuersystem charakterisiert. Daraus leitet sich eine modifizierte Vermögensgleichung ab, die letztlich zu veränderten optimalen Portfolio-Prozessen im Rahmen einer Entnahme- und/oder Endvermögensoptimierung führt.

Annahmen: Steuersystem $\mathcal{S}$

- Es werden lediglich *Ertrag*steuern betrachtet, denen in kumulierter Wirkung ein konstanter, effektiver Ertragsteuersatz st zugeordnet wird. Die Steuer ergibt sich durch Multiplikation von st mit der Steuerbemessungsgrundlage.

- Die Bemessungsgrundlage entspricht der Reinvermögensänderung aufgrund von Anlagen in den Investitionsobjekten (Long-Positionen in Bond, Aktien) und Finanzierungen (festverzinsliche Verschuldung durch Bondemission, Aktienleerverkäufe) und entspricht der Summe aus Wertänderungen und Ausschüttungen. Die Wertänderungen bestimmen sich dabei nach

[223] Mit stochastischen derartigen Vorgaben befasst sich demgegenüber *Bardhan* (1994) in dem komplexeren Kontext unvollständiger Kapitalmärkte.

Marktwerten, d.h. „Abschreibungen" und „Zuschreibungen" werden durch Marktwertänderungen von Vermögens- und Schuldpositionen implizit erfasst. (Konsum-)Entnahmen werden nicht besteuert, ebenso wenig Rückzahlungen von Anlagen oder Finanzierungen. Freibeträge oder Freigrenzen bleiben unberücksichtigt.

- Es wird von zeitstetiger Besteuerung ausgegangen[224]. Dabei erfolgt ein unbegrenzter und sofortiger Verlustausgleich.

Mit den aufgeführten Annahmen wird zumindest hinsichtlich ihrer grundsätzlichen Ausrichtung tendenziell eine Annäherung der hier unterstellten Besteuerung an bestehende Steuersysteme gesucht. Alternativ, hier also nicht gewählt, könnte auch ein „theoretisches" Steuersystem als Vorbild dienen, welches bestimmte Postulate, wie bspw. Investitionsneutralität, erfüllt[225]. Da der Anwendungsaspekt der Optimierungskalküle und nicht etwa die Untersuchung verschiedener Steuersysteme selbst im Mittelpunkt steht, ist jedoch eine Orientierung an (aus Theoriesicht u.U. „fragwürdigen") Gegebenheiten angezeigt und folglich der erste Weg zu wählen. Da aber insbesondere aus Gründen der Umsetzbarkeit in das zeitkontinuierliche Marktmodell immer noch diverse Vereinfachungen gegenüber realen Steuersystemen, wie im Besonderen auch dem deutschen, unvermeidlich sind, kann die Annäherung an das gesteckte Ziel allerdings nur grob sein. Vor diesem Hintergrund soll das Annahmensystem kurz diskutiert und bereits mit Blick auf Umsetzungserfordernisse in gewisser Weise gerechtfertigt werden. Als Referenz dient dabei das *deutsche Steuerrecht.*

Die Annahme eines konstanten Steuersatzes kann unter zwei Blickwinkeln betrachtet werden. Zunächst blendet ein von der Höhe des Einkommens bzw. allgemeiner der Bemessungsgrundlage unabhängiger, also bezüglich $_{\triangle}X$ konstanter Steuersatz Effekte einer progressiven Besteuerung aus. Dort wo diese keine Rolle spielt, wie bspw. wenn die Steuer nur auf Ebene einer Körperschaft betrachtet wird, beinhaltet diese Prämisse somit auch keine Einschränkung gegenüber realen Verhältnissen. Für die hier betrachtete dynamische Portfolio-Optimierung würde dieser Fall insbesondere dann eintreten, wenn das Portfolio das Vermögen einer Kapitalgesellschaft repräsentiert, dessen (nicht durch Entnahmen/Ausschüttungen induzierte) Änderung einer proportionalen, definitiv wirkenden Körperschaftsteuer unterworfen wäre und die Betrachtung

[224] Vgl. auch *Niemann* (1999), S. 355, im Kontext der Besteuerung einer Realoption.
[225] Zumindest in Bezug auf die meisten Staaten, für die eine Anwendung der hier behandelten Investitionsprobleme in Betracht kommt, sind die gewissen Neutralitätspostulaten genügenden Steuersysteme nicht realisiert. Zum deutschen Steuersystem vgl. diesbezüglich *Wenger* (1986), S. 133 ff. Eine gewisse Ausnahme bildet Kroatien, in dem eine zinsbereinigte Steuer auf Unternehmensgewinne eingeführt wurde; vgl. *Schmidt/Wissel/Stöckler* (1996). Zu einer Diskussion idealer Steuersysteme vgl. *Wenger* (1983), *Wagner/Schwinger* (1991) und *Schwinger* (1992). Zu verschiedenen Ausprägungen der Entscheidungsneutralität von Steuersystemen vgl. die konzise Beschreibung in *Rümmele* (1998), S. 32 ff.

hierauf beschränkt bliebe[226]. Vom Grundsatz her entspricht dieser Sachverhalt für Kapitalgesellschaften dem deutschen Steuersystem nach Einführung des Halbeinkünfteverfahrens, nach welchem Unternehmensgewinne über eine proportionale Körperschaftsteuer mit einem Satz von 25 % besteuert werden (für Veranlagungszeitraum 2003 einmalig: 26,5 %); hinzu kommt ein Solidaritätszuschlag in Höhe von 5,5 % auf die Körperschaftsteuer, wobei die Gewinne vor Körperschaftsteuer und Solidaritätszuschlag bereits mit einer Gewerbesteuer in einer ortsabhängigen Höhe besteuert worden sind[227]. Wird ein Entnahmeziel (Entnahmeoptimierung, simultane Entnahme- und Endvermögensoptimierung) unterstellt, erscheint allerdings die Realisierung der Portfolio-Verwaltung im Rahmen einer Kapitalgesellschaft als nicht un-

[226] Entnahmen, die dann auf Ebene des Unternehmenseigners ggf. noch einer persönlichen Einkommensteuer unterliegen, würden das Vermögen der Unternehmung lediglich „brutto“ berühren; ihre Wirkung auf die Konsumpräferenz wäre in der Nutzenfunktion des Investors zu erfassen. Allerdings entsteht dabei das Problem, dass in einem Konsum berücksichtigenden Optimierungsproblem, wie es hier durch die zeit- und zufallskontinuierliche Modellierung gegeben ist, nicht zwischen einer Rückzahlung eingebrachten Vermögens, soweit dies bei Rechtsformen der Kapitalgesellschaften überhaupt möglich ist (siehe dazu im Folgenden), und einer Ausschüttung differenziert werden könnte, so dass auf der nachgelagerten Eignerebene allenfalls eine pauschale Berücksichtigung von Steuern möglich wäre.

[227] Die Gewerbesteuer beträgt 5 % (Steuermesszahl; § 11 Abs. 2 GewStG) auf den Gewerbeertrag multipliziert mit einem gemeindespezifischen Hebesatz (§ 16 Abs. 1 GewStG). Sie ist von ihrer eigenen Bemessungsgrundlage abzugsfähig. Der effektive Gewerbesteuersatz $st_{ge}^{eff.}$, der dem auf den Gewerbeertrag anzuwendenden Steuersatz unter der Prämisse der Nicht-Abzugsfähigkeit der Steuer von ihrer eigenen Bemessungsgrundlage entspricht, ergibt sich aus dem nominellen Gewerbesteuersatz $st_{ge}^{nom.}$, der sich als Produkt von Steuermesszahl und Hebesatz darstellt, zu $st_{ge}^{eff.} = \frac{st_{ge}^{nom.}}{1+st_{ge}^{nom.}}$. Von dem um die Gewerbesteuer verminderten Gewinn ist die Körperschaftsteuer durch Anwendung des Körperschaftsteuersatzes st_{kst} von 25 % zu ermitteln (§ 23 Abs. 1 KStG). Auf die Körperschaftsteuer wird der Solidaritätszuschlag mit einem Satz st_{solz} von 5,5 % erhoben (§§ 3 Abs. 1 Nr. 1, 4 SolZG). Insgesamt ergibt sich somit ein Steuersatz von $st = st_{ge}^{eff.} + (1 - st_{ge}^{eff.})st_{kst}(1 + st_{solz}) = st_{ge}^{eff.} + st_{kst}(1 + st_{solz}) - st_{ge}^{eff.} st_{kst}\ (1 + st_{solz})$. Von Detailregelungen, wie bspw. Unterschieden zwischen der gewerbe- und der körperschaftsteuerlichen Bemessungsgrundlage durch Hinzurechnungen und Kürzungen (§§ 8, 9 GewStG) wird abgesehen. Gleiches gilt für verschiedene Rechtsformen, besonders die Personenhandelsgesellschaften, hinsichtlich etwaiger Freibeträge oder nach Höhe der Einkünfte gestaffelter Sätze (§ 11 GewStG). Das Halbeinkünfteverfahren, das durch das Gesetz zur Senkung der Steuersätze und zur Reform der Unternehmensbesteuerung (Steuersenkungsgesetz) vom 23.10.2000 (BGBl. I 2000, S. 1433) mit Wirkung zum 1.1.2001 eingeführt wurde, beinhaltet neben der Besteuerung auf Ebene der Körperschaft aufseiten des Anteilseigners, sofern es sich um eine natürliche Person oder eine Personenhandelsgesellschaft handelt, dass nur noch die Hälfte der Gewinnausschüttung seiner persönlichen Einkommensteuer unterliegt (§ 20 Abs. 1 Nr. 1 EStG i.V.m. § 3 Nr. 40 lit. d EStG). Mit dem Halbeinkünfteverfahren wurde das Anrechnungsverfahren abgelöst, welches die Anrechnung der vom Unternehmen auf Ausschüttungen geschuldeten und abgeführten Körperschaftsteuer beim Eigentümer auf dessen Einkommensteuerschuld vorsah; vgl. zu den Verfahren *Eisele* (2002), S. 182. Zudem bestand ein „gespaltener“ Körperschaftsteuersatz zwischen thesaurierten und ausgeschütteten Gewinnen. Im Rahmen eines steuerlichen Anrechnungssystems würde sich für den gegebenen Modellrahmen das in Fn. 226, diese Seite, angesprochene Problem ergeben, dass nicht zwischen Kapitalrückzahlungen und Ausschüttungen differenziert werden könnte, wobei sich die steuerliche Behandlung von Ausschüttungen durch die Anrechnung noch weitaus komplexer gestalten würde.

problematisch, zumal sich die Herausnahme eingebrachten Vermögens als schwierig bzw. als nicht mit der nötigen Flexibilität möglich erweist[228]. Anders verhält es sich zudem, wenn die Besteuerung auf Einzelinvestorebene zugrunde gelegt wird, sei es weil die Portfolio-Verwaltung in der Sphäre einer Personenhandelsgesellschaft (oder einer sonstigen diesbezüglich vergleichbaren und steuerlich als gewerblich zu betrachtenden Form) oder aber in der Privatsphäre des Investors erfolgt. Hierzu gehört auch die Realisierung des Portfolio-Managements im Rahmen einer Kapitalgesellschaft, jedoch bei Betrachtung der steuerlichen Wirkung bis auf die Ebene des Anteilseigners. Abweichungen hinsichtlich der Konstanz des zu verwendenden Steuersatzes ergeben sich bei dieser Betrachtung jedoch lediglich für Einkommensbereiche (bzw. für die Einkommensteile) unterhalb einer Grenze, ab der ein (konstanter) Höchststeuersatz gilt[229].

Neben dem Aspekt einer progressiven Besteuerung impliziert die hier getroffene Annahme zudem die Konstanz des Steuersatzes über die Zeit hinweg. Dass der Steuersatz st als zeitkonstant betrachtet wird, dient weitgehend lediglich der vereinfachten Herleitung des Steuereinflusses auf die Portfolio-Strukturierung. Für sämtliche weiteren Ausführungen könnte der Steuersatz auch als Funktion der Zeit abgebildet werden; in dieser Allgemeinheit ist aber gleichwohl ein jederzeit beschränkter, deterministischer Steuersatz vorauszusetzen. Eine von Letzterem abweichende Unterstellung bezüglich Beschränktheit oder Determiniertheit des Steuersatzes erschiene aber auch nicht — oder zumindest schwerlich — mit der Erfahrungswelt vereinbar. Denn zum einen sollte sich der Steuersatz aus Plausibilitätsgründen stets zwischen 0 und 100 % bewegen ($st(t) \in [0,1]$, $\forall t$), zum anderen würde die Annahme eines stochastischen Steuersatzes im gegebenen Kontext der Unsicherheitsmodellierung bedeuten, dass der Steuersatz mit der unterstellten Filtration messbar ist, welche sich allerdings an den die Aktienkursentwicklung kennzeichnenden Wiener-Prozessen orientiert. Folglich würde eine Formulierung des Steuersatzes als stochastischer Prozess nahe legen, dass sich der Gesetzgeber bei der Festlegung des Steuersatzes an der Entwicklung der Wertpapierpreise orientiert. Davon ist aber nicht auszugehen[230]. Bereits gegen eine Modellierung

[228] Nach deutschem Recht besteht ein grundsätzliches Rückzahlungsverbot von Einlagen bei Aktiengesellschaften (§ 57 AktG) und Gesellschaften mit beschränkter Haftung (§ 30 GmbHG). Möglichkeiten zur Auszahlung von Einlagen bestehen durch Kapitalherabsetzung (§§ 222 ff. AktG, § 58 GmbHG) oder Liquidation (§ 262 AktG, § 60 GmbHG).

[229] In der Bundesrepublik Deutschland wird im Veranlagungszeitraum 2005 der Teil des zu versteuernden Einkommens natürlicher, unbeschränkt einkommensteuerpflichtiger Personen, der 55.151 EUR übersteigt, proportional mit 42 % Einkommensteuer belastet (für 2004 gilt ein Satz von 45 %; §§ 52 Abs. 41, 32a Abs. 1 EStG); im gegebenen Kontext sei auf die Ermäßigung für gewerbliche Einkünfte nach § 35 EStG hingewiesen.

[230] Dass ein gewisser Wirkungszusammenhang zwischen der Situation auf den Kapitalmärkten und der Besteuerung besteht, soll damit aber natürlich nicht negiert werden. Indiz hierfür sind die verstärkt in ökonomischen Krisensituationen aufkommenden Diskussionen über die Senkung von Steuersätzen. Derart komplexe Wirkungszusammenhänge sind gleichwohl jenseits dessen, was im gegebenen Modellkontext abgebildet werden kann, respektive im Rahmen einer Modellanwendung auswertbar ist.

des Steuersatzes als zeitabhängige Größe mag sprechen, dass Änderungen der steuerlichen Rahmenbedingungen nicht mit hinreichender Bestimmtheit angenommen werden können und insofern die Vermutung eines Fortbestehens der jeweils gegenwärtigen Verhältnisse zumeist sachgerecht ist. Eine Ausnahme könnten bereits gesetzlich fixierte Steuersatzänderungen für zukünftige Veranlagungszeiträume bilden[231]. Damit bleibt festzuhalten, dass die *weiteren Herleitungen bei beschränkten, deterministischen Steuersätzen (mit geringfügigen Anpassungen) ihre Gültigkeit behalten*, eine weiterreichende Modellierung aber wenig Sinn macht.

Die Gleichsetzung der Bemessungsgrundlage mit der Veränderung des Reinvermögens geht im Grundsatz konform mit der Ermittlung des steuerlichen Gewinns nach den §§ 4 Abs. 1, 5 EStG für Einkünfte natürlicher Personen aus Gewerbebetrieb bzw. nach § 8 KStG für Kapitalgesellschaften respektive Körperschaften, wobei die folgenden Ausführungen zunächst buchführungspflichtigen Unternehmungen gelten. Insbesondere sind danach Entnahmen (wie auch Einlagen) erfolgsneutral zu behandeln, d.h. sie gehen nicht in die steuerliche Bemessungsgrundlage ein. Abweichungen der Realität gegenüber dem Modell ergeben sich dann durch die Periodisierung der (über den gesamten Planungszeitraum festzustellenden) Reinvermögensänderung, welche sich in einem unterschiedlichen zeitlichen Anfall der Steuerzahlungen niederschlägt. In dieser Hinsicht wirkt zudem die Annahme einer zeitstetigen Besteuerung (für alle rechtlichen Rahmenbedingungen der Investition) realitätsverzerrend. Zur Illustration des ersten verzerrenden Tatbestandes ist auf einen sich aus der Periodisierung ergebenden Zeitabschnitt (Veranlagungszeitraum) abzustellen. Für diesen ergeben sich Divergenzen zwischen existentem deutschen Steuerrecht und der im Modell unterstellten Besteuerung von Marktwertänderungen. Die Unterschiede entstehen vor allem durch das für jedes einzelne Anlagegut geltende Anschaffungskostenprinzip. Danach bilden die Anschaffungs-/Herstellungskosten, ggf. vermindert um planmäßige Abschreibungen (fortgeführte Anschaffungs-/Herstellungskosten), die Obergrenze für den (Buch-)Wertansatz des Gutes in der Steuerbilanz (§ 6 Abs. 1 Nr. 1 und 2 EStG). Lediglich durch Verkauf realisierte Wertsteigerungen von Anlagen, die über die Anschaffungskosten hinausgehen, sind für die Besteuerung relevant. Die Berücksichtigung einer solchen Bedingung würde erfordern, dass nicht nur bei jeder Anlageart festgestellt wird, ob ein Wertzuwachs eingetreten ist, sondern ferner, ob bzw. in welchem Maße ein über die Anschaffungskosten hinaus eingetretener Wertzuwachs durch Portfolioumschichtung *realisiert* wurde. Dies ist hier nicht umsetzbar. Zudem besteht

[231] Wie dies, wiederum mit Bezug auf die deutschen Verhältnisse, für die Veranlagungszeiträume 2001-2005 nach Verabschiedung des bereits erwähnten Steuersenkungsgesetzes vom 23.10.2000 (BGBl. I 2000, S. 1433; Fn. 227, S. 113) und dem Steuersenkungsergänzungsgesetz vom 19.12.2000 (BGBl. I 2000, S. 1812) zutraf bzw. für die aus gegenwärtiger Sicht zukünftigen Zeiträume noch zutrifft; vgl. §§ 32a Abs. 1, 52 Abs. 41 EStG.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

lediglich (und dies nicht einmal in jedem Fall) ein Wahlrecht zur Anpassung an einen niedrigeren Markt-(Teil-)Wert (§ 6 Abs. 1 Nr. 1 und 2 EStG)[232].

Werden die Anlagen und Finanzierungen außerhalb eines gewerblichen Rahmens, der die Anwendung der zuvor genannten Vorschriften nach sich ziehen würde, getätigt, ergeben sich bereits vom Grundsatz her Unterschiede. Vermögensänderungen aufgrund von Marktwertänderungen werden im deutschen Steuerrecht hier prinzipiell nicht erfasst; Gleiches gilt aber auch für Konsumentnahmen, wie im Modell folglich realitätskonform vorausgesetzt. Die Besteuerung knüpft lediglich an dem an, was aus der „Quelle" Finanzanlage zuströmt. Die möglicherweise wichtigste Ausnahme von dieser Regel stellt im gegebenen Kontext die Besteuerung von Spekulationsgewinnen, also von durch Verkauf von Anlagen innerhalb einer bestimmten Frist realisierten Wertänderungen, dar. Dass die Besteuerung von Spekulationsgewinnen in dem angestrebten Modellrahmen jedoch nicht in getreuer Abbildung der Realität möglich ist, ergibt sich nicht zuletzt aus den oben bereits genannten Gründen bezüglich der Erfassung realisierter Gewinne sowie aufgrund weiterer steuerlicher Spezifika in diesem Zusammenhang. So besteht für Spekulationsverluste insbesondere nicht die Möglichkeit eines horizontalen Verlustausgleiches mit anderen Einkunftsarten (§ 23 Abs. 2 EStG). Darüber hinaus können sich Unterschiede zwischen Modell und Realität auch hinsichtlich der Behandlung von solchen Fremdkapitalzinsen ergeben, die nach dem Steuerrecht nicht abzugsfähig sind.

Abweichungen zwischen dem tatsächlichen und dem im Modell unterstellten Besteuerungszeitpunkt bestehen für Einkünfte aus Kapitalvermögen in analoger, wenn auch nicht identischer Weise wie bei Unternehmungen. Ohne die Annahme zeitstetiger Besteuerung, wenn man also stattdessen von einer zu diskreten Zeitpunkten stattfindenden Besteuerung ausgehen wollte, würde aufgrund einer „latenten", d.h. nicht unmittelbar fälligen Steuerlast (oder eines entsprechenden Guthabens) das der Optimierung zugrunde liegende Nettoanlagevolumen i.d.R. nicht mit dem „tatsächlichen" Reinvermögen übereinstimmen. Eine entsprechende Nebenrechnung mit Verbindung zur Abbildung des zu disponierenden Vermögensprozesses würde jedoch den Rahmen der gegenwärtigen Abbildungs- bzw. Optimierungsmöglichkeiten sprengen[233]. Anzumerken ist noch, dass auch die Annahme eines sofortigen und unbegrenz-

---

[232] Von tiefer ins Detail gehenden Fragen, wie bspw. dem Zusammenhang von Teilwert und Marktwert, der Bedeutung sonstiger bewertungsrelevanter Vorschriften, wie des § 6b EStG, einzelnen Voraussetzungen, wie der dauerhaften Wertminderung im abnutzbaren Anlagevermögen, u.v.a.m. wird hier aus nahe liegenden Gründen generell abstrahiert. Es sei im gegebenen Kontext lediglich noch angemerkt, dass sich auch in Bezug auf die Bewertung von Verbindlichkeiten nach dem Höchstwertprinzip durch das Steuerrecht Abweichungen zu Marktverhältnissen ergeben können. Tiefer gehend vgl. bspw. *Eisele* (2002).

[233] Insofern kann auch eine unter steuerlichen (oder anderen) Gesichtspunkten zu gestaltende Ausschüttungspolitik nicht abgebildet werden; vgl. zu grundsätzlichen Aspekten einer steuerbeeinflussten Ausschüttungspolitik *Wagner/Dirrigl* (1980), S. 293 ff. Zur Abbildung vergleichbar „latenter" Zahlungen aus Kontokorrentanlagen/-finanzierungen im Kontext eines zeitdiskreten Finanzplanungsmodells vgl. *Troßmann* (1990), S. 127 f.

ten Verlustausgleiches in der Realität des deutschen Steuersystems nicht gegeben ist; allenfalls ein Verlustvortrag bzw. ein zeitlich und der Höhe nach begrenzter Verlustrücktrag sind (unter Beachtung spezieller Verrechnungsvorschriften) möglich (§ 10d EStG).

Trotz der gerade beschriebenen Divergenzen zwischen Modell und Realität ist die Berücksichtigung von Steuern doch deren Vernachlässigung vorzuziehen, da die letztgenannte Alternative natürlich ebenfalls zu Abweichungen führt, die sich an der bisherigen Erörterung (im Groben) ablesen lassen. Insofern sind die in der Tendenz als geringfügiger anzunehmenden Unzulänglichkeiten des formulierten Steuersystems gegenüber dieser oder einer anderen Steueralternative, die bei den Modellgegebenheiten möglich erscheint, vorzuziehen. Insbesondere bei einer Realisierung des Portfolio-Problems in einem gewerblichen Rahmen spricht die übereinstimmende Erfassung des Totalerfolgs zwischen Modell und existentem Steuerrecht für die Einbeziehung von Steuern in den Investitionskalkül[234].

Durch die Besteuerung stellt sich der bisher durch Gl. (2.15) in Differentialform beschriebene Vermögensprozess nunmehr wie folgt dar ($t \in [0, T]$):

$$dX^{st}(t) = -c(t)\,dt + (1 - st)\left(\pi_0^{st}(t)r(t)\,dt + \pi^{st}(t)'\left((b(t) + \delta(t))\,dt + \sigma(t)\,dW(t)\right)\right). \tag{2.64}$$

Dabei gilt $X^{st}(t) = \pi_0^{st}(t) + \pi^{st}(t)'\mathbf{1}_n$.

Führt man für $t \in [0, T]$ als Diskontierungsprozess:

$$d\left(\frac{1}{S_0^{st}(t)}\right) = -\frac{1}{S_0^{st}(t)}(1 - st)r(t)\,dt,$$

welcher auf dem steuerkorrigierten Bondpreisprozess:

$$dS_0^{st}(t) = S_0^{st}(t)(1 - st)r(t)\,dt \tag{2.65}$$

beruht, ein, dann ergibt sich die folgende Darstellung für den diskontierten, nachsteuerlichen Vermögensprozess:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{X^{st}(t)}{S_0^{st}(t)}\right) &= \frac{1}{S_0^{st}(t)}\,dX^{st}(t) + X^{st}(t)\,d\left(\frac{1}{S_0^{st}(t)}\right) + 0 \\ &= -\frac{c(t)}{S_0^{st}(t)}\,dt + \frac{1}{S_0^{st}(t)}(1 - st)\left(\pi_0^{st}(t)r(t)\,dt + \pi^{st}(t)'((b(t) + \delta(t))\,dt\right. \\ &\quad \left. + \sigma(t)\,dW(t))\right) - (\pi_0^{st}(t) + \pi^{st}(t)'\mathbf{1}_n)\frac{1}{S_0^{st}(t)}(1 - st)r(t)\,dt \\ &= -\frac{c(t)}{S_0^{st}(t)}\,dt + \frac{1}{S_0^{st}(t)}(1 - st)\pi^{st}(t)'\left((b(t) + \delta(t) - r(t)\mathbf{1}_n)\,dt\right. \\ &\quad \left. + \sigma(t)\,dW(t)\right). \end{aligned}$$

[234] Dies gilt insbesondere auch unter der Randbedingung, dass die existenten Steuersysteme i.d.R. nicht investitions- bzw. entscheidungsneutral sind, so dass Steuern auch unter formellen Gesichtspunkten nicht vernachlässigt werden können bzw. sollten; vgl. zu Gründen für die Berücksichtigung von Steuern *Wagner/Dirrigl* (1980), S. 5, 13 ff.

Der diskontierte Vermögensprozess (nach Steuern) besitzt beim Anfangsvermögen x somit die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}\frac{X^{st}(t)}{S_0^{st}(t)} &= x - \int_0^t \frac{c(s)}{S_0^{st}(s)}\,ds + (1-st)\int_0^t \frac{1}{S_0^{st}(s)}\pi^{st}(s)'(b(s)+\delta(s)-r(s)\mathbf{1}_n)\,ds \\ &\quad +(1-st)\int_0^t \frac{1}{S_0^{st}(s)}\pi^{st}(s)'\sigma(s)\,dW(s), \quad t\in[0,T]. \qquad (2.66)\end{aligned}$$

Unter Rückgriff auf den bereits eingeführten (Maßwechsel-)Prozess $Z_0(t) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t ||\theta(s)||^2\,ds - \int_0^t \theta'(s)\,dW(s)}$ $(t \in [0,T])$ bzw. $dZ_0(t) = -Z_0(t)\theta'(t)\,dW(t)$, wobei $Z_0(0)=1$, wird der *steuerkorrigierte Zustandspreis-Dichte-Prozess* wie folgt definiert[235]:

$$H_0^{st}(t) := \frac{Z_0(t)}{S_0^{st}(t)}, \quad t\in[0,T].$$

Für diesen Prozess wird analog dem Prozess $H_0(.)$ gefordert: $E[H_0^{st}(T)] < \infty$ und $E\left[\int_0^T H_0^{st}(t)\,dt\right] < \infty$. Anzumerken ist, dass zwar der Diskontierungsprozess durch Multiplikation des risikolosen Zinssatzes mit dem Faktor $1-st$ der Besteuerung angepasst wird, nicht jedoch der Maßwechselprozess; dieser bleibt unverändert. Für den Prozess $H_0^{st}(.)$ gilt für $t\in[0,T]$:

$$H_0^{st}(t) = e^{-\int_0^t((1-st)r(s)+\frac{1}{2}||\theta(s)||^2)\,ds - \int_0^t \theta'(s)\,dW(s)} \qquad (2.67)$$

und, in Differentialschreibweise,

$$dH_0^{st}(t) = -H_0^{st}(t)((1-st)r(t)\,dt + \theta'(t)\,dW(t)). \qquad (2.68)$$

Zusammen mit Gl. (2.64) folgt daraus:

$$\begin{aligned} d\left(H_0^{st}(t)X^{st}(t)\right) &= H_0^{st}(t)\,dX^{st}(t) + X^{st}(t)\,dH_0^{st}(t) + d\left[X^{st}, H_0^{st}\right](t) \\ &= H_0^{st}(t)\left(-c(t)\,dt + (1-st)\left(\pi_0^{st}(t)r(t)\,dt + \pi^{st}(t)'((b(t)\right.\right. \\ &\quad +\delta(t))\,dt\ +\sigma(t)\,dW(t))) - X^{st}(t)H_0^{st}(t)((1-st)r(t)\,dt \\ &\quad +\theta'(t)\,dW(t)) - (1-st)H_0^{st}(t)\theta'(t)(\sigma'(t)\pi^{st}(t))\,dt \\ &= -H_0^{st}(t)c(t)\,dt \\ &\quad +H_0^{st}(t)\left[\pi^{st}(t)'\sigma(t)(1-st) - X^{st}(t)\theta'(t)\right]\,dW(t), \end{aligned}$$

so dass sich mit der Anfangsbedingung $H_0^{st}(0)X^{st}(0) = x$ die *Vermögensgleichung (mit/nach Steuern)* für $t\in[0,T]$ als:

$$\begin{aligned} &H_0^{st}(t)X^{st}(t) + \int_0^t H_0^{st}(s)c(s)\,ds \\ &\quad = x + \int_0^t H_0^{st}(s)\left[\pi^{st}(s)'\sigma(s)(1-st) - X^{st}(s)\theta'(s)\right]\,dW(s) \qquad (2.69)\end{aligned}$$

[235] Vgl. zum Zustandspreis-Dichte-Prozess ohne bzw. vor Steuern S. 69.

ergibt. Mit der *Girsanov*-Transformation wie im Vor-Steuerfall lässt sich der diskontierte Vermögensprozess gemäß Gl. (2.66) nunmehr wie folgt beschreiben:

$$\frac{X^{st}(t)}{S_0^{st}(t)} = x - \int_0^t \frac{c(s)}{S_0^{st}(s)}\, ds + (1-st)\int_0^t \frac{1}{S_0^{st}(s)} \pi^{st}(s)'\sigma(s)\, dW_0(s),\ t \in [0,T]. \quad (2.70)$$

Mit Hilfe des steuerkorrigierten Zustandspreis-Dichte-Prozesses $H_0^{st}(.)$ und der Vermögensgleichung nach Steuern kann die Portfolio-Optimierung in analoger Weise wie in den *Abschnitten 2.2.3.2* und *2.2.3.3* durchgeführt werden. Die Betragsfunktionen $\mathcal{X}_i^{st}(.)$ $(i \in \{KE, K, E\})$ im Fall mit Steuern entsprechen dabei den Betragsfunktionen $\mathcal{X}_i(.)$ im Vor-Steuer-Fall (gemäß Gl. (2.41), (2.52), (2.59)), wobei der Zustandspreis-Dichte-Prozess $H_0(.)$ durch den steuerkorrigierten Prozess $H_0^{st}(.)$ zu ersetzen ist. Analog der Vorgehensweise im Vor-Steuer-Fall seien die Umkehrfunktionen $\mathcal{Y}_i^{st}(.)$ $(i \in \{KE, K, E\})$ des Nach-Steuer-Falles definiert. Für die Probleme $(\mathcal{KE})$, $(\mathcal{K})$ und $(\mathcal{E})$ ergibt sich unter dem Steuersystem $\mathcal{S}$ Folgendes (die Probleme unter dem Steuersystem werden durch das Subskript $\mathcal{S}$, die zugehörigen Prozesse durch das Superskript st gekennzeichnet): Ausgehend von einem für Konsum und/oder Endvermögen zur Verfügung stehenden Anfangsvermögen x ist ggf. der Betrag $\bar{x}$ (≥ 0) für einen vorgegebenen Konsum(prozess) $\bar{c}^{st}(.)$ bzw. ein vorgegebenes Endvermögen $\bar{\xi}^{st}$ zu verwenden und hierfür separat anzulegen; es muss dabei $x > \bar{x}$ gelten. Das übrige Anfangsvermögen $\hat{x} = x - \bar{x}$ $(\bar{x} = 0$ möglich) ist, unter dem Steuersystem $\mathcal{S}$, für die simultane Optimierung von Konsum und Endvermögen (Problem $(\mathcal{KE}_{\mathcal{S}})$) bzw. die alternative Optimierung eines Entnahmestromes (Problem $(\mathcal{K}_{\mathcal{S}})$) oder des Endvermögens (Problem $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}})$) heranzuziehen. Hierfür gilt unmittelbar die folgende Aussage.

Satz 2.20 *Optimale Portfolio- und Vermögens-Prozesse bei Steuern*
Für die Optimierungsprobleme $(\mathcal{KE}_{\mathcal{S}})$, $(\mathcal{K}_{\mathcal{S}})$ und $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}})$ ohne vorgegebene Mindestentnahmen oder ein vorgegebenes Mindestendvermögen gilt beim Anfangsvermögen $\hat{x}$: Der optimale Konsumprozess bzw. das optimale Endvermögen sind für jedes Problem gegeben durch (mit $i \in \{KE, K, E\}$):

$$c_i^{st}(t) = I_1(t, \mathcal{Y}_i^{st}(\hat{x}) H_0^{st}(t)),\ t \in [0,T],\ \textit{und} \quad (2.71)$$
$$\xi_i^{st} = I_2(\mathcal{Y}_i^{st}(\hat{x}) H_0^{st}(T)). \quad (2.72)$$

Für die optimalen Vermögensprozesse $X_i^{st}(t) := X^{\hat{x}, c_i^{st}, \pi_i^{st}}(t)$ $(t \in [0,T])$ sowie die optimalen Portfolio-Prozesse gelten dann für $t \in [0,T]$:

$$X_{KE}^{st}(t) = \frac{1}{H_0^{st}(t)} E\left[\int_t^T H_0^{st}(s) c_{KE}^{st}(s)\, ds + H_0^{st}(T)\xi_{KE}^{st} \mid \mathcal{F}_t\right], \quad (2.73)$$
$$X_K^{st}(t) = \frac{1}{H_0^{st}(t)} E\left[\int_t^T H_0^{st}(s) c_K^{st}(s)\, ds \mid \mathcal{F}_t\right], \quad (2.74)$$

$$X_E^{st}(t) = \frac{1}{H_0^{st}(t)} E\left[H_0^{st}(T)\xi_E^{st} \mid \mathcal{F}_t\right] \quad \textit{sowie} \tag{2.75}$$

$$\pi_i^{st}(t) = \frac{1}{1-st}(\sigma'(t))^{-1}\left(\frac{\psi_i^{st}(t)}{H_0^{st}(t)} + X_i^{st}(t)\theta(t)\right), \tag{2.76}$$

wobei sich $\psi_i^{st}(.)$ aus der Darstellung des zugehörigen Martingales aus:

$$M_{KE}^{st}(t) := E\left[\int_0^T H_0^{st}(s)c_{KE}^{st}(s)\,ds + H_0^{st}(T)\xi_{KE}^{st} \mid \mathcal{F}_t\right], \tag{2.77}$$

$$M_K^{st}(t) := E\left[\int_0^T H_0^{st}(s)c_K^{st}(s)\,ds \mid \mathcal{F}_t\right], \tag{2.78}$$

$$M_E^{st}(t) := E\left[H_0^{st}(T)\xi_E^{st} \mid \mathcal{F}_t\right] \tag{2.79}$$

gemäß dem Martingaldarstellungssatz (Satz 2.7) aus dem Ansatz $M_i^{st}(t) = \hat{x} + \int_0^t \psi_i^{st}(s)'\,dW(s)\ (t \in [0,T])$ ergibt. Es ist wiederum $\int_0^T ||\psi_i^{st}(t)||^2\,dt < \infty$.

Beweis:
Die Aussage ist analog den Beweisen zu den Sätzen 2.18 und 2.19 sowie der Darstellung in *Abschnitt 2.2.3.2* mit dem steuerkorrigierten Zustandspreis-Dichte-Prozess $H_0^{st}(.)$ anstelle von $H_0(.)$ herzuleiten. Der optimale Portfolio-Prozess ergibt sich dabei durch den Vergleich der Integranden der stochastischen Integrale in der Darstellung des Prozesses $M_i^{st}(.)\,(i \in \{KE, K, E\})$, indem sich aus[236]:

$$x + \int_0^t \psi_i^{st}(s)'\,dW(s) = \hat{x} + \int_0^t H_0^{st}(s)\left[\pi_i^{st}(s)'\sigma(s)(1-st) - X_i^{st}(s)\theta'(s)\right]\,dW(s)$$

jeweils der Portfolio-Prozess:

$$\pi_i^{st}(t) = \frac{1}{1-st}(\sigma'(t))^{-1}\left(\frac{\psi_i^{st}(t)}{H_0^{st}(t)} + X_i^{st}(t)\theta(t)\right)$$

ergibt.

Anmerkung 2.5
Aus dem Vergleich der Gl. (2.76) für ($i \in \{KE, K, E\}$) und der Gl. (2.47), (2.54) und (2.61) zeigt sich, dass durch die Einbeziehung von Steuern bei gleichem Gesamtvermögen das risikobehaftet angelegte Vermögen bzw. die Aktienleerverkäufe um den Faktor $\frac{1}{1-st}$ gegenüber der optimalen Strategie vor Steuern erhöht werden, sofern sich ein identischer Prozess $\psi_\cdot(.)$ ergibt. Unter diesen Voraussetzungen kann das Anlageverhalten unter dem Steuersystem $\mathcal{S}$ als riskanter gegenüber dem einer Modellwelt ohne Steuern betrachtet werden. Anhand des folgenden Beispiels wird gezeigt, dass dabei der Fall identischer Prozesse $\psi_\cdot(.)$ durchaus gegeben sein kann. Bei gleichem oder zumindest nicht

[236] Vgl. S. 95.

entsprechend kompensierendem Prozess $\psi^{st}_{\cdot}(.)$ bewirkt die Besteuerung eine Dämpfung der finanziellen Konsequenzen einer riskanten Anlagepolitik, da erzielte Überschüsse durch die Besteuerung reduziert und Vermögensverluste durch den sofortigen Verlustausgleich gemildert werden.

Diese Wirkung zeigt sich bspw. für die simultane Optimierung von Konsum und Endvermögen bei logarithmischen Nutzenfunktionen und solchen des „power type“, jeweils mit oder ohne Dämpfungsterm. Hierzu wird das folgende Beispiel für derartige Nutzenfunktionen mit Dämpfungsterm angegeben, welches unmittelbar an die Herleitung der Terme in Beispiel 2.5 für den Fall ohne Steuern anknüpft.

Beispiel 2.7 *Konsum- und Endvermögensoptimierung bei logarithmischer und bei „Power-type“-Nutzenfunktion mit Diskontierungsrate unter dem Steuersystem $\mathcal{S}$ — Fortsetzung des Beispiels 2.5*
Gegenüber dem Referenzbeispiel ergeben sich durch die Einbeziehung von Steuern nur geringfügige Änderungen bei der Herleitung der optimalen Prozesse. Die Ergebnisse werden zu einem Anfangsvermögen x angegeben.

Für die Optimierung auf Basis einer *logarithmischen Nutzenfunktion mit Diskontierungsterm*:

$$\begin{array}{lrcllrcl} & U_1(t,c) & = & e^{-kt}\ln c & \text{und} & U_2(\xi) & = & e^{-kT}\ln\xi \\ \text{mit} & U_1'(t,c) & = & e^{-kt}\frac{1}{c} & \text{und} & U_2'(\xi) & = & e^{-kT}\frac{1}{\xi}, \\ \text{so dass} & I_1(t,y) & = & e^{-kt}\frac{1}{y} & \text{und} & I_2(y) & = & e^{-kT}\frac{1}{y}, \end{array}$$

haben die Betragsfunktion $\mathcal{X}^{st}_{KE}(y) = \frac{1}{yk}\left[1+(k-1)e^{-kT}\right]$ $(y \in \mathbb{R}_{++})$ und ihre Inverse $\mathcal{Y}^{st}_{KE}(x) = \frac{1}{xk}\left[1+(k-1)e^{-kT}\right]$ $(x \in \mathbb{R}_{++})$ die gleiche Gestalt wie im Fall ohne Steuern. Der optimale Konsumprozess und das optimale Endvermögen sind analog mit Bezug auf das Anfangsvermögen x gegeben durch:

$$\begin{aligned} c^{st}_{KE}(t) &= I_1(t, \mathcal{Y}^{st}_{KE}(x)H^{st}_0(t)) = \frac{xk}{\left(1+(k-1)e^{-kT}\right)H^{st}_0(t)}e^{-kt},\ t \in [0,T], \\ \xi^{st}_{KE} &= I_2(\mathcal{Y}^{st}_{KE}(x)H^{st}_0(T)) = \frac{xk}{\left(1+(k-1)e^{-kT}\right)H^{st}_0(T)}e^{-kT}. \end{aligned}$$

Als Vermögensprozess ergibt sich:

$$X^{st}_{KE}(t) = \frac{1}{H^{st}_0(t)}x\frac{e^{-kt}+(k-1)e^{-kT}}{1+(k-1)e^{-kT}},\ t \in [0,T],$$

und das Martingal $M^{st}_{KE}(.)$ ist wiederum konstant gleich dem Anfangsvermögen x, so dass $\psi^{st}_{KE}(.) \equiv \mathbf{0}_d$ gilt. Damit ist nach Gl. (2.76) der optimale Portfolio-Prozess gegeben durch:

$$\pi^{st}_{KE}(t) = \frac{1}{1-st}X^{st}_{KE}(t)\left(\sigma(t)\sigma'(t)\right)^{-1}(b(t)+\delta(t)-r(t)\mathbf{1}_n), \quad t \in [0,T]. \tag{2.80}$$

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Für *Nutzenfunktionen des „power type“ mit Diskontierungsterm* sind:

$$\begin{array}{lrclcrcl} & U_1(t,c) & = & e^{-kt}\frac{1}{\beta}c^{\beta} & \text{und} & U_2(\xi) & = & e^{-kT}\frac{1}{\beta}\xi^{\beta},\ \beta<1,\ \beta\neq 0; \\ \text{so dass} & U_1'(t,c) & = & e^{-kt}c^{\beta-1} & \text{und} & U_2'(\xi) & = & e^{-kT}\xi^{\beta-1} \\ \text{und folglich} & I_1(t,y) & = & e^{\frac{kt}{\beta-1}}y^{\frac{1}{\beta-1}} & \text{und} & I_2(y) & = & e^{\frac{kT}{\beta-1}}y^{\frac{1}{\beta-1}}. \end{array}$$

Die Betragsfunktion und ihre Umkehrfunktion haben die Gestalt:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{X}_{KE}^{st}(y) & = & y^{\frac{1}{\beta-1}}\underbrace{E\left[\int\limits_0^T e^{\frac{k}{\beta-1}t}H_0^{st}(t)^{\frac{\beta}{\beta-1}}\,dt+e^{\frac{kT}{\beta-1}}H_0^{st}(T)^{\frac{\beta}{\beta-1}}\right]}_{=\mathcal{X}_{KE}^{st}(1)} \\ \text{und}\quad \mathcal{Y}_{KE}^{st}(x) & = & \left(\frac{x}{\mathcal{X}_{KE}^{st}(1)}\right)^{\beta-1}. \end{array}$$

Damit ergeben sich die optimalen Prozesse:

$$\begin{array}{rcl} c_{KE}^{st}(t) & = & e^{\frac{kt}{\beta-1}}\left(H_0^{st}(t)\right)^{\frac{1}{\beta-1}}\left(\frac{x}{\mathcal{X}_{KE}^{st}(1)}\right),\ t\in[0,T], \\ \xi_{KE}^{st} & = & e^{\frac{kT}{\beta-1}}\left(H_0^{st}(T)\right)^{\frac{1}{\beta-1}}\left(\frac{x}{\mathcal{X}_{KE}^{st}(1)}\right). \end{array}$$

Der Vermögensprozess ist nun für $t\in[0,T]$:

$$\begin{array}{rcl} X_{KE}^{st}(t) & = & \frac{1}{H_0^{st}(t)}\left(\frac{x}{\mathcal{X}_{KE}^{st}(1)}\right) \\ & & E\left[\int\limits_t^T (H_0^{st}(s))^{\frac{\beta}{\beta-1}}e^{\frac{k}{\beta-1}s}\,ds+(H_0^{st}(T))^{\frac{\beta}{\beta-1}}e^{\frac{kT}{\beta-1}}\ \middle|\ \mathcal{F}_t\right]. \end{array}$$

Dabei gilt für $t\in[0,T]$ $(H_0^{st}(t))^{\frac{\beta}{\beta-1}}e^{\frac{kt}{\beta-1}}=m^{st}(t)\Lambda^{st}(t)$ mit den Hilfsprozessen:

$$\begin{array}{rclcl} m^{st}(t) & := & e^{\frac{kt}{\beta-1}-\frac{\beta}{\beta-1}\int_0^t(1-st)r(s)\,ds+\frac{\beta}{2(\beta-1)^2}\int_0^t\|\theta(s)\|^2\,ds} & = & m(t)e^{st\frac{\beta}{\beta-1}\int_0^t r(s)\,ds}, \\ \Lambda^{st}(t) & := & e^{-\frac{\beta}{\beta-1}\int_0^t\theta'(s)\,dW(s)-\frac{\beta^2}{2(\beta-1)^2}\int_0^t\|\theta(s)\|^2\,ds} & = & \Lambda(t). \end{array}$$

Die explizite Herleitung des optimalen Portfolio-Prozesses ist wiederum bei *deterministischen Parameterprozessen* möglich. Sie verläuft analog der Darstellung in Beispiel 2.5, weshalb auf eine Wiedergabe verzichtet wird. Der optimale Portfolio-Prozess ergibt sich für diesen Fall zu:

$$\begin{array}{rcl} \pi_{KE}^{st}(t) & = & \frac{1}{1-st}(\sigma'(t))^{-1}\left(-\frac{1}{H_0^{st}(t)}H_0^{st}(t)X_{KE}^{st}(t)\frac{\beta}{\beta-1}\theta(t)+X_{KE}^{st}(t)\theta(t)\right) \\ & = & \frac{1}{(1-st)(1-\beta)}X_{KE}^{st}(t)\left(\sigma(t)\sigma'(t)\right)^{-1}\left(b(t)+\delta(t)-r(t)\mathbf{1}_n\right),\quad t\in[0,T]. \end{array}$$

Für ein gegebenes Vermögen $X(\bar{t})$ bewirkt die Einbeziehung von Steuern (gemäß dem System $\mathcal{S}$) folglich, dass um den Faktor $\frac{1}{1-st}$ höhere Investitionen bzw. Finanzierungen im riskanten Wertpapierbereich, d.h. bei den hier als „Aktien“ bezeichneten Instrumenten, vorgenommen werden, als dies bei dem jeweils selben Vermögensstand im Rahmen einer Optimierung unter Vernachlässigung von Steuern der Fall wäre. Zu beachten ist allerdings, dass die Vermögensprozesse für beide Fälle unterschiedliche Darstellungen besitzen, so dass bei einer identischen Umweltentwicklung kaum dieselbe Vermögensentwicklung vorliegen wird. □

Für einen vollständigen Kapitalmarkt ist damit die Einbeziehung von Steuern — in der hier spezifizierten Form als im Wesentlichen proportionale Besteuerung von nicht einlage- bzw. entnahmeinduzierten Vermögensänderungen — für die dynamische Portfolio-Optimierung, der weitgehend allgemein gehaltene Parameterprozesse zugrunde liegen können, abgeschlossen. Der folgende Abschnitt wendet sich dem Fall der dynamischen Portfolio-Optimierung mit und ohne Steuern unter der Prämisse deterministischer Parameter- bzw. Koeffizientenprozesse[237] zu. Die Spezialisierung auf deterministische Koeffizientenprozesse erfolgt allerdings erst, nachdem das Portfolio-Problem nochmals allgemein aufgegriffen und unter Zuhilfenahme der stochastischen Steuerung behandelt wird. Dadurch wird eine andere Darstellung des optimalen Portfolio-Prozesses gegenüber derjenigen der Gl. (2.47), (2.54) und (2.61) resp. der sich unter Berücksichtigung des Steuersystems $\mathcal{S}$ ergebenden Gl. (2.76) möglich. Die Beschränkung auf deterministische Parameterprozesse erlaubt diesbezüglich eine ggf. stärker operationalisierbare Alternativdarstellung.

2.2.3.5 Deterministische Koeffizienten und das Modell von Merton bei Steuern

In *Merton* (1969) wird das Problem der Konsum- und Endvermögensoptimierung zum ersten Mal mit Hilfe der stochastischen Steuerung behandelt. Der Problemformulierung liegen zunächst spezielle Nutzenfunktionen und konstante Koeffizienten zugrunde. Eine Verallgemeinerung in Bezug auf Nutzenfunktionen und Parameterprozesse findet in *Merton* (1971) statt[238], wobei die abermalige Spezialisierung auf konstante Parameterprozesse nunmehr

[237] Beide Begriffe werden synonym verwendet und umfassen in ihrer weitesten Auslegung die Prozesse $r(.), b(.), \delta(.), \sigma(.)$ sowie sonstige aus diesen gebildete Prozesse, wie bspw. den Prozess $\theta(.)$.

[238] Ebenso erfolgen die Integration eines exogenen, deterministischen Einkommensprozesses sowie die Betrachtung eines Poisson-, also eines Sprungprozesses, der u.a. zur Abbildung der Wertpapierdynamik oder des Einkommensprozesses Verwendung findet; vgl. *Merton* (1971), S. 374, 394 ff. *Merton's* Problem wird in *Duffie/Fleming/Soner/Zariphopoulou* (1997) für den Fall eines Einkommensprozesses, der einer geometrisch Brown'schen Bewegung folgt, welche durch die Kapitalmarktpapiere nicht replizierbar ist, und in *Cuoco* (1997) für allgemeinere Einkommensprozesse sowie unter speziellen Portfolio-Restriktionen weiterverfolgt. Diese Erweiterungen sollen hier jedoch nicht Gegenstand der Betrachtung sein.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

auf ein Separationstheorem führt („Mutual-Fund-Theorem")[239]. Im Folgenden wird unter der Annahme deterministischer Parameterprozesse das Grundmodell von *Merton* (1971) unter Einbeziehung des eingeführten Steuersystems $\mathcal{S}$ dargestellt und anschließend auf die sich aus der Darstellung von *Karatzas/Shreve* (1998) ergebende Konkretisierung eingegangen, welche wiederum um das Steuersystem erweitert ist. Anzumerken ist, dass die Einbeziehung der Besteuerung eine mathematisch gesehen nur geringfügige Modifikation repräsentiert, so dass die Herleitungen teilweise verkürzt gegenüber der angeführten Quelle sind und in jedem Fall dieser folgen. Die Originalergebnisse (ohne Steuern) können unmittelbar aus $st \equiv 0$ gewonnen werden. Betrachtet wird zudem ausschließlich das Problem einer simultanen Konsum- und Endvermögensoptimierung (Problem $(\mathcal{KE}_\mathcal{S})$); die Konsumoptimierung bzw. die Endvermögensoptimierung sind analog zu behandeln — auf eine explizite Darstellung wird deshalb verzichtet; entsprechend entfällt eine Indizierung der diesbezüglichen Funktionen und Prozesse durch das Subskript KE. Bei gegebenen Mindestentnahmen oder einem vorgegebenen Mindestendvermögen ist dabei zu unterstellen, dass der hierfür erforderliche (Gegenwarts-)Betrag entsprechend der Darstellung in *Abschnitt 2.2.3.3* beiseite gestellt und separat investiert wird.

Allgemeine Voraussetzung für diesen Abschnitt ist demnach: $r(t)$, $b(t)$, $\delta(t)$, $\sigma(t)$ $(t \in [0,T])$ sind *deterministische* Prozesse.

In der Formulierung als stochastisches Kontrollproblem[240] ist im Rahmen des *Problems* $(\mathcal{KE}_{\mathcal{S},t})$ der Wert der folgenden Funktion zu ermitteln[241]:

$$V(t, X^{st}(t)) := \sup_{(c,\pi^{st})\in\mathcal{A}_{KE,t}(X^{st}(t))} E\left[\int_t^T U_1(s,c(s))\,ds + U_2(X^{st;x,c,\pi^{st}}(T))\right], \tag{2.81}$$

wobei $\mathcal{A}_{KE,t}(X^{st}(t))$ analog der Menge $\mathcal{A}_{KE}(x)$[242] mit Bezug auf den all-

[239] Wie sich aus dem Weiteren ergibt, genügen danach ein Fonds, der risikobehaftete Wertpapiere (in geeigneter Weise) verwaltet und die Existenz eines risikolosen Bonds, der gekauft und verkauft werden kann, um jedem Investor (unabhängig von seiner speziellen Nutzenfunktion) eine optimale Portfolio-Strategie durch Kauf/Leerverkauf von Anteilen des Fonds und durch risikolose Anlage bzw. Verschuldung zu ermöglichen. An die Stelle des Bonds, insbesondere auch dann, wenn ein solcher nicht vorhanden ist, kann ein anderer in bestimmter Weise gebildeter Fonds treten; vgl. *Merton* (1971), S. 384 f. Dieses somit auch als „Two-Fund-Theorem" zu bezeichnende Ergebnis *Merton's* wird in *Merton* (1973) unter der Annahme eines einzelnen stochastischen Parameterprozesses, nämlich desjenigen für den risikolosen Zinssatz, bei Konstanz der übrigen Parameterprozesse zu einem „Three-Fund-Separation-Principle" weiterentwickelt. Zu weiteren Verallgemeinerungen hinsichtlich der Konstanz der Parameterprozesse vgl. die in *Karatzas/Shreve* (1998), S. 155, angegebene Literatur.

[240] Das *Merton*-Modell ist auch in *Duffie* (1996), S. 195 ff., beschrieben.

[241] Zur Vereinfachung der Notation werden die Argumente der Wertfunktion $V_{KE}(t, X^{st}(t))$ im Weiteren auch nicht aufgeführt, soweit sich diese aus dem Zusammenhang erschließen lassen; dies gilt insbesondere bei partiellen Ableitungen dieser Funktion innerhalb von partiellen Differentialgleichungen. Darüber hinaus wird auf eine explizite Kennzeichnung der Wertfunktion als im Zusammenhang mit Steuern stehend verzichtet.

[242] Vgl. S. 88.

gemeinen Start-/Bezugszeitpunkt $t\,(\in [0,T])$ zu definieren ist. Die Steuervariablen entsprechen dem Konsumprozess $c(.)$ und dem Portfolio-Prozess $(\pi_0^{st}(.), \pi^{st}(.)')$. Die laufenden Kosten werden durch $U_1(t,c(t))\,(t \in [0,T])$ und die Endkosten durch die Funktion $U_2(X^{st}(T))$ abgebildet. Das Problem $(\mathcal{KE}_\mathcal{S})$ entspricht dann dem Problem $(\mathcal{KE}_{\mathcal{S},0})$. Für das Differential des zugrunde liegenden Vermögensprozesses gilt Gl. (2.64), die unter Berücksichtigung von $X^{st}(t) = \pi_0^{st}(t) + \pi^{st}(t)'\mathbf{1}_n$ äquivalent ist zu:

$$\begin{aligned} dX^{st}(t) &= -c(t)\,dt + (1-st)\left(X^{st}(t)r(t)\,dt + \pi^{st}(t)'\left((b(t)+\delta(t)\right.\right. \\ &\left.\left. -r(t)'\mathbf{1}_n)\,dt + \sigma(t)\,dW(t)\right)\right),\ t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Durch die Substitution des Vermögensprozesses in Gl. (2.64) entfällt der Prozess $\pi_0^{st}(.)$, der die risikolose Anlage bzw. Verschuldung repräsentiert. Es wird dadurch deutlich, dass sich die Steuerung der Drift des Vermögensprozesses über den Portfolio-Prozess allein auf die erwarteten Rendite*differenzen* bezieht, welche man im Unterschied zwischen den Driftraten (zzgl. Dividendenraten) der einzelnen Aktien und dem risikolosen Zinssatz erblicken kann. Die *Hamilton-Jacobi-Bellman*-Gleichung[243] zum Problem $(\mathcal{KE}_{\mathcal{S},t})$ sieht nun wie folgt aus:

$$\begin{aligned} V_t + \sup_{(c,\pi)\in\mathcal{A}_{KE,t}(X^{st}(t))} &\left\{V_x(-c(t) + (1-st)(r(t)X^{st}(t) + \pi^{st}(t)'(b(t)\right. \\ +\delta(t) - r(t)'\mathbf{1}_n))) + \frac{1}{2}V_{xx}(1-st)^2\pi^{st}(t)'\sigma(t)\sigma(t)'\pi^{st}(t) &+ \left. U_1(t,c(t))\right\} = 0, \end{aligned} \tag{2.83}$$

wobei als Randbedingung $V(T, X^{st}(T)) = U_2(X^{st}(T))$ gilt. Die Aktienpreise $(S_i(t)\,(i = 1,\ldots,n; 0 \le t \le T))$ bzw. der Bondpreis $(S_0(t)\,(t \in [0,T]))$ beeinflussen annahmegemäß die Koeffizientenfunktionen nicht, so dass sie bei der Aufstellung der *Hamilton-Jacobi-Bellman*-Gleichung nicht berücksichtigt werden müssen[244]. Dies gilt, zumal auch das vorhandene Vermögen und der in eine bestimmte Aktiengattung oder den Bond (ggf. negativ) investierte Betrag, nicht zuletzt wegen der unterstellten beliebigen Teilbarkeit der Wertpapiere, unabhängig vom Preis einer Aktie bzw. des Bonds sind. Formale Extremierung der *HJB*-Gleichung nach $c(t)$, $\pi_1^{st}(t),\ldots,\pi_n^{st}(t)$ führt auf das folgende Gleichungssystem[245]:

$$-V_x + U_{1;c}(t,c(t)) = 0 \tag{2.84}$$

$$\begin{aligned} &V_x(1-st)(b_i(t)+\delta_i(t)-r(t)) \\ &+V_{xx}(1-st)^2\left(\sigma(t)\sigma(t)'\right)_{i.}\pi^{st}(t) = 0\ (i=1,\ldots,n). \end{aligned} \tag{2.85}$$

Aus Gl. (2.84) ergibt sich der optimale Konsumprozess unmittelbar als:

$$c(t) = I_1(t, V_x(t, X^{st}(t))),\ t \in [0,T], \tag{2.86}$$

[243] Vgl. Satz 2.13, wobei hier ein Maximierungsproblem zugrunde liegt.
[244] Vgl. *Merton* (1971), S. 384.
[245] Dabei sei daran erinnert, dass $(\sigma(t)\sigma(t)')_{i.}$ für den i-ten Zeilenvektor der $n\times n$-Matrix $\sigma(t)\sigma(t)'$ steht; vgl. S. 60.

wobei $I_1(t,.)$ die Umkehrfunktion zu $U_1'(t,c) = \frac{\partial U_1(t,c)}{\partial c} =: U_{1;c}(t,c)$ repräsentiert. Schließlich folgt aus dem Gleichungssystem (2.85):

$$\pi^{st}(t) = -\frac{1}{1-st}\frac{V_x(t,X^{st}(t))}{V_{xx}(t,X^{st}(t))}\left(\sigma(t)'\right)^{-1}\theta(t),\ t\in[0,T]. \tag{2.87}$$

Zur Ermittlung des aktuellen Wertes für den Portfolio-Prozess ist folglich die Kenntnis der Wertfunktion $V(t,X^{st}(t))$ vonnöten. Diese ergibt sich als Lösung der partiellen Differentialgleichung, welche durch Einsetzen der Steuerungsterme nach den Gl. (2.86) und (2.87) in die *Hamilton-Jacobi-Bellman*-Gleichung (2.85) entsteht. Dies führt auf die folgende zu lösende partielle Differentialgleichung (PDE):

$$\begin{aligned} V_t + V_x\left(-I_1(t,V_x) + (1-st)r(t)X^{st}(t) - \frac{V_x}{V_{xx}}\|\theta(t)\|^2\right) & \\ +\frac{1}{2}\frac{(V_x)^2}{V_{xx}}\|\theta(t)\|^2 + U_1(t,I_1(t,V_x)) &= 0 \\ \Leftrightarrow\ V_t + V_x\left(-I_1(t,V_x) + (1-st)r(t)X^{st}(t)\right) & \\ -\frac{1}{2}\frac{(V_x)^2}{V_{xx}}\|\theta(t)\|^2 + U_1(t,I_1(t,V_x)) &= 0. \end{aligned} \tag{2.88}$$

Bezüglich der Lösung dieser PDE ist auf die an die Wertfunktion und die Koeffizientenprozesse zu richtenden Voraussetzungen hinzuweisen[246]. Die Schwierigkeiten, die bei der Lösung der PDE zu erwarten sind, geben Anlass, — unter ggf. restriktiveren Voraussetzungen — nach einer expliziten Darstellung der Wertfunktion oder zumindest deren erster und zweiter (partieller) Ableitung nach dem Vermögen zu suchen, die zusammen hinreichend für die Bestimmung des zu wählenden Portfolio-Prozesses sind. Unter speziellen Stetigkeits- und Wachstumsbedingungen an die Koeffizientenfunktionen und die Funktionen $U_i([.,].)$ und $I_i([.,].)$ $(i\in\{1,2\})$[247] kann Folgendes hergeleitet werden[248]: Es wird der Prozess $Y_{st}^{(t,y)}(s)$ für $t\le s\le T$ definiert als:

$$Y_{st}^{(t,y)}(s) = y\frac{H_0^{st}(s)}{H_0^{st}(t)} = yY_{st}^{(t,1)}(s) = Y_{st}^{(0,y)}(s)\frac{1}{H_0^{st}(t)}, \tag{2.89}$$

$$\text{so dass } dY_{st}^{(t,y)}(s) = Y_{st}^{(t,y)}(s)\left[-(1-st)r(s)\,ds - \theta'(s)\,dW(s)\right] \tag{2.90}$$

$$= Y_{st}^{(t,y)}(s)\left[\left(-(1-st)r(s) + \|\theta(s)\|^2\right)ds - \theta'(s)\,dW_0(s)\right]. \tag{2.91}$$

Damit wird die Funktion $\mathcal{X}^{st}(t,.)$ als zeitabhängiges Pendant zur Funktion

[246] Vgl. S. 57 f.

[247] Siehe im Einzelnen Anhang 5.1.

[248] Zum Folgenden vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 118 ff. Die Darstellung dort verallgemeinert im Wesentlichen hinsichtlich der zugrunde liegenden Nutzenfunktionen, der (hier nicht weiter angesprochenen) Fortführung zur dualen Wertfunktion sowie dadurch, dass deterministische anstelle von konstanten Koeffizienten zugelassen sind, die Herleitung in *Karatzas/Lehoczky/Shreve* (1987), S. 1574 ff.

$\mathcal{X}^{st}_{KE}(.)$ (vgl. Gl. (2.41) mit Steuerkorrektur) wie folgt gebildet[249]:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{X}^{st}(t,y) \\
&:= \frac{1}{H_0^{st}(t)} E\left[\int_t^T H_0^{st}(s) I_1(t, Y_{st}^{(t,y)}(s))\,ds + H_0(T) I_2(Y_{st}^{(t,y)}(T))\right] \qquad (2.92)\\
&= \frac{1}{H_0^{st}(t)} E\left[\int_t^T H_0^{st}(s) I_1(t, y\frac{H_0^{st}(s)}{H_0^{st}(t)})\,ds + H_0(T) I_2(y\frac{H_0^{st}(T)}{H_0^{st}(t)})\right],\ y \in \mathbb{R}_{++}.
\end{aligned}$$

Die im ersten Argument einmal, im zweiten zweimal stetig differenzierbare[250] Umkehrfunktion (im zweiten Argument) zu $\mathcal{X}^{st}(.,.)$ ist gegeben durch $\mathcal{Y}^{st}: [0,T] \times (0,\infty) \to (0, z^{st}_{KE}(t))$, wobei $z^{st}_{KE}(t)$ für gegebenes $t\,(\in [0,T])$ analog z_{KE} gemäß Gl. (2.42) mit Bezug auf $\mathcal{X}^{st}(t,.)$ definiert ist[251]. Nach Gl. (2.71) gilt für den optimalen Konsumprozess $c^{st}(.)$ beim Anfangsvermögen x im Zeitpunkt $t = 0$:

$$c^{st}_{(KE)}(t) = I_1(t, \mathcal{Y}^{st}_{(KE)}(x) H_0^{st}(t)) = I_1(t, Y_{st}^{(0,z)}(t)),\ t \in [0,T], \qquad (2.93)$$

mit $z := \mathcal{Y}^{st}_{(KE)}(x)$.

Für den optimalen Vermögensprozess nach Gl. (2.73) ergibt sich mit diesem optimalen Konsumprozess aufgrund von $\xi^{st} = I_2(Y_{st}^{(0,z)}(T))$ nach Gl. (2.72) sowie aufgrund der Markov-Eigenschaft des Prozesses $Y_{st}^{(t,z)}(.)$ bei deterministischen Koeffizienten ($t \in [0,T]$):

$$\begin{aligned}
X^{st}(t) &= \frac{1}{H_0^{st}(t)} E\left[\int_t^T H_0^{st}(s) I_1(t, Y_{st}^{(0,z)}(s))\,ds\right.\\
&\quad \left. + H_0^{st}(T) I_2(Y_{st}^{(0,z)}(T)) \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathcal{X}^{st}(t, Y_{st}^{(0,z)}(t)). \qquad (2.94)
\end{aligned}$$

Folglich ist:

$$Y_{st}^{(0,z)}(t) = \mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t)) \qquad (2.95)$$

und der Konsumprozess stellt sich in Abhängigkeit des Vermögens dar als:

$$c^{st}(t) = I_1(t, \mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t))),\ t \in [0,T]. \qquad (2.96)$$

Es kann die folgende Darstellung für den optimalen Vermögensprozess abgeleitet werden ($t \in [0,T]$):

$$\begin{aligned}
&\frac{X^{st}(t)}{S_0^{st}(t)} + \int_0^t \frac{c^{st}(s)}{S_0^{st}(s)}\,ds \\
&\quad = x - \int_0^t \frac{\mathcal{Y}^{st}(s, X^{st}(s))}{S_0^{st}(s)} \mathcal{X}_y^{st}(s, \mathcal{Y}^{st}(s, X^{st}(s)))\theta'(s)\,dW_0(s). \qquad (2.97)
\end{aligned}$$

---

[249] $\mathcal{X}^{st}(.,.)$ ist stetig auf $[0,T] \times (0,\infty)$ und in $C^{1,2}([0,T) \times (0,\infty))$.
[250] Dies gilt bezüglich des Bereiches $[0,T) \times (0,\infty)$.
[251] $\mathcal{Y}^{st}(.,.)$ ist stetig auf dem gesamten Bereich $[0,T] \times (0,\infty)$.

(Die Herleitung dieser Gleichung und weiterer Aussagen ist in Anhang 5.1 wiedergegeben.)

Mit

$$\frac{\partial \mathcal{X}^{st}}{\partial y}(t,y) =: \mathcal{X}_y^{st}(t,y) = \frac{1}{\mathcal{Y}_x^{st}(t,\mathcal{X}^{st}(t,y))} \tag{2.98}$$

ergibt sich aus einem Vergleich von Gl. (2.97) mit Gl. (2.66), wobei in dieser Gleichung der Wiener-Prozess $W(.)$ durch den Prozess $W_0(.)$ gemäß der *Girsanov*-Transformation nach Gl. (2.23) zu substituieren ist:

$$\pi^{st}(t) = -\frac{1}{1-st}\frac{\mathcal{Y}^{st}(t,X^{st}(t))}{\mathcal{Y}_x^{st}(t,X^{st}(t))}\left(\sigma(t)'\right)^{-1}\theta(t),\ t\in[0,T]. \tag{2.99}$$

Damit entsteht ein Ausdruck für den Portfolio-Prozess, in welchem im Unterschied zu Gl. (2.87) die Wertfunktion nicht mehr auftritt. An die Stelle der (partiellen) Ableitung der Wertfunktion nach der Vermögensvariablen tritt nunmehr die Funktion $\mathcal{Y}^{st}(.,.)$, welche dementsprechend dieser Ableitung entsprechen muss. Das Problem der Ermittlung eines Portfolio-Prozesses „reduziert“ sich dadurch auf die Bestimmung dieser Funktion bzw. der Funktion $\mathcal{X}^{st}(.,.)$. Aus Gl. (2.99) — wie auch bereits aus Gl. (2.87) — ist zudem ersichtlich, wie die optimale Investitionsentscheidung des Individuums (auch) durch die Bildung eines Fonds realisiert werden kann[252]. Indem lediglich der Ausdruck $-\frac{\mathcal{Y}^{st}(s,X^{st}(t))}{\mathcal{Y}_x^{st}(t,X^{st}(t))}$ für einen gegebenen Zustand (t,ω) von der Nutzenfunktion des Investors abhängt und einen reellen Betrag (x_{Fonds}) repräsentiert, wird durch die Präferenz des einzelnen Investors nur die absolute Höhe der Investition in ein Aktienportfolio festgelegt. Dessen Zusammensetzung wird im Übrigen jedoch durch das Verhältnis der Komponenten des Vektors $\left(\sigma(t)'\right)^{-1}\theta(t)$ zueinander bestimmt. Für dieses Verhältnis ist die der Optimierung zugrunde liegende Nutzenfunktion irrelevant. Somit kann ein Fonds aus den am Markt gehandelten Aktien gebildet werden, dessen Zusammensetzung den bezeichneten Vektor (mit einem reellen Vielfachen) repliziert. Jeder Investor erwirbt dann einen Anteil an diesem Fonds entsprechend dem durch seine Nutzenfunktion bestimmten Betrag x_{Fonds}, der allerdings aus steuerlichen Gründen noch um den Faktor $\frac{1}{1-st} > 1$ ($st > 0$) erhöht wird. Damit wird zugleich der in den Bond zu investierende bzw. der durch Emission des Bonds aufzunehmende Betrag ermittelt. Die Korrektur des Investitionsbetrages in den Fonds um den Term $\frac{1}{1-st}$ (> 1) bestätigt die in den Beispielen des *Abschnitt 2.2.3.4* vorgefundene Wirkung der Besteuerung: Sie führt c.p. zu einer riskanteren Investitionspolitik.

Was die Wertfunktion $V(.,.)$ anbelangt, so ist eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (2.88) für sie durch die Funktion:

$$V(t,x) = G^{st}(t,\mathcal{Y}^{st}(t,x)),\ t\in[0,T],$$

[252] Vgl. auch *Karatzas/Shreve* (1998), S. 125.

gegeben, wobei

$$G^{st}(t,y) := E\left[\int_t^T U_1(s, I_1(s, Y_{st}^{(t,y)}(s)))\,ds + U_2(I_2(Y_{st}^{(t,y)}(T)))\right], \quad y \in \mathbb{R}_{++}. \tag{2.100}$$

(vgl. hierzu Anhang 5.1[253]).

Mit der Beschreibung von *Merton's* Separationstheorem und der Wertfunktion ist die Behandlung der dynamischen Portfolio-Optimierung auf vollständigen Kapitalmärkten abgeschlossen. Eine explizite Herleitung der Wertfunktion und des Portfolio-Prozesses ist in *Karatzas/Lehoczky/Shreve* (1987), S. 1574-1581, für eine bestimmte Klasse von Nutzenfunktionen, zu denen die HARA-Nutzenfunktionen gehören, und konstante Koeffizienten zu finden.

Mit der dynamischen Portfolio-Optimierung war das Problem des Investors angesprochen, zu jedem Zeitpunkt eine Kombination von in ihrem Wert bekannten Wertpapieren zu finden, welche das Nutzenziel des Investors, ggf. unter Restriktionen, optimiert. Im Folgenden wird ähnlich der in *Abschnitt 2.2.2* angesprochenen Bewertung von zukünftigen Ansprüchen aus (finanziellen) Investitionen wiederum ein Bewertungsproblem behandelt, das nunmehr den Aspekt wahlabhängiger Zahlungen hervorhebt. Es geht um Realoptionen.

2.2.4 Bedingte Ansprüche als Realoptionen

Realoptionen entsprechen bedingten Ansprüchen aus Handlungsmöglichkeiten im Sachinvestitionsbereich. Sie sind Gegenstand einer wesentlich normativ geprägten, intensiven wissenschaftlichen Auseinandersetzung, welche Ende der siebziger, Anfang der achtziger Jahre einsetzte und bis in die heutige Zeit an Lebhaftigkeit nicht eingebüßt hat. Da mittlerweile diverse, das Themengebiet sachlich und hinsichtlich seiner modelltheoretischen Behandlung hinreichend strukturierende Arbeiten — auch jüngeren Datums — vorliegen, soll hier nicht der Versuch unternommen werden, diese Entwicklung (nochmals) nachzuzeichnen oder gar das Thema „Realoptionen“ in seinen zahlreichen Facetten umfassend darzustellen[254]. Obgleich eine kurze Einführung in

[253] Vgl. insbesondere S. 282 ff.

[254] Vgl. hierzu bspw. *Dixit/Pindyck* (1994) und *Trigeorgis* (1996), bei denen sich auch eine ausführliche Behandlung der nachfolgend angesprochenen Optionstypen, insbesondere mit Darstellungen zu wesentlichen modelltheoretischen Beiträgen, findet — diesbezüglich insbesondere *Trigeorgis* (1996), S. 2 f.; vgl. zum Themengebiet auch die Aufsätze in den Sammelbänden von *Lund/Øksendal* (1991), Kapitel II, *Brennan/Trigeorgis* (2000) und *Schwartz/Trigeorgis* (2001), den Übersichtsartikel vor allem zu grundsätzlichen Modellierungsaspekten von *Sick* (1995) sowie die weiteren Nachweise in *Lucke* (2000), S. 9. Anzuführen sind bspw. auch die Monographien von *Bockemühl* (2001), *Kilka* (1995), *Lucke* (2000) und *Meise* (1998). Eine Untersuchung zur Erklärung des Investitionsverhaltens mit Hilfe der Realoptionstheorie enthält *Werner* (2000).

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

die im Schrifttum vorzufindende Typisierung von Realoptionen angezeigt ist, dient der vorliegende *Abschnitt* im Wesentlichen der Vorbereitung auf einen bislang wenig beachteten Aspekt, nämlich die Auseinandersetzung mit Realoptionen auf unvollständigen Märkten, welche Gegenstand von *Abschnitt 3.3.4* sein wird[255]. Hierbei wird auf einen speziellen Realoptionstyp abgestellt. Im Hinblick darauf ist an dieser Stelle eine spezielle Form einer Realoption auf einem vollständigen Kapital- und Güter-Markt näher zu betrachten[256], welche einer indizierten Kaufoption entspricht.

Realoptionstypen können wie folgt differenziert werden: Eine *Warteoption* kennzeichnet die Möglichkeit, den Beginn eines Investitionsvorhabens aufzuschieben, um bspw. einen günstigen Zeitpunkt in Bezug auf den Endprodukt-, allgemeiner Outputpreis und/oder die Preise der Inputfaktoren abzuwarten. Im Unterschied dazu bildet die *Abbruchoption* die Handlungsmöglichkeit ab, welche im Beenden eines im Betrieb befindlichen Produktionsprozesses besteht. Hierbei sind insbesondere bei ungünstiger Erlös- oder Faktorpreisentwicklung Chancen und Risiken einer Fortführung gegen den bei Liquidation erzielbaren Zerschlagungs- respektive Veräußerungswert abzuwägen. Der Auswahlmöglichkeit zwischen diesen Alternativen kommt ein positiver Optionswert zu. Dies gilt in ähnlicher Weise dann, wenn eine spätere Wiederaufnahme der Produktion möglich ist. Eine solche Möglichkeit der (vorübergehenden) Stilllegung (*Stilllegungsoption*) kann sich bspw. bei der temporären Aussetzung des Abbaus von Rohstoffen oder der zeitweisen Stilllegung von Flugzeugen oder Schiffen ergeben[257]. Die Komplexität des Entscheidungsproblems, mithin die Bestimmung des Optionswertes, hängt dann insbesondere davon ab, ob und ggf. in welcher Höhe der Übergang in die bzw. von der Stilllegungsphase und/oder die Aufrechterhaltung der Betriebsbereitschaft mit Zahlungen verbunden sind. Allgemein entsteht bei den bisher angesprochenen Realoptionen ein (echtes) Entscheidungsproblem erst dadurch, dass die Wahl einer Alternative irreversibel oder zumindest nicht kostenlos reversibel ist[258]. Dies gilt in analoger Weise bei einer *Umstellungs-*

[255] Damit sind allerdings nicht Bewertungsansätze der „Dynamischen Programmierung" gemeint, welche bei einem unvollständigen Markt und damit bei der Nicht-Anwendbarkeit der arbitragefreien Optionsbewertung („Contingent Claims Analysis") eingesetzt werden können, indem sie die Marktunvollständigkeit durch Einführung eines vorgegebenen Diskontierungszinssatzes „umgehen"— wie bspw. *Cossin/Leleux/Saliasi* (2002). Zu den beiden alternativen Bewertungsansätzen vgl. *Dixit/Pindyck* (1994), S. 93 ff., insbes. S. 99, 120 f. Zu Ansätzen, welche explizit auf eine Marktunvollständigkeit abstellen, vgl. den Verweis auf *Henderson* (2002) in Fn. 401, S. 220.

[256] Im Weiteren wird ggf. auch nur von einem Kapitalmarkt gesprochen, wobei unterstellt wird, dass auf ihm Finanzinstrumente gehandelt werden, die die Preise der betrachteten Güter repräsentieren.

[257] Vgl. *Dixit/Pindyck* (1994), S. 229.

[258] Stärker differenzierend sowie mit dem Hinweis auf *Pindyck* (1988), S. 969, *Lucke* (2000), S. 9 f.; vgl. hierzu auch *Dixit/Pindyck* (1994), S. 8 f. Entstehen bei der Stilllegungsoption keine Zahlungen beim Übergang von der bzw. in die Stilllegungsphase sowie während derselben, so ist zumindest das Entscheidungsverhalten trivial, indem nur bei positiven (zahlungswirksamen) Deckungsbeiträgen produziert wird; vgl. *Trigeorgis* (1996), S. 187.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

bzw. *Wechseloption*, die sich aus der (einmaligen oder permanenten) Auswahlmöglichkeit zwischen sich substituierenden Inputfaktoren, Produktionsprozessen oder zwischen verschiedenen Outputs ableitet[259]. Anstelle einer vollständigen Stilllegung kann ferner die Möglichkeit zur Reduzierung des Kapazitätsumfanges (*Einschränkungsoption*) gegeben sein; analog mag die Option zur Erweiterung der Kapazität bestehen (*Erweiterungsoption*). Einschränkungs- und Erweiterungsoption werden häufig in Bezug auf die Höhe der Kapazitätsanpassung mehrstufig sein. Eine insbesondere in zeitlicher Hinsicht graduell ausübbare Realoption verfeinert die Modellierung des Vorgangs der Investitionsdurchführung: Die *Option einer mehrstufigen Investition* entsteht dadurch, dass die Durchführung des Investitionsprojektes in mehreren Phasen erfolgt oder zumindest eine nicht vernachlässigbare Zeitspanne der Realisierung erfordert. Als Beispiel für den ersten Fall kann die Erschließung von Erdöl- oder Erdgasvorkommen dienen, bei der zunächst Explorationsbohrungen durchzuführen sind, bevor das Vorkommen weiterentwickelt wird und es schließlich zur Förderung des Rohstoffes kommt[260]. Nach jeder Phase kann neu über die Alternativen entschieden werden, die Investitionsausgaben zur Durchführung der nächsten Phase aufzubringen oder aber das Projekt abzubrechen, falls sich zeigt, dass das Vorkommen nicht ergiebig genug ist, oder falls sich bspw. der Rohstoffpreis im Verhältnis zu den Produktionskosten ungünstig entwickelt hat. Die Investitionsausgaben vorausgehender Phasen sind dann als Prämien von Kaufoptionen auf die Entscheidungsmöglichkeiten, ebenfalls zumeist in Gestalt von Kaufoptionen, der nachfolgenden Phasen zu interpretieren. Gleiches gilt auch für Investitionsprojekte, deren Realisierung eine nicht vernachlässigbare Zeitspanne benötigt und bei denen der bis zum aktuellen Zeitpunkt investierte Betrag „sunk costs“ repräsentiert, wobei das Projekt jederzeit abgebrochen werden kann[261].

Das letzte Beispiel deutet bereits darauf hin, dass in praktischen Anwendungen zumeist *verbundene Optionen* auftreten werden, welche in der gerade beschriebenen Weise zeitlich aufeinander aufbauen oder aber, ggf. zusätzlich, als Alternativen einander gegenüberstehen[262]. Der wechselseitige Bezug der

---

[259] Eine Umstellungsoption kann auch in der Möglichkeit des Qualitätswechsels im Endprodukt gesehen werden; vgl. zu einer solchen Realoption *Pawlina/Kort* (2002).

[260] Vgl. hierzu und zum Folgenden bspw. *Dixit/Pindyck* (1994), S. 321 ff., oder *Lucke* (2000), S. 13 ff., sowie die Beschreibung in *Paddock/Siegel/Smith* (1988), S. 481, 483 ff., — Letztere treffen jedoch eine vereinfachende Annahme hinsichtlich der Ausübung nachgelagerter Optionen, so dass eine der einfachen Warteoption vergleichbare Bewertungsproblematik entsteht.

[261] Vgl. *Dixit/Pindyck* (1994), S. 320. Ein komplexes Beispiel für Investitionen im Bereich der Informationstechnologie, bei dem sowohl Input- als auch Outputpreise als stochastische Prozesse abgebildet werden, ist im Modell von *Schwartz/Zozaya-Gorostiza* (2000) gegeben. Von besonderer Relevanz ist die Berücksichtigung mehrstufiger Realoptionen bei Investitionen in Forschungs- und Entwicklungsprojekte, welche durch eine lange Laufzeit und eine hohe Unsicherheit bezüglich der den Wert bestimmenden Faktoren gekennzeichnet sind. Eine diesbezügliche Modellformulierung ist in *Schwartz/Moon* (2000) zu finden.

[262] Vgl. *Bockemühl* (2001), S. 65, *Trigeorgis* (1996), S. 227 ff.; zur Bewertung einer einfachen verbundenen Option vgl. *Geske* (1979).

Wahlmöglichkeiten bedingt i.d.R., dass sich der Wert des Projektes mit dem Bündel an Optionen nicht lediglich als Summe der einzelnen Optionswerte darstellt, sondern dass entsprechende Verbundeffekte zu berücksichtigen sind[263]. So kann im angeführten Beispiel von Erdöl- und Erdgasprojekten alternativ zum Abbruch (Abbruchoption) ggf. auch lediglich eine vorübergehende Aussetzung der Projektausführung (Stilllegungsoption) erfolgen oder es besteht die Möglichkeit, erst in fortgeschrittenen Entwicklungsstufen die Intensität des Rohstoffabbaues festzulegen (Erweiterungs-, Einschränkungsoption)[264].

Darüber hinaus können einfache oder verbundene Optionen zum einen exklusiv der betrachteten Unternehmung zuzuordnen sein; sie können zum anderen auch Mitbewerbern zur Verfügung stehen, so dass deren Ausübungsverhalten Einfluss auf den Wert der Optionen für die betrachtete Unternehmung besitzt. Berücksichtigt man darüber hinaus, dass bestimmte Optionstypen ein Wahlelement bezüglich des Ausübungszeitpunktes aufweisen, andere hingegen als nur zu bestimmten Zeitpunkten ausübbar ausgestaltet sein können, sind Realoptionen auch hinsichtlich ihrer zeitlichen Ausübung differenzierbar. Dementsprechend lassen sich Realoptionen nach *Trigeorgis*[265] klassifizieren als Kombination aus den Merkmalen: *exklusiv* oder *geteilt mit Mitbewerbern*, *einfach* oder *verbunden* sowie *unmittelbar auszuüben (europäisch)* oder *zeitlich verschiebbar (amerikanisch)*.

Vorzugsweise in Bezug auf die Warteoption, jedoch auch zu komplexeren Optionen sind zudem die steuerlichen Einflüsse auf das Entscheidungsverhalten untersucht worden — besonders intensiv unter dem Blickwinkel verschiedener Steuersysteme und Investorpräferenzen von *Niemann* und *Sureth*[266]. Die Warteoption ist auch Gegenstand der abschließenden Ausführungen dieses Abschnittes. Mit dem Hinweis auf die eingangs beschriebene Motivation soll im Folgenden der Wert dieser Option, jedoch im Grundfall ohne Steuern, hergeleitet werden.

Zur Abbildung der Warteoption wird im Weiteren der Fall betrachtet, dass die Unternehmung die Möglichkeit besitzt, zu einem beliebigen Zeitpunkt innerhalb eines unendlichen Planungszeitraumes $[0, \infty)$ ein Investitionsprojekt zu verwirklichen, das im Zeitpunkt der Ausübung einen Kapitalwert von:

$$B(t) = \max\left[V(t) - I(t), 0\right] \tag{2.101}$$

[263] Vgl. *Trigeorgis* (1996), S. 232 ff.

[264] Vgl. *Meise* (1998), S. 139. Verbundene Optionen, deren Ausübung in den ersten Stufen vielfältige strategische Optionen und damit zusammenhängende Wachstumsmöglichkeiten generiert — so genannte *Wachstumsoptionen* —, werden für konkrete Fälle aus dem Bereich der Informationstechnologie sowie einer strategisch motivierten Internationalisierung eines Kreditinstitutes in *Panayi/Trigeorgis* (1998) beschrieben.

[265] Vgl. *Trigeorgis* (1996), S. 142 ff.

[266] Vgl. bspw. *Niemann* (1999, 2001), *Sureth* (1999, 2002) sowie *Niemann/Sureth* (2002). Zu weiteren Nachweisen vgl. *Sureth/Niemann* (2002).

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

aufweist[267]. $V(.)$ kennzeichnet den Wert-Prozess des einzunehmenden Objektes (Underlying), während $I(.)$ den Prozess des hierfür aufzubringenden Wertes (Vorleistungswertprozess) beschreibt. Beide Wertprozesse werden dabei, in ihrer weitesten Auslegung, als geometrisch Brown'sche Bewegungen modelliert. In allgemeiner Form werden die Prozesse somit durch die folgenden stochastischen Differentialgleichungen beschrieben ($t \in [0, \infty)$):

$$dV(t) = V(t)\left(b_V\,dt + \sigma_V\,dW^V(t)\right), \tag{2.102}$$

$$dI(t) = I(t)\left(b_I\,dt + \bar{\sigma}_I\,d\bar{W}^I(t)\right). \tag{2.103}$$

V_0 und I_0 kennzeichnen die Startwerte in $t = 0$. b_V, b_I, σ_V bzw. $\bar{\sigma_I}$ repräsentieren Konstanten für Drift bzw. Streuung; $W^V(.)$ und $\bar{W}^I(.)$ stehen für (möglicherweise korrelierte) Wienerprozesse. Die Korrelation zwischen den Wiener-Prozessen wird mit $\rho_{IV} \neq 1$ gekennzeichnet. Eine Long-Position in $V(.)$ bzw. $I(.)$ kann zudem mit einer „Dividende" verbunden sein; in einer Short-Position wirkt die Dividende „mit umgekehrtem Vorzeichen". Der Vektor der Dividendenraten werde mit $\delta(.) = (\delta_V(.), \delta_I(.))'$ gekennzeichnet, wobei insbesondere mit $\delta_i(.) < 0$ ($i = V, I$) Lagerkosten abgebildet werden können, die sich dann allerdings auf den gesamten, auf einen Zeitpunkt konzentrierten Wert der Vorleistungen bzw. des optierten Objektes beziehen. In abstrakter Form können im Vektor der Dividendenraten Opportunitätskosten in Gestalt nicht realisierter Einzahlungsüberschüsse zum Ausdruck kommen, welche der Unternehmung durch die Nicht-Ausübung der Option entstehen.

Der gewählte Ansatz impliziert, dass der Rückfluss aus der zukünftigen, wahlweise realisierbaren Investition in einem Betrag, also als Ertragswert im Ausübungszeitpunkt, zur Verfügung steht. Insofern ist bei laufenden Rückflüssen davon auszugehen, dass sich die Summe ihrer Barwerte im modellierten Wertverlauf von $V(.)$ widerspiegelt. Analoges gilt für den Wertverlauf der Vorleistungen ($I(.)$). Der Besitz des Underlyings bringt einen kontinuierlichen, konstanten Dividendenstrom mit der Rate δ_V, welcher bis zur Verwirklichung der Investition nicht vereinnahmt wird. Dabei soll *zunächst* unterstellt werden, dass sich der Wert der einzukaufenden Vorleistungen deterministisch entwickelt, also Preissicherheit hinsichtlich zukünftiger Vorleistungen besteht oder zumindest vereinfachend angenommen werden kann, und eine Vorhaltung des Inputs keine Auszahlungen (Lagerkosten) verursacht bzw. diese bereits

[267] Die Gestalt der Option entspricht der von *McDonald/Siegel* (1986) untersuchten; die Autoren weisen dem Auszahlungsprofil noch alternativ mögliche Interpretationen als Wechseloption oder Liquidations-(Abbruch-)Option zu; vgl. *ebd*, S. 711. Im Unterschied zu *McDonald/Siegel* soll im Folgenden der Optionswert als arbitragefreier Optionspreis und nicht unter Rückgriff auf eine investorspezifische Diskontierungsrate hergeleitet werden. Dabei sind ggf. nicht verschwindende Dividendenprozesse explizit berücksichtigt. Anzumerken ist, dass unter dem Begriff der Warte*option* gemäß dem beschriebenen Auszahlungsprofil somit nicht nur die Wahlmöglichkeit als solche, sondern auch der „Wert der Investition an sich" erfasst ist, wenn man Letzteren als durch den Investitionswert bei sofortiger Ausübung repräsentiert sieht; vgl. auch die sprachliche Charakterisierung in *Dixit/Pindyck* (1994), S. 137.

mit einem etwaigen Preisanstieg in der Driftrate b_I und damit im Wertverlauf der Vorleistungen aufgehen. Dies bedeutet, dass sie bei einem etwaigen, ggf. partiellen Verkauf der Vorleistungen vergütet würden. Der „Dividendenprozess" für die Vorleistungen soll also den Wert null ($\delta_I \equiv 0$) annehmen. Im Anschluss daran wird auch eine stochastische Entwicklung dieses Vorleistungswertprozesses zugelassen.

1. Fall: Warteoption mit deterministischem Vorleistungswertprozess; $\bar{\sigma}_I \equiv 0, \delta_I \equiv 0$

Es ergeben sich aus den Gl. (2.102) und (2.103) die folgenden Prozesse:

$$V(t) = V_0 e^{(b_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)t + \sigma_V W^V(t)} = V_0 e^{(r - \delta_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)t + \sigma_V W_0^V(t)}, \tag{2.104}$$

wobei der Wiener-Prozess $W_0^V(.)$ aus der *Girsanov*-Transformation des Wiener-Prozesses $W^V(.)$ mit dem Maßwechselprozess $\theta_0 = \frac{1}{\sigma_V}(b_V + \delta_V - r)$ hervorgeht. Für den Vorleistungswertprozess gilt:

$$I(t) = I_0 e^{b_I t}. \tag{2.105}$$

Es werde ferner gesetzt:

$$\tilde{V}(t) := V(t)e^{-b_I t},\ \tilde{I}(t) := I(t)e^{-b_I t} = I_0,\ t \geq 0. \tag{2.106}$$

Der optierte Prozess hat damit die folgende Gestalt für $t \geq 0$:

$$B(t) = \max\left[V(t) - I(t), 0\right] = e^{b_I t} \max\left[\tilde{V}(t) - I_0, 0\right]. \tag{2.107}$$

Der Wert einer amerikanischen Kaufoption mit diesem Auszahlungsprofil und bei unendlicher Laufzeit ist nach *McKean*[268] durch die folgende Funktion $h_{AC}(.)$ beschrieben — wobei $r - b_I - \delta_V > 0$ vorauszusetzen ist:

$$h^{AC}(V(t)) = \begin{cases} (a - I_0)\left(\frac{V(t)}{a}\right)^\gamma; & 0 < V(t) < a, \\ V(t) - I_0; & a \leq V(t); \end{cases} \tag{2.108}$$

dabei sind:

$$a := \frac{\gamma I_0}{\gamma - 1},\ \gamma := \frac{\sqrt{\rho^2 + 2(r - b_I)} + \rho}{\sigma_V} \text{ und } \rho := \frac{\delta_V - (r - b_I)}{\sigma_V} + \frac{\sigma_V}{2}.$$

[268] *McKean* (1965); vgl. auch *Karatzas/Kou* (1998), S. 242, *Karatzas/Shreve* (1998), S. 62 ff. Eine nur geringfügige Modifikation ergibt sich durch die hier unterstellte Drift b_I des Vorleistungswertprozesses. Die Modifikation wirkt so, als ob der Wert des risikolosen Zinssatzes $r - b_I$ betragen würde. Zur Verdeutlichung sei der Wert des Prozesses $\tilde{V}(.)$ in obige Gleichung eingefügt. Zu ermitteln ist folglich der Wert des Ausdruckes $\sup_{\tau \in \mathcal{S}_{0,\infty}} E_0\left[e^{-(r-b_I)\tau}\left[V_0 e^{(r - b_I - \delta_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)\tau + \sigma_V W_0^V(\tau)} - I_0, 0\right]\right]$, wobei $\mathcal{S}_{0,\infty}$ für die Menge der $\mathcal{F}$ messbaren Stoppzeiten $\tau : \Omega \to [0, \infty)$ steht. Der Ausdruck entspricht dem Wert einer Kaufoption auf $V(.)$ bei einem Zinsniveau für risikolose Anlagen von $r - b_I$.
Eine analytische Lösung zur Bewertung einer Kaufoption c.p. bei endlichem Planungshorizont existiert bislang nicht; vgl. auch die Hinweise in *Steiner/Uhlir* (2001), S. 268, *Karatzas/Kou* (1998), S. 223.

Diesbezüglich gilt ferner $E_0\left[e^{-(r-b_I)\tau_a}\right] = \left(\frac{V(t)}{a}\right)^{\gamma}$[269], wobei τ_a die Stoppzeit kennzeichnet, die durch das Erreichen der Grenze a durch den Prozess $V(.)$ bestimmt wird. Damit ergibt sich der Optionspreis insgesamt als unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P_0 erwarteter Barwert der Optionsauszahlung.

2. Fall: Warteoption mit stochastischem Vorleistungswertprozess

Hinsichtlich der Vorleistungen wird nunmehr eine stochastische Wertentwicklung zugelassen. Lagerkosten o.Ä. sollen allerdings wiederum vollständig in diesen Wertprozess eingehen, so dass von einer Ausschüttung von null ausgegangen wird ($\delta_I(.) \equiv 0$). Auf die Realoption wirken nunmehr zwei verschiedene Unsicherheitsquellen, repräsentiert durch die Wiener-Prozesse $W^V(.)$ und $\bar{W}^I(.)$. Annahmegemäß können beide Wiener-Prozesse korreliert sein; der Korrelationskoeffizient ρ_{IV} wird als konstant vorausgesetzt. In einem ersten Schritt werden zwei stochastisch unkorrelierte Unsicherheitsquellen erzeugt. Mit Hilfe einer *Cholesky*-Zerlegung[270] kann der Wiener-Prozess $\bar{W}^I(.)$ subsituiert werden durch $\rho_{IV}\, dW^V(.) + \sqrt{1-\rho_{IV}^2}\, dW^I(.)$ — mit dem neu einzuführenden Wiener-Prozess $W^I(.)$, welcher nunmehr stochastisch unabhängig von $W^V(.)$ und folglich auch unkorreliert mit diesem ist. Aus Gl. (2.103) ergibt sich damit:

$$dI(t) = I(t)\left(b_I\, dt + \bar{\sigma}_I\, d\left(\rho_{IV}\, dW^V(t) + \sqrt{1-\rho_{IV}^2}\, dW^I(t)\right)\right),\ t \in [0,T].$$

In Verbindung mit der Prozessdarstellung für $V(.)$ gemäß Gl. (2.102) und für $I(.)$ nach Gl. (2.103) wird für das Folgende gesetzt: $\sigma := (\sigma_{ij})_{i,j=1,2}$ mit $\sigma_{11} := \sigma_V, \sigma_{12} := 0, \sigma_{21} := \rho_{IV}\bar{\sigma}_I$ und $\sigma_{22} := \sqrt{1-\rho_{IV}^2}\bar{\sigma}_I$, so dass im Weiteren für $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} dV(t) &= V(t)\left(b_V\, dt + \sigma_{11}\, dW^V(t)\right), && (2.109)\\ dI(t) &= I(t)\left(b_I\, dt + \sigma_{21}\, dW^V(t) + \sigma_{22}\, dW^I(t)\right) && (2.110)\end{aligned}$$

mit den unveränderten Ausgangswerten V_0 und I_0 zugrunde liegen soll. Der Wert zur betrachteten indizierten, amerikanischen Kaufoption mit unendlicher Laufzeit lautet:

$$h_{ind.}^{AC}(V(t),I(t)) = \begin{cases} \frac{1}{k}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}, V(t)\left(\frac{V(t)}{I(t)}\right)^{k}; & 0 < \frac{V(t)}{I(t)} < \frac{k+1}{k}, \\ V(t) - I(t); & \frac{k+1}{k} \leq \frac{V(t)}{I(t)}, \end{cases} \qquad (2.111)$$

mit $k := \frac{2\delta_V}{\sigma_d^2}$, wobei $\sigma_d^2 := (\sigma_{11}-\sigma_{21})^2 + (\sigma_{12}-\sigma_{22})^2 = \|\sigma_{1.} - \sigma_{2.}\|^2$.

Die Herleitung des Optionswertes soll lediglich skizziert werden. Sie lehnt sich an *Dixit/Pindyck* (1994), S. 207 ff. i.V.m. S. 177 ff., an[271].

[269] Vgl. *Karatzas/Kou* (1998), S. 241.

[270] Vgl. hierzu bspw. *Jorion* (2001), S. 303 f.

[271] Dort wird das Underlying durch einen stetig zu vereinnahmenden Produktpreisprozess repräsentiert, welcher als ewige Rente mit geeignetem Kalkulationszinsfuß verbarwertet dem hier zugrunde liegenden, optierten Vermögenswert $V(.)$ entspricht. Darüber hinaus wird hier ein Maßwechsel zur Ableitung des Optionswertes vorgenommen.

Begründung:
Über den Maßwechselprozess $\theta_a(.) \equiv \theta_a := -\sigma'_{2.} + \theta$, wobei $\theta = \sigma^{-1}(b+\delta-r\mathbf{1}_2)$ und $b = (b_V, b_I)'$, wird der Wiener-Prozess $W(.) = (W^V(.), W^I(.))'$ ersetzt durch den Wiener-Prozess $W^a(.)$ gemäß folgender *Girsanov*-Transformation:

$$dW^a(t) = \theta_a\, dt + dW(t).$$

Nach der Substitution lauten die Prozessgleichungen (2.109) und (2.110):

$$dV(t) = V(t)\left((r - \delta_V + \sigma_{1.}\sigma'_{2.})\, dt + \sigma_{1.}\, dW^a(t)\right), \tag{2.112}$$

$$dI(t) = I(t)\left((r + \|\sigma_{2.}\|^2)\, dt + \sigma_{2.}\, dW^a(t)\right). \tag{2.113}$$

Für den Bereich, in dem die Option nicht ausgeübt wird, werde nun eine Long-Position in der Option $h^{AC}_{ind.}(V(.), I(.))$ sowie Short-Positionen im Underlying $V(.)$ und dem Vorleistungswert $I(.)$ betrachtet, Letztere mit einem Vielfachen gemäß den Faktoren $m_V(.)$ bzw. $m_I(.)$. Die Wertentwicklung dieses Portfolios ergibt sich in vereinfachter Darstellung mit der mehrdimensionalen Itô-Formel als:

$$\begin{aligned} d(h^{AC}_{ind.} - m_V V - m_I I) = {} & (h^{AC}_{ind.;V} - m_V)\, dV + (h^{AC}_{ind.;I} - m_I)\, dI \\ & + \tfrac{1}{2}\left(V^2\|\sigma_{1.}\| h^{AC}_{ind.;VV} + 2VI\sigma_{1.}\sigma'_{2.} h^{AC}_{ind.;VI}\right. \\ & \left. + I^2\|\sigma_{2.}\|^2 h^{AC}_{ind.;II}\right) dt, \end{aligned}$$

wobei $h^{AC}_{ind.;G}(G = V, I)$ für die partielle Ableitung des Optionswertes nach G steht. (Höhere partielle Ableitungen sind entsprechend durch mehrere Indizes gekennzeichnet). Durch die Wahl von $m_V := h^{AC}_{ind.;V}$ und $m_I := h^{AC}_{ind.;I}$ ist der Wertzuwachs risikolos. Er muss dann gleich dem Zins auf den Portfoliowert, berechnet mit dem risikolosen Zinssatz, sowie zuzüglich der auf das leerverkaufte Underlying zu entrichtenden Dividendenzahlung $\delta_V m_V V\, dt$ sein. Dies führt auf die folgende Bedingung für die Funktion des Optionswertes im Nicht-Ausübungsbereich:

$$\begin{aligned} & (h^{AC}_{ind.} - m_V V - m_I I) r\, dt + \delta_V h^{AC}_{ind.;V} V\, dt \\ & \quad = \frac{1}{2}\left(V^2\|\sigma_{1.}\| h^{AC}_{ind.;VV} + 2VI\sigma_{1.}\sigma'_{2.} h^{AC}_{ind.;VI} + I^2\|\sigma_{2.}\|^2 h^{AC}_{ind.;II}\right) dt \end{aligned} \tag{2.114}$$

Randbedingungen ergeben sich daraus, dass zum einen der Optionswert auf der Grenze zum Ausübungsbereich, betrachtet an der Stelle $(\hat{V}, \hat{I})$, den Ausübungswert $\hat{V} - \hat{I}$ annehmen muss („Value-matching"-Bedingung), wobei natürlich nur bei nicht-negativer Differenz der Werte ausgeübt wird[272]. Zum anderen müssen die partiellen Ableitungen der Funktion des Optionswertes für den Nicht-Ausübungsbereich an der Grenze zum Ausübungsbereich dieselben (Grenz-)Werte wie diejenigen der im Ausübungsbereich geltenden Wertfunktion der Option aufweisen („Smooth-pasting"-Bedingung)[273]. Die Grenze zwischen Ausübungs- und Nicht-Ausübungsbereich muss durch einen Schwellenwert in Bezug auf den Quotienten aus $V(t)$ und $I(t)$ gegeben sein, da der

[272] Zur *Zweiteilung* in einen Ausübungs- und einen Nicht-Ausübungsbereich vgl. *McDonald/Siegel* (1986), S. 712 f., 726.

[273] Zur Begründung der „Value-matching"- und der „Smooth-pasting"-Bedingungen vgl. *Dixit/Pindyck* (1994), S. 130 ff.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Schwellenwert numeraire-unabhängig sein muss und der Prozess $I(.)$ als Numeraire betrachtet werden kann[274]. Es kann nun leicht nachgeprüft werden, dass die durch Gl. (2.111) definierte Funktion die Differentialgleichung (2.114) und die Randbedingungen erfüllt, wobei die „Smooth-pasting“-Bedingungen mit $h_{ind.}^{AC;NAB}(V(t), I(t)) := \frac{1}{k}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} V(t) \left(\frac{V(t)}{I(t)}\right)^{k}$ für den Funktionsterm im Nicht-Ausübungsbereich der Option wie folgt lauten:

$$\frac{\partial h_{ind.}^{AC;NAB}}{\partial V}(V(t), I(t)) = 1 \text{ und } \frac{\partial h_{ind.}^{AC;NAB}}{\partial I}(V(t), I(t)) = -1.$$

Der Ausübungsbereich grenzt die Quotienten $\frac{V(.)}{I(.)}$ somit nach oben ab, wobei ein nicht-leerer Nicht-Ausübungsbereich verbleibt. In diesem Bereich ergibt sich ein positiver Zeitwert der Option aus $h_{ind.}^{AC;NAB}(V(t), I(t)) - (V(t) - I(t))$.

Die vorausgegangenen Anmerkungen zu Realoptionen beenden die Darstellung zur Optionspreisbestimmung und Portfolio-Strukturierung auf vollständigen Kapital- bzw. Gütermärkten. Das folgende Kapitel wendet sich nun der dergestalt spezifizierten Investitionsrechnung auf unvollständigen Kapitalmärkten zu.

[274] Vgl. auch *Dixit/Pindyck* (1994), S. 210.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

3. Bewertung bedingter Ansprüche und Portfolio-Optimierung auf unvollständigen Kapitalmärkten

Nach der Behandlung von Investitionsentscheidungen unter den idealen Bedingungen eines vollständigen Kapitalmarktes wendet sich die Betrachtung nunmehr der Entscheidungsunterstützung eines Investors auf einem unvollständigen Kapitalmarkt zu. Grob gesprochen, sieht er sich nunmehr einer Situation gegenüber, in der die auf dem Kapitalmarkt verfügbaren Instrumente nicht mehr beliebige Zahlungsmuster zu generieren erlauben. Damit sind verschiedene Aspekte verbunden: Es ist ihm nicht mehr möglich, einen gegebenen Zahlungsstrom ohne Rückgriff auf seine individuelle Präferenzstruktur und in eindeutiger Weise zu bewerten (Bewertungs-/Pricing-Problem), die Absicherung einer stochastischen, zukünftigen Zahlung ist ggf. nur noch näherungsweise zu bewerkstelligen (Absicherungs-/Hedging-Problem) und die Herleitung einer nutzenmaximierenden Portfolio-Strategie wird durch Handelsbeschränkungen unterschiedlicher Couleur erschwert, wobei die Strategie je nach Betroffenheit des individuellen Problems von der speziellen Marktunvollständigkeit zu einem niedrigeren Nutzenniveau als im Fall vollständiger Märkte führen kann.

Die folgenden Ausführungen charakterisieren zunächst den nunmehr relevanten Markt (*Abschnitt 3.2*). Hierfür wird der Unvollständigkeitsbegriff in einen weiten und einen engen gespalten, was der ambiguen Verwendung des Begriffes im Schrifttum entspricht. Die Problematik der Bewertungsfrage und die sich gegenüber der Idealmarktsituation ergebenden Änderungen von Marktcharakteristika werden als Vorbereitung auf die Untersuchung im kontinuierlichen Marktzusammenhang zunächst anhand eines einfachen Beispiels in einem diskreten stochastischen Kontext illustriert (*Abschnitt 3.1*). Der dynamischen Portfolio-Optimierung auf unvollständigen Kapitalmärkten (mit zeit-/zufallsstetigen Prozessen) gilt *Abschnitt 3.3.2*. Im darauf folgenden *Abschnitt 3.3.3* werden Ansätze des Schrifttums zur Behandlung des Bewertungsproblems für bedingte Ansprüche sowie Hedginganstätze vorgestellt. Schließlich werden in *Abschnitt 3.3.4* am Beispiel einer speziell gewählten Realoption Konsequenzen der Unvollständigkeit des Marktes für die Bewertung von Wahlentscheidungen aufgezeigt, und es wird beschrieben, wie diese Wirkungen durch Gestaltungsmaßnahmen u.U. gemildert werden können. Hierfür wird der Unvollständigkeitsbegriff weiter gehend differenziert.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

3.1 Charakterisierung des unvollständigen Marktes

Der vollständige Kapitalmarkt ist dadurch gekennzeichnet, dass sämtliche messbaren Zahlungen, insbesondere solche, welche bezüglich $\mathcal{F}_T$ messbar sind, mit zulässigen Portfolio-Prozessen erreicht, d.h. dupliziert werden können. Im Kontext der Modellierung des *Abschnittes 2.1.2* impliziert die Vollständigkeit des Marktes, dass der Volatilitätsprozess $\sigma(.)$ fast immer, fast sicher invertierbar ist (Satz 2.16). Daraus folgt die Eindeutigkeit[275] des Risiko-Marktpreisprozesses $\theta(.)$ nach Gl. (2.20), welche ihrerseits zu einem eindeutigen Maßwechselprozess $Z_0(.)$ auch ohne die Hinzunahme der Bedingung (2.25) führt. Dies setzt sich in einem eindeutig bestimmten Zustandspreis-Dichte-Prozess $H_0(.)$ fort. Die dergestalt „klare“ Festlegung der bezeichneten Prozesse ist auf einem unvollständigen Kapitalmarkt nicht mehr ohne weiteres gegeben[276]. Um einen Eindruck von den sich beim Übergang von einem vollständigen auf einen unvollständigen Kapitalmarkt ergebenden Änderungen der angeführten Prozesse zu vermitteln, wird im Folgenden ein Beispiel angegeben. Diesem liegt der Übersichtlichkeit und besseren Nachvollziehbarkeit wegen eine diskrete, endliche Zustandsmodellierung in einem Einperioden-Kontext zugrunde. Die Unvollständigkeit des Marktes kommt bei diesem Beispiel darin zum Ausdruck, dass nicht (mehr) sämtliche zukünftigen, zustandsabhängigen Zahlungen durch Portfolio-Bildung erreicht werden können. Die genaue Spezifikation eines unvollständigen Marktes innerhalb des bisherigen Kontextes wird im Anschluss an das Beispiel gegeben[277].

Beispiel 3.1 *zur Illustration von Prozesscharakteristika beim Übergang vom vollständigen auf einen unvollständigen Kapitalmarkt*
Betrachtet werde ein Ein-Perioden-Modell mit den Zeitpunkten t_0 und t_1. In t_1 können alternativ d Umweltzustände $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_d$[278] mit den jeweils nicht verschwindenden Eintrittswahrscheinlichkeiten $p = (p_1, p_2, \ldots, p_d)'$[279] auftreten. Der Kapitalmarkt sei arbitragefrei und bestehe aus $n\,(\leq d)$ Wertpapieren $WP_1, \ldots, WP_n$, wobei die als Vektoren betrachteten zustandsabhängigen Rückflüsse der Wertpapiere auf einem normierten Gegenwartspreis von einer Geldeinheit beruhen und linear unabhängig sein sollen. Die Rückflussvektoren

---

[275] Die Einschränkung der Aussagen auf Bereiche mit positivem Maß durch die Anmerkung: fast sicher, fast immer wird im Folgenden vereinfachend nicht explizit angeführt.

[276] Damit wird im weiteren Verlauf der Darstellung auch die Festlegung nach Gl. (2.25) dahingehend eine Modifikation erfahren, dass zwar weiterhin ein hierdurch spezifizierter Prozess als $\theta(.)$ bezeichnet wird, u.U. jedoch die bisherige Bedeutung dieses Prozesses einem anderen Prozess zukommen wird, der aus einer Ergänzung des Prozesses $\theta(.)$ um eine weitere Prozesskomponente entsteht.

[277] Eine ausführlichere Behandlung des diskreten, auch mehrperiodigen Falles ist in *Magill/Quinzii* (1996) zu finden.

[278] Da es im betrachteten Modell nur einen zukünftigen Zeitpunkt gibt, kann auf eine ausführliche Zustandscharakterisierung durch (t_1, ω_i) $(i = 1, \ldots, d)$ verzichtet werden; es genügt, die Zustände stattdessen durch die Umweltentwicklungen zu kennzeichnen.

[279] Damit ist natürlich $p_i \geq 0\,(i = 1, \ldots, d)$ und $\sum_{i=1}^{d} p_i = 1$ verbunden.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

bilden eine $d \times n$-Matrix $v = (v_{ij})_{i=1,\ldots,d;j=1,\ldots,n}$ (Rückflussmatrix) in der Weise, dass v_{ij} den Rückfluss des (normierten) Wertpapiers WP_j im Zustand ω_i angibt. Der Rückflussvektor zu WP_j $(j = 1, \ldots, n)$ ist dann durch $v_j := v_{.j}$, also den entsprechenden Spaltenvektor der Matrix v, gegeben. Die Betrachtung soll im Folgenden sowohl für allgemeine n und d als auch für spezielle Werte dieser Variablen vorgenommen werden.

Bei konkreter Variablenbelegung wird Folgendes zugrunde gelegt: Es wird von maximal drei Wertpapieren ausgegangen ($n_{max.} = 3$), deren Rückflussvektoren (bei Auszahlung von einer Geldeinheit in t_0) die folgende Matrix v für den Fall von drei zu differenzierenden zukünftigen Umweltzuständen ($d = 3$) ergeben:

$$v = \begin{pmatrix} 1,1 & 1,5 & 2,5 \\ 1,1 & 0 & 1 \\ 1,1 & 1,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus v ist bereits leicht zu ersehen, dass WP_1 einen risikolosen Bond repräsentiert. Die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Umweltzustände seien $p = (0,5;\ 0,25;\ 0,25)'$, woraus sich das Wahrscheinlichkeitsmaß P ableite.

Ist der Kapitalmarkt *vollständig*, dann ist $n = n_{max.} = d = 3$. Aus der Vollständigkeit ergibt sich, dass mit den vorhandenen Wertpapieren beliebige zustandsabhängige Zahlungsmuster in t_1 erzeugt werden können, insbesondere auch solche, die eine Geldeinheit in einem bestimmten Umweltzustand und in den übrigen Zuständen keinen Rückfluss vorsehen (reine Wertpapiere). Es ist zweckmäßig, zunächst die (Gegenwarts-)Preise dieser reinen Wertpapiere $WP_1^r, \ldots, WP_d^r$ zu bestimmen. Ihre Rückflussmatrix entspricht der Einheitsmatrix: $v^r = I_{d=n}$. Wenn somit $y^i = (y_1^i, \ldots, y_n^i)'$ $(i = 1, \ldots, d)$ den Vektor repräsentiert, dessen Komponente j $(\in \{1, \ldots, n\})$ den in das Wertpapier WP_j investierten Betrag[280] wiedergibt, um insgesamt den Rückfluss des reinen Wertpapieres WP_i^r $((0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0)')$ zu erhalten, gilt für die Matrix $y = (y^1, \ldots, y^n)$:

$$v^r = I_{d=n} = vy \quad \Leftrightarrow \quad y = v^{-1}.$$

Da sich weiterhin der Gegenwartspreis des reinen Wertpapieres WP_i^r $(i = 1, \ldots, d)$ auf dem hier generell unterstellten *arbitragefreien Markt* dadurch ergibt, indem die für die Duplikation des zukünftigen Zahlungsmusters aufzuwendenden Beträge, welche in die Wertpapiere $WP_1, \ldots, WP_n$ zu investieren sind[281], addiert werden, ist dieser (Gegenwarts-)Preis bestimmt durch $z_i = (y^i)'\mathbf{1}_n$. Für den Preisvektor reiner Wertpapiere $z = (z_1, \ldots, z_d)'$ erhält man damit:

$$z = (v^{-1})'\mathbf{1}_n.$$

[280] Wegen der Normierung des Wertpapierausgabebetrages auf eins ist dies gleich der Anzahl der von diesem Wertpapier gekauften Stücke.

[281] Ein „negativer Investitionsbetrag“, d.h. ein Verkauf des jeweiligen Wertpapiers ist dabei nicht ausgeschlossen.

Aus der Arbitragefreiheit des Marktes folgt dabei $z \geq \mathbf{0}_d$. Der Preis $m_{\bar{x}}$ eines beliebigen zustandsabhängigen Anspruches $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_d)' \, (\in \mathbb{R}^d)$ ergibt sich dann in einfacher Weise zu $m_{\bar{x}} = z'\bar{x} = \mathbf{1}_n' v^{-1} \bar{x} = \bar{x}'(v^{-1})' \mathbf{1}_n$. Als Preis eines (zustandsabhängigen) zukünftigen Anspruches $\bar{x}$ wurde im vorausgehenden Kapitel $E_Q\left[\frac{\bar{x}}{1+r}\right]$ betrachtet, wobei r für den risikolosen Zinssatz steht und die Erwartungswertbildung mit Bezug auf ein modifiziertes Wahrscheinlichkeitsmaß Q erfolgt[282]. Sofern r bekannt ist, kann somit ein Vergleich von $m_{\bar{x}}$ mit dem beschriebenen Erwartungswert vorgenommen werden, um das diesem zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsmaß zu bestimmen. Der Ermittlung des risikolosen Zinssatzes ist ein Anspruch zugrunde zu legen, der in allen Umweltzuständen denselben Rückfluss $\bar{x}_1 = \ldots = \bar{x}_d = \tilde{x}$ erbringt. Sein Preis entspricht der Summe der Preise sämtlicher reiner Wertpapiere multipliziert mit $\tilde{x}$ und muss gleich $\frac{\tilde{x}}{1+r}$ sein, so dass $1 + r = \dfrac{1}{z'\mathbf{1}_d} = \dfrac{1}{\mathbf{1}_n' v^{-1} \mathbf{1}_d}$ ist. Das Wahrscheinlichkeitsmaß Q soll durch die gegenüber p modifizierten Zustands-Eintrittswahrscheinlichkeiten $q_1, \ldots, q_d$ charakterisiert sein, die im Vektor q zusammengefasst sind und auch als *Pseudo-Wahrscheinlichkeiten* bezeichnet werden. Es gilt dann:

$$E_Q\left[\frac{\bar{x}}{1+r}\right] = m_{\bar{x}} \;\Leftrightarrow\; \frac{\bar{x}'}{1+r} q = \bar{x}'(v^{-1})'\mathbf{1}_n \;\Leftrightarrow\; q = \frac{(v^{-1})'\mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_d'(v^{-1})'\mathbf{1}_n}.$$

(Aus $z_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, d$, folgt $1 \geq q \geq 0$ und $\sum_{i=1}^d q_i = 1$.)
Der Wechsel vom Wahrscheinlichkeitsmaß P auf das Wahrscheinlichkeitsmaß Q erfolgt damit über den Vektor (Radon-Nikodỳm-Ableitung) $q^p := (q_1^p, \ldots, q_d^p)' := \left(\frac{q_1}{p_1}, \ldots, \frac{q_d}{p_d}\right)'$. Im kontinuierlichen Modell stand hierfür der Prozess $Z_0(.)$. Mit dem Vektor q^p gilt für den Preis eines Anspruches $\bar{x}$:

$$E_Q\left[\frac{\bar{x}}{1+r}\right] = \frac{\bar{x}'}{1+r} q = \sum_{i=1}^{d} \frac{\bar{x}_i q_i^p}{1+r} p_i = E_P\left[\frac{[\bar{x}_i q_i^p]_{i=1,\ldots,d}}{1+r}\right],$$

wobei $[\bar{x}_i q_i^p]_{i=1,\ldots,d}$ für den Vektor ($\in \mathbb{R}^n$) steht, dessen i-te Komponente dem Produkt $\bar{x}_i q_i^p$ entspricht. Das Pendant zum Zustandspreis-Dichte-Prozess $H_0(.)$ ergibt sich folglich als[283]

$$\frac{1}{1+r} q^p = \left((\mathbf{1}_n' v^{-1})_1 \frac{1}{p_1}, \ldots, (\mathbf{1}_n' v^{-1})_d \frac{1}{p_d}\right)' = (1+r)\left(\frac{z_1}{z_1}, \ldots, \frac{d_d}{p_d}\right)'.$$

Der Maßwechselvektor und der Vektor der Zustandspreis-Dichte sind jeweils *eindeutig* bestimmt. Im Zahlenbeispiel ergibt sich Folgendes:

$$(v^{-1})' = \begin{pmatrix} -0,3\bar{6} & 0,2\bar{6} & 0,40 \\ 0,9\bar{0} & -0,\bar{6} & 0,375 \\ 0,3\bar{6} & 0,40 & -0,40 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow z = (v^{-1})'\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} 0,3\bar{0} \\ 0,2\bar{4} \\ 0,3\bar{6} \end{pmatrix},$$

282 Der Vektor $\bar{x}$ ist hierbei als Präsentation einer Zufallsvariablen zu betrachten, bei der den Umweltzuständen die Werte der zugehörigen Komponenten des Vektors zugewiesen werden.

283 Das Subskript am (Zeilen-)Vektor $\mathbf{1}_n' v^{-1}$ kennzeichnet die dem Umweltzustand zugehörige Komponente.

so dass $r = \frac{1}{\mathbf{1}_d' v^{-1} \mathbf{1}_n} - 1 = \frac{1}{0,\overline{90}} - 1 = 0,1$, wie sich dies bereits aus der Zahlungsstruktur des WP_1 vermuten ließ. Das Wahrscheinlichkeitsmaß Q ist eindeutig gegeben durch $q = (0,\bar{3};\ 0,2\bar{6};\ 0,4)'$[284].

Für die Unvollständigkeit des Kapitalmarktes im Sinne der Unmöglichkeit, jedes beliebige Zahlungsmuster zu replizieren, können verschiedene Marktbeschränkungen ursächlich sein. Bspw. kann ein Leerverkauf aller oder eines Teiles der Wertpapiere ausgeschlossen sein oder es gibt nicht genügend Wertpapiere (mit linear unabhängigen Rückflussvektoren), um die Unsicherheitssituation vollständig zu erfassen. Der zweite Fall soll in diesem Beispiel weiterverfolgt werden.

Der *unvollständige* Kapitalmarkt bestehe wie bisher aus n Wertpapieren, wobei nunmehr $n < n_{max.} = d$ gelte. Mit den bereits eingeführten Bezeichnungen[285] ist der Bildbereich der über die Matrix v definierten linearen Abbildung $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ gegeben durch $\mathcal{R}(v) := \{vy \mid y \in \mathbb{R}^n\}$. v besitze vollen Rang. Ferner ist $\mathcal{K}(v) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid vy = \mathbf{0}_d\}$ der Kern von v, so dass $\mathcal{K}^\perp(v)$ die Menge aller Vektoren $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$, für die $\bar{y}'y = 0,\ \forall y \in \mathcal{K}(v)$, gilt, repräsentiert. Dann gilt: $\mathcal{R}(v) = \mathcal{K}^\perp(v')$[286].

Für die auf dem unvollständigen Kapitalmarkt duplizierbaren und damit arbitragefrei und eindeutig bewertbaren zukünftigen Ansprüche x muss gelten: $x \in \mathcal{R}(v)$. Für die Ansprüche $\bar{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{R}(v)$, deren Zahlungsmuster folglich nicht durch Kapitalmarkttransaktionen über die vorhandenen Wertpapiere generiert werden können, ist ein Gegenwartspreis nicht ohne eine (subjektive) Bewertung des nicht eliminierbaren Risikos zu finden. Bezüglich des über die Kapitalmarktpapiere aufgespannten Raumes an zukünftigen Ansprüchen sind gleichwohl aufgrund der Arbitragefreiheit Bedingungen an ein Preissystem abzuleiten. Für ein solches System von Preisen, das in Analogie zum Fall eines vollständigen Kapitalmarktes mit z bezeichnet werden soll, ist zu fordern: Für beliebiges $x \in \mathcal{R}(v)$ sei $x = vy$, dann muss für den Preis m_x des Anspruches gelten:

$$\begin{aligned} m_x &= z'x = \mathbf{1}_n' y \ \Rightarrow\ z'vy = \mathbf{1}_n' y \\ \Rightarrow v'z &= \mathbf{1}_n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ist z^k eine spezielle Lösung der letzten Gleichung ($v'z^k = \mathbf{1}_n$), dann ist die Menge der zulässigen Preise durch $\mathcal{P}_z = \{z = z^k + \bar{z} \mid \bar{z} \in \mathcal{K}(v'),\ z \geq 0\}$ beschrieben. Wegen $Dim(\mathcal{K}(v')) = d - Rang(v) = d - n > 0$ ist somit (i.d.R.) kein eindeutiges arbitragefreies Preissystem gegeben. Die Ableitung von Pseudo-Eintrittswahrscheinlichkeiten $q = (q_1, \ldots, q_d)'$ führt unter der Voraussetzung, dass der risikolose Bond am Markt handelbar ist ($\mathbf{1}_d \in \mathcal{R}(v)$), auf den Ansatz:

$$m_x = E_Q\left[\frac{x}{1+r}\right] = q'\frac{x}{1+r} = z'x \ \Rightarrow\ q = (1+r)z.$$

[284] Bei einer mehrperiodigen Erweiterung entspricht Q dem zu P äquivalenten Martingalmaß für den diskontierten Vermögensprozess.

[285] Vgl. S. 74 f.

[286] Vgl. S. 74.

Da unter der genannten Voraussetzung $\frac{1}{1+r} = z'\mathbf{1}_d$ $(\forall z \in \mathcal{P}_z)$ gilt, ist:

$$q = \frac{1}{z'\mathbf{1}_d} z.$$

Mit $z \geq 0$ ergibt sich unmittelbar $0 \leq q \leq 1$. Die „Mehrdeutigkeit" des arbitragefreien Preissystems überträgt sich folglich auf die (verschiedenen) Wahrscheinlichkeitsmaße, deren gemeinsames Kennzeichen darin besteht, dass der unter ihnen gebildete Erwartungswert des diskontierten zukünftigen Anspruches dem arbitragefreien Preis des Anspruches entspricht. An die Stelle der Entscheidung für ein Preissystem seitens des Investors kann, wie Gleichung (3.1) zeigt, auch die Festlegung auf ein bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß treten. Aus der bisherigen Darstellung folgt dabei, dass die Wahl eines bestimmten Wahrscheinlichkeitsmaßes oder eines arbitragefreien Preissystems keine Bedeutung für die Zuweisung eines Wertes zu einem durch Kapitalmarkttransaktionen erreichbaren Anspruch hat — diesbezüglich muss sich ja gerade ein einheitlicher Preis ergeben —; Bedeutung erlangt die Festlegung jedoch dann, wenn bspw. das gewählte Preissystem auf einen nicht duplizierbaren Anspruch angewendet wird. Der daraus entstehende Preis des Anspruches muss mit der individuellen Bewertung seitens des Investors übereinstimmen, woraus sich die Verbindung der individuellen Wertzuweisung zur Wahl eines Preissystems, resp. eines Wahrscheinlichkeitsmaßes, herstellen lässt.

Die Situation auf einem unvollständigen Kapitalmarkt soll nochmals mit Hilfe des obigen Zahlenbeispiels verdeutlicht werden, für das nun davon ausgegangen wird, dass das Wertpapier WP_3 nicht gehandelt wird ($d = 3$, $n = 2$). Folglich gilt:

$$v = \begin{pmatrix} 1,1 & 1,5 \\ 1,1 & 0 \\ 1,1 & 1,5 \end{pmatrix}.$$

An $(1;\ 0;\ -1)' \in \mathcal{K}(v')$ wird deutlich, dass der im Vektor x repräsentierte Anspruch die Gleichung $x_1 - x_3 = 0$ erfüllen muss, sofern er duplizierbar sein soll; denn dann ist $x \in \mathcal{K}^{\perp}(v') = \mathcal{R}(v)$. Daraus folgt unmittelbar, dass der risikolose Bond, der in allen Umweltzuständen dieselbe Auszahlung aufweist, am Markt verfügbar ist — nämlich in Gestalt von WP_1.

Die Gesamtheit der arbitragefreien Preissysteme ist wie folgt gegeben: Zunächst bildet $z^k = (0;\ 0,\bar{24};\ 0,\bar{6})'$ eine spezielle Lösung von $v'z = \mathbf{1}_n$. Die Menge aller arbitragefreien Preissysteme ist dann bestimmt durch: $\mathcal{P}_z = \{z = z^k + \bar{z} \mid 1,1\bar{z}_1 + 1,1\bar{z}_2 + 1,1\bar{z}_3 = 0;\ 1,5\bar{z}_1 + 1,5\bar{z}_3 = 0;\ z \geq 0\}$. Dies führt auf folgende Bedingungen für die Komponenten von z: $0 \leq z_3 \leq 0,\bar{6}; z_2 = 0,\bar{24}; 0 \leq z_1 \wedge z_1 = -z_3 + 0,\bar{6}$. Somit ist bspw. auch $z = (0,\bar{3};\ 0,\bar{24};\ 0,\bar{3})'$ ein arbitragefreies Preissystem mit nicht negativen Komponenten. □

Ohne dies freilich explizit vorzunehmen, könnten bei einer gedanklichen Fortführung des Beispieles über mehrere Perioden, bspw. in der Weise, dass aus Sicht von t_1 für eine weitere Periode die Situation aus t_0 bestehen würde

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

usf., Portfolio-Prozesse definiert werden, welche unter der durch die spezifische Art der Unvollständigkeit des Marktes gegebenen Restriktion ein bestimmtes Zielkriterium erfüllen sollen. Um die Bestimmung solcher Portfolio-Prozesse soll es im Weiteren gehen, wobei allerdings der bisher eingeführte Marktrahmen im Grundsatz beibehalten und lediglich hinsichtlich der Vollständigkeit modifiziert wird. Es wird damit der folgende *Markt* $\mathcal{M}^{unvst}$ zugrunde gelegt:

Annahme: Für den unvollständigen Kapitalmarkt $\mathcal{M}^{unvst}$ gelten die Voraussetzungen 1. – 3. und 5. des Marktes $\mathcal{M}^{vst}$[287]. Die Voraussetzung 4. entfällt, d.h. der Kapitalmarkt ist unvollständig (im weiteren Sinne), was im Folgenden präzisiert wird.

Gegeben sei eine $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable $B(\omega) = B^+(\omega) - B^-(\omega)$, wobei $B^+(\omega) = \max(B(\omega), 0)$ und $B^-(\omega) = \max(-B(\omega), 0)$, für die $E_0\left[\frac{|B|}{S_0(T)}\right] < \infty$ gilt und $\frac{B}{S_0(T)}$ fast sicher nach unten beschränkt ist ($\frac{B^-}{S_0(T)} \leq k < \infty$, fast sicher, $k \in \mathbb{R}_+$); ferner seien $x^+ = E_0\left[\frac{B^+}{S_0(T)}\right]$ (≥ 0) und $x^- = E_0\left[\frac{B^-}{S_0(T)}\right]$ (≥ 0).

Ein standardisierter Kapitalmarkt ist *unvollständig im weiteren Sinne*, wenn er nicht vollständig[288] ist; d.h. es gibt eine $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable B mit positivem Maß und mit $E_0\left[\frac{|B|}{S_0(T)}\right] < \infty$ sowie $\frac{B}{S_0(T)}$ fast sicher nach unten beschränkt, so dass bei beliebigem reellen Anfangsvermögen $x = x^+ - x^-$ kein Portfolio-Prozess $(\pi_0(.), \pi'(.)) = (\pi_0^+(.), \pi^+(.)') - (\pi_0^-(.), \pi^-(.)')$, mit den in Bezug auf die Vermögensprozesse $X^{x^+,0,\pi^+}(.)$ bzw. $X^{x^-,0,\pi^-}(.)$ zulässigen (Teil-)Portfolio-Prozessen $(\pi_0^+(.), \pi^+(.)')$ bzw. $(\pi_0^-(.), \pi^-(.)')$, existiert, für welchen gilt:

$$X^{x,0,\pi}(T) = B, \quad \text{fast sicher},$$

wobei $X^{x,0,\pi}(.) = X^{x^+,0,\pi^+}(.) - X^{x^-,0,\pi^-}(.)$. Anzumerken ist, dass generell ein *standardisierter* Kapitalmarkt, also insbesondere ein arbitragefreier Markt vorausgesetzt wird. Gegenstand der Behandlung unvollständiger Kapitalmärkte sollen hier Restriktionen sein, die sich auf die Portfolio-Anteile $p\,(= \frac{\pi}{X})$ beziehen. Hierzu gehören z.B. Leerverkaufsbeschränkungen und Verschuldungsrestriktionen oder auch die Tatsache, dass die am Kapitalmarkt verfügbare Zahl an Instrumenten nicht ausreicht, um sich gegen sämtliche Unsicherheitsquellen absichern zu können. Der letztgenannte Spezialfall eines unvollständigen Kapitalmarktes im weiteren Sinne wird als solcher im engeren Sinne bezeichnet. Für den hier gegebenen Marktaufbau lässt sich dies wie folgt formulieren:

Ein Kapitalmarkt heißt *unvollständig im engeren Sinne*, wenn $n < d$ oder $\sigma(.)$ fast sicher, fast immer nicht singulär nicht gilt.

[287] Vgl. S. 60 ff.
[288] Vgl. S. 71.

Dies bedeutet, dass die Zahl der gehandelten (stets hinsichtlich des von ihnen aufgespannten Zustandsraumes unabhängigen) Aktien geringer als die Dimension des zugrunde liegenden d-dimensionalen Wiener-Prozesses ist. Der Kapitalmarkt wird auch dann als unvollständig im bezeichneten Sinne betrachtet, wenn das (die) „fehlende(n)" Wertpapier(e) lediglich in $t = 0$, später aber nicht mehr verfügbar ist (sind). Im Fall einer speziellen Gestalt der Marktinstrumente, bei der sich $\sigma(.)$ aus einer Diagonalmatrix und weiteren ausschließlich mit Nullen besetzten Matrizen zusammensetzt, bedeutet die Unvollständigkeit im engeren Sinne, dass mindestens eine Unsicherheitsquelle, repräsentiert durch einen Wiener-Prozess $W_i(.)$ $(i \in \{1, \ldots, d\})$, nicht gehandelt wird.

Im Mittelpunkt der weiteren Betrachtung wird der Dualansatz zur Abbildung von Unvollständigkeitssituationen stehen, dem sowohl bei der Behandlung der Bewertung von Einzelzahlungen als auch und zuvorderst im Rahmen der dynamischen Portfolio-Optimierung auf unvollständigen Märkten eine zentrale Bedeutung zukommen wird. Er basiert darauf, dass der Portfolio-Prozess in Relativbeträgen aus einer Restriktionenmenge K (mit bestimmten Eigenschaften) stammt. Der folgende Abschnitt ist der Charakterisierung dieser Menge, vor allem jedoch der Darstellung konkreter Beispiele, die verschiedenen Marktsituationen entsprechen, gewidmet. Mithin wird darin die Markt-Unvollständigkeit spezifiziert, die dem Dualansatz zugrunde liegt, welcher seinerseits die Basis zur Handhabung einer Reihe von im darauf folgenden Abschnitt zu besprechenden Investitionsentscheidungen — wie insbesondere der Portfolio-Optimierung auf unvollständigen Kapitalmärkten — bildet.

3.2 Spezialisierung der Markt-Unvollständigkeit im Dualansatz

Nicht jede Modellierung eines unvollständigen Marktes macht Sinn und nicht jede Modellierung, die Sinn macht, erlaubt einen anwendbaren Entscheidungskalkül. Insofern wird im Folgenden zunächst allgemein die Menge jener Restriktionen eingegrenzt, die im Dualansatz, insbesondere zur Lösung des dynamischen Portfolio-Optimierungsproblems, vorausgesetzt wird. Daran anschließend werden die im Schrifttum vorzufindenden Konkretisierungen für Restriktionen dargestellt und es wird versucht aufzuzeigen, in welchem Anwendungsrahmen diese Beschränkungen auftreten können. Als Ergänzung der existenten Formulierungen wird ein weiteres Beispiel für eine abbildbare, an der Praxis orientierte Restriktion gegeben.

Abstrakt formuliert, basiert der Dualansatz darauf, einen unvollständigen Kapitalmarkt fiktiv zu vervollständigen, so dass die in *Kapitel 2* behandelte Martingalmethode auf vollständigen Kapitalmärkten anwendbar wird. Im Falle eines unvollständigen Kapitalmarktes im engeren Sinne sind dabei neue, fiktive Marktinstrumente (Aktien) einzuführen. Dass das Vorgehen auf vollständigen Märkten zu einer zulässigen Problemlösung auf dem unvollständigen Markt führt, wird durch einen geeignet gewählten (mehrdimensionalen) Schattenpreisprozess sichergestellt, welcher aus einer durch die Marktrestriktion bestimmten Prozessmenge stammt. Die fiktive Vervollständigung des Marktes erfolgt dabei nicht nur — und dies ohnehin nur im Falle eines unvollständigen Marktes im engeren Sinne — durch die Einführung zusätzlicher Marktinstrumente, sie beinhaltet auch die Modifikation des Bildungsgesetzes der zugrunde liegenden Instrumentenprozesse, d.h. der sie bestimmenden stochastischen Differentialgleichungen. Die Anwendung des Dualansatzes und die Rolle des Schattenpreisprozesses werden aus der Darstellung in den weiteren Abschnitten ersichtlich werden. An dieser Stelle soll dies als Rechtfertigung genügen, um im Folgenden Marktrestriktionen und die dazugehörenden Mengen zulässiger Schattenpreisprozesse vorzustellen. Bei der Modifikation der Instrumentenprozesse wird zudem die Funktion $\zeta(\nu(t))$ über den Schattenpreis $\nu(t)$ ($t \in [0,T]$) benötigt, deren Berechnung für die Lösung der darauf aufbauenden Optimierungsprobleme von essentieller Bedeutung ist und die folglich bei einer konkreten Anwendung des Verfahrens ermittelbar sein muss. Die bisher umschriebenen Elemente des Verfahrens werden nunmehr formal eingeführt.

Den Ausgangspunkt bildet zunächst eine Marktgestalt wie sie in *Abschnitt 2.1.2* vorausgesetzt wurde, d.h. ein vollständiger Markt, für den insbesondere $n = d$ gilt. Der Volatilitätsprozess $\sigma(t,\omega)$ sei (fast sicher) gleichmäßig auf $[0,T] \times \Omega$ beschränkt und invertierbar mit der gleichmäßig beschränkten inversen Matrix $\sigma^{-1}(\omega,t)$[289].

Gegeben sei eine nicht leere, konvexe und abgeschlossene Menge $K \subset \mathbb{R}^n$, die die Menge zulässiger Portfolio-Prozesse in Relativbeträgen (Anteilsprozesse) beschreibt[290]. Es muss also $p(.) \in K$ (fast sicher, fast immer) gelten. Dabei wird von einer zeit- und zustands*un*abhängigen Restriktionsmenge K ausgegangen[291]. Zur Menge K wird die Funktion $\zeta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definiert

[289] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 201, wobei im Unterschied zu *ebd.*, S. 201, von einem standardisierten Markt ausgegangen werden soll.

[290] Eine derart allgemeine Restriktionsmenge wurde in *Cvitanić/Karatzas* (1992), S. 771, eingeführt; vgl. auch *Cvitanić/Karatzas* (1993), S. 659 f. Vgl. zu den folgenden Voraussetzungen *ebd.* sowie *Karatzas/Shreve* (1998), S. 206; zu den diesbezüglichen Grundlagen vgl. *Rockafellar* (1970). Ein Beispiel für eine Restriktion in Bezug auf den Portfolio-Prozess in Absolutbeträgen, die nicht — wenigstens bei strikt positivem Vermögen — in eine äquivalente Restriktion bezüglich des Portfolio-Prozesses in Relativbeträgen umgeformt werden kann, indem lediglich die einen Prozessvariablen durch die anderen substituiert werden, ist in *Basak* (1995) zu finden: Die Restriktion beinhaltet die Vorgabe eines Mindestvermögens zu einem bestimmten Zeitpunkt innerhalb des Betrachtungszeitraumes $[0,T]$; sie wird am Ende dieses Abschnittes ergänzend aufgeführt.

[291] Bei *Bardhan* (1994), S. 928, und *Cvitanić/Karatzas* (1992), S. 804 f., wird jeweils die Möglichkeit einer stochastischen Restriktionsmenge postuliert. Da eigene Berechnungen im Kontext des in *Abschnitt 3.3.2.3* beschriebenen Problemes, das darunter zu subsumieren wäre, im Widerspruch hierzu stehen, wird dem hier nicht gefolgt. Auf eine Darstellung der Berechnungen wird ihres Umfanges und des negativen Resultates wegen verzichtet.

als:

$$\zeta(\nu) := \sup_{p \in K}(-p'\nu). \tag{3.2}$$

Diese Funktion wird als nach unten beschränkt angenommen, d.h. $\exists \zeta_0 \in \mathbb{R}$:

$$\zeta(\nu) \geq \zeta_0, \quad \forall \nu \in \mathbb{R}^n. \tag{3.3}$$

Betrachtet werde die folgende Menge:

$$\tilde{K} := \{\nu \in \mathbb{R}^n \;\mid\; \zeta(\nu) < \infty\}, \tag{3.4}$$

welche eine Menge zulässiger Schattenpreise beschreibt. Es zeigt sich unmittelbar, dass $\mathbf{0}_n \in \tilde{K}$ mit $\zeta(\mathbf{0}_n) = 0$ ist. Es gilt ferner[292]:

$$p \in K \quad \Leftrightarrow \quad \zeta(\nu) + p'\nu \geq 0, \quad \forall \nu \in \tilde{K}. \tag{3.5}$$

Konkrete Restriktionen sind durch folgende Ausprägungen[293] gegeben, wobei hier versucht wird, eine Einteilung der im Schrifttum vorzufindenden Restriktionen nach den im Vordergrund stehenden Anwendungsaspekten vorzunehmen:

Eine *allgemeine Marktrestriktion* im Sinne einer Beschränkung, die i.A. allen Investoren vom Markt auferlegt ist, ist durch einen unvollständigen Kapitalmarkt im engeren Sinne gegeben[294]:

$$p_i = 0, \quad \forall i \in L \subseteq \{1, ..., n\}, L \neq \emptyset, \, p_j \in \mathbb{R}, j \notin L.$$

Es ist $\zeta(\nu) = 0$. Dabei bezeichnet n die Anzahl der am Markt vorhandenen risikobehafteten Instrumente (Aktien) *nach* dessen fiktiver Vervollständigung, so dass $n = d$ gilt. Die Zahl der originär am Kapitalmarkt existenten Aktien beträgt folglich $d - |L|$[295]. mehrdimensionalen Wiener-Prozesses — Allenfalls von geringer Bedeutung, wenn auch nicht grundsätzlich auszuschließen, dürfte eine Interpretation dieser Unvollständigkeitsbedingung als investorspezifische und nicht als allgemeine Marktrestriktion im obigen Sinne sein. Dies würde bedeuten, dass die laufende Handelbarkeit bestimmter Risiken bzw. Risikokombinationen — nicht jedoch von Derivaten auf sonst allgemein gehandelte Risiken — von Marktteilnehmer zu Marktteilnehmer unterschiedlich sein kann. Denkbar erscheint dies bei Risiken, die mit einer am Markt nicht gehandelten, einem Marktteilnehmer exklusiv zur Verfügung stehenden (Sach-)Investition verknüpft sind.

[292] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 206.

[293] Vgl. zu den im Folgenden beschriebenen Restriktionen *Cvitanić/Karatzas* (1992), S. 796 f., *Cvitanić/Karatzas* (1993), S. 659 f., *Karatzas/Shreve* (1998), S. 206 f. Unberücksichtigt bleiben dabei implizit Wirkungen der Wertpapiernachfrage auf das Preissystem; zu diesbezüglichen Aspekten der Marktliquidität vgl. *Esser* (2004) m.w.N.

[294] Dieser Fall wird bei *Karatzas/Lehoczky/Shreve/Xu* (1991) und *He/Pearson* (1991) behandelt.

[295] Das Betragszeichen soll für die Mächtigkeit der Menge L stehen.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Investorspezifische Restriktionen können gegeben sein durch:

- Restriktionen in Bezug auf (Des-)Investitionsvolumina in *einzelne risikobehaftete Wertpapiere.*
  Dabei soll von der folgenden allgemeinen Restriktionsmenge ausgegangen werden:
  $K = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ mit $I_i = [\alpha_i, \beta_i]$, $\alpha_i \leq 0 \leq \beta_i$ ($\alpha_i = -\infty, \beta_i = \infty$ mit jeweils (halb-)offenen Intervallen möglich) für $i = 1, \ldots, n$.
  Im Folgenden werden Spezialisierungen dieser allgemeinen Menge formuliert; dabei wird der ökonomische Anwendungsaspekt, differenziert nach Anwender und Anwendungssituation, betont.

  - Leerverkäufe (für bestimmte/sämtliche Aktien) sind nicht möglich[296]:
    $I_i = [0, \infty),\ \forall i \in L \subseteq \{1,...,n\}, L \neq \emptyset,\ p_j \in \mathbb{R}\,(\equiv I_j), j \in \{1, \ldots, n\} \setminus L$.
    Dann ist $\tilde{K} = \{\nu \in \mathbb{R}^n \ \mid \ \nu_i \geq 0,\ \forall i \in L,\ \nu_j = 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus L\}$.
    Das Supremum in der Bestimmungsgl. (3.2) wird für alle p aus $\{\hat{p} \in \mathbb{R}^n \ \mid \ \hat{p}_i = 0,\ \forall i \in L\}$ angenommen, so dass $\zeta(\nu) = 0$ ist[297].

    Das Bestehen von Leerverkaufsrestriktionen für Finanzinstrumente wird in der Praxis sicherlich vom bonitätsabhängigen Marktzugang des jeweiligen Investors abhängen. Auf vermögensstarke Individuen oder institutionelle Anleger dürfte die Beschränkung teilweise nicht zutreffen. Dagegen wird sicherlich die Mehrzahl der privaten Investoren, für die eine laufende Überwachung der Bonität nicht erfolgt, dieser Restriktion unterliegen wie auch solche institutionellen Investoren, denen eine entsprechende Beschränkung ihrer Handelsmöglichkeiten (durch Satzung und/oder Gesetz) auferlegt ist. Hierzu gehören in der Bundesrepublik Deutschland Kapitalanlagegesellschaften, für die Aktienleerverkäufe nicht gestattet sind[298]. Die erstgenannte Gruppe, also diejenigen Kapitalmarktakteure, für die Leerverkäufe grundsätzlich erlaubt sind, unterliegen aber ggf. einer relaxierten Restriktion seitens des Marktes, indem der Leerverkauf innerhalb einer Aktiengattung einen bestimmten Anteil am Vermögen des Investors nicht übersteigen darf. Dies führt auf die nachfolgend beschriebene Bedingung. Anzumerken ist, dass ein Leerverkaufsverbot auch als allgemeine Marktrestriktion, vorzugsweise für Wertpapiere mit wenig liquidem Handel, gesehen werden kann.

[296] Dieser Fall wird in *Xu* (1990) behandelt (zitiert nach *Karatzas/Shreve* (1998), S. 318); vgl. bspw. auch *Karatzas/Shreve* (1998), S. 206.

[297] In *Cuoco* (1997), S. 41, wird der komplementäre Fall von Kaufrestriktionen wie folgt formuliert: $I_i = (-\infty, 0],\ \forall i \in L \subseteq \{1,...,n\}, p_j \in \mathbb{R}, j \in \{1, \ldots, n\} \setminus L$, wobei wiederum $L \neq \emptyset$ vorauszusetzen ist. Dann ist $\tilde{K} = \{\nu \in \mathbb{R}^n \ \mid \ \nu_i \leq 0,\ \forall i \in L, \nu_j = 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus L\}$. Es gilt entsprechend $\zeta(\nu) = 0$. Eine Anwendungsmöglichkeit für diese Restriktion wird von *Cuoco* nicht angegeben. Für den gegebenen Kontext ist die Bedingung nicht von Bedeutung.

[298] Vgl. § 8 f. KAGG sowie *Schwark* (2001), S. 1226.

– Beschränkter Leerverkauf (in bestimmten/sämtlichen Aktien):
$I_i = [\alpha_i, \infty),\ \forall i \in L \subseteq \{1, ..., n\}, L \neq \emptyset,\ p_j \in \mathbb{R}\,(\equiv I_j), j \in \{1, \ldots, n\} \setminus L$.
Es ist wiederum $\tilde{K} = \{\nu \in \mathbb{R}^n \mid \nu_i \geq 0,\ \forall i \in L, \nu_j = 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus L\}$, wobei sich nunmehr $\zeta(\nu) = -\sum_{i=1}^{n} \nu_i \alpha_i = -\sum_{i \in L} \nu_i \alpha_i$ ergibt, da das Supremum in Gl. (3.2) nun für alle p aus $\{\hat{p} \in \mathbb{R}^n \mid \hat{p}_i = \alpha_i,\ \forall i \in L\}$ angenommen wird.
Die selektive Beschränkung des Leerverkaufes mag durch eine besondere Risikocharakteristik der betroffenen Aktiengattung bedingt und mit Rücksicht darauf vom Markt für den jeweiligen Investor verlangt sein. Die Restriktion kann auch vom Investor selbst ausgehen, indem er sich zu einer entsprechend maximalen Verschuldung in einer Aktiengattung verpflichtet. In diesem Fall erscheint auch eine einheitliche Leerverkaufsbeschränkung durch $\alpha_i = \alpha\,(\forall i \in L = \{1, \ldots, n\})$ sinnvoll[299]. Für eine natürliche Person als Investor würde eine solche Restriktion allerdings eine willkürliche Selbstbeschränkung bedeuten, die einer freiwilligen Limit(ierungs)politik gleichkäme. Ein äußerer Zwang zur Einhaltung eines Limitsystems für Leerverkäufe kann dagegen für einen institutionellen Investor bestehen. Dieser hat ggf. darüber hinaus Obergrenzen für Long-Positionen zu berücksichtigen, welche sich ebenfalls auf den Anteil des jeweiligen Investitionsvolumens am Gesamtvermögen beziehen und sich in Verbindung mit den bisher behandelten Leerverkaufsrestriktionen wie in der nachfolgend bezeichneten Bedingung darstellen lassen.

– Der in bestimmte Aktien jeweils investierte Betrag (bzw. ein Leerverkauf in einer Aktiengattung) darf einen bestimmten Anteil am Reinvermögen der investierenden Unternehmung, allgemein des Investors, nicht übersteigen:
$I_i = [\alpha_i, \beta_i],\ -\infty < \alpha_i \leq 0 \leq \beta_i < \infty,\ \forall i \in L_1 \subseteq \{1, ..., n\}, L_1 \neq \emptyset,\ p_j \in [\alpha_j, \infty)$ mit $-\infty < \alpha_j \leq 0,\ \forall j \in L_2 \subseteq \{1, ..., n\} \setminus L_1,\ p_k \in \mathbb{R}, k \in \{1, \ldots, n\} \setminus (L_1 \cup L_2) =: L_3$[300]. Hierfür ist $\tilde{K} = \{\nu \in \mathbb{R}^n \mid \nu_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in L_1, \nu_j \geq 0,\ \forall j \in L_2, \nu_k = 0\ \forall k \in L_3\}$, so dass $\zeta(\nu) = -\sum_{i \in L_1} (\alpha_i \max[0, \nu_i] - \beta_i \max[0, -\nu_i]) - \sum_{j \in L_2} \alpha_j \nu_j$.
Neben der bereits angesprochenen Bedeutung dieser Restriktion aus Sicht eines institutionellen Investors erscheint die Anlagebeschränkung für eine natürliche Person nicht zwingend. Möglich wäre es für diese, wiederum eine Selbstbindung als exogen vorgegebene Maßnahme der Risikobegrenzung zu unterstellen.

Die Restriktionen, welche sich auf Anlagen bzw. Verschuldungen in einzelnen Wertpapieren beziehen, erhalten demnach vor allem im Bereich insti-

[299] Diese Restriktion wird in *Karatzas/Shreve* (1998), S. 206, explizit aufgeführt.

[300] Für eine Kombination der Gestalt $(-\infty, \beta_i)$ mit $0 \leq \beta_i < \infty$, die einem beliebigen Leerverkauf bei beschränkter Kaufmöglichkeit entspricht, wird hier keine plausible ökonomische Interpretation gesehen; sie wird daher ausgeblendet. In *Karatzas/Shreve* (1998), S. 207, und *Cvitanić/Karatzas* (1993), S. 660, ist der ausgeklammerte Fall durch die Formulierung der zuvor aufgeführten, allgemeinen Restriktionsmenge $K = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ mit $I_i = [\alpha_i, \beta_i],\ -\infty \leq \alpha_i \leq 0 \leq \beta_i \leq \infty$, (*rectangular constraint*) eingeschlossen.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

tutioneller Anleger eine plausible Anwendungsmöglichkeit. Für Investoren in Gestalt natürlicher Personen mag vor allem der Ausschluss jedweder Leerverkaufsmöglichkeit von praktischer Relevanz sein, die übrigen Bedingungen setzen demgegenüber die mehr oder weniger willkürliche Annahme einer Selbstbeschränkung des Investors voraus. Daraus lassen sich allerdings Rückschlüsse auf die Anwendungsrelevanz der Restriktionen im Rahmen einer nutzenbasierten Portfolio-Optimierung oder anderer Nutzenkalküle ziehen. Indem nämlich eine nutzenorientierte Portfolio-Optimierung für institutionelle Investoren, welche eine Vielzahl individueller Anleger vertreten bzw. repräsentieren, entscheidungstheoretisch bedenklich, wenn nicht unmöglich ist, ergibt sich eine nur selektiv hinsichtlich Restriktion und Investor sinnvolle Anwendungsmöglichkeit[301].

- *Verschuldungsbeschränkungen* unter Einbeziehung des *risikolosen Bonds*:
  - *Beschränkte Short-Position im Bond*:
    Eine Verschuldungsrestriktion, die ausschließlich auf eine Beschränkung der Verschuldung im risikolosen Bond, welche allgemein als *Kredit(aufnahme)beschränkung* bezeichnet werden soll, abstellt, wird wie folgt formuliert[302]:
    $K = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n p_i \leq \kappa\}$ mit $\kappa \geq 1$. Damit ist eine Verschuldung im Wege der Kreditaufnahme zum risikolosen Zinssatz $r(.)$ bzw. die Höhe eines solchen Kreditbestandes auf das $(\kappa - 1)$-Fache des jeweiligen Reinvermögens begrenzt. Für $\kappa = 1$ besteht keine Verschuldungsmöglichkeit im risikolosen Bond. Es sind $\tilde{K} = \{\nu \in \mathbb{R}^n \mid \nu_1 = \ldots = \nu_n \leq 0\}$ und $\zeta(\nu) = -\kappa\nu_1$.
    Eine Beschränkung der Kreditaufnahme (bzw. der Kredithöhe) ist sicherlich für institutionelle wie für private Investoren gleichermaßen als realistisch in dem Sinne zu betrachten, dass bei jeder praktischen Anwendung zumindest eine Beschränkung für die Kreditaufnahme besteht. Problematisch erscheinen indes zwei Punkte bei dieser Formulierung: Indem für alle Zeitpunkte während des Planungszeitraumes die Kreditaufnahme bzw. der Kreditbestand einen bestimmten *Anteil* am Reinvermögen der Unternehmung/des Investors nicht überschreiten darf, muss bspw. bei maximaler Kreditaufnahme und danach sinkendem Vermögen eine Anpassung des Kreditbestandes, d.h. eine Kreditrückzahlung, vorgenommen werden. Ein solcher Zwang zur permanenten Kreditanpassung besteht realiter bei mit einer bestimmten Laufzeit ausgestatteten Kreditverträgen jedoch nicht — oder zumindest nicht ohne weiteres. Die Anpassung des gesamten Kreditvolumens könnte im Rahmen auslaufender Verträge oder durch spezifische Vertragsgestaltungen, die eine jederzeitige Fälligstellung des Kredites durch den Gläubiger ermöglichen, durchgesetzt werden. (Bei Letzteren handelt es sich im Grunde um strukturierte Produkte, bei denen ein „gewöhnlicher“ Kreditvertrag mit einer

[301] Vgl. zur Problematik *Copeland/Weston/Shastri* (2005), S. 50 f.
[302] Vgl. *Cvitanić/Karatzas* (1993), S. 659, *Karatzas/Shreve* (1998), S. 206 f.

Option für den Gläubiger versehen ist.) Dass die Fälligstellung des Kredites an den Verschuldungsgrad geknüpft ist, ist als untypisch für deutsche Verhältnisse anzusehen. Falls somit die Fälligstellung nicht möglich ist, kann es zu Überschreitungen von Grenzwerten, die an der relativen Höhe des Kreditvolumens am Gesamtvermögen des Schuldners anknüpfen, kommen, ohne dass der Schuldner zur Anpassung seines Kreditbestandes gezwungen wäre. In der beschriebenen Restriktion werden derartige Sachverhalte nicht abgebildet, vielmehr wird vorausgesetzt, dass der Kreditbestand entsprechend angepasst wird. Der damit vorgebrachte Einwand wird allerdings in dem Maße an Gewicht verlieren, in dem zumindest im „gewöhnlichen" Anpassungsbereich dergestalt flexible Kredite vorliegen. Bedeutsamer erscheint insofern der folgende Gesichtspunkt. Kritisch zu sehen ist nämlich die Art und Weise, in welcher die Verschuldungsbeschränkung bei dieser Formulierung begrenzt ist. Die Bedingung beinhaltet zwar eine Beschränkung in der Kreditaufnahme im Sinne der Emission des risikolosen Bonds, gleichzeitig bleibt jedoch der Leerverkauf in einzelne Aktien unrestringiert. Faktisch kann damit die Begrenzung der Verschuldung im risikolosen Bond durch einen Leerverkauf an Aktien ersetzt werden. Es erscheint jedoch nicht sinnvoll, die Kreditaufnahmemöglichkeit im risikolosen Bond isoliert von anderen Verschuldungsmöglichkeiten zu beschränken und insbesondere die risikolose Verschuldung restriktiver als die Verschuldung via Aktienleerverkäufe zu behandeln. Eine beide Verschuldungsformen verbindende Restriktionenformulierung ist durch die anschließende Bedingung gegeben. Der darin zum Ausdruck kommende, hier neu eingebrachte Vorschlag begrenzt die gesamte Verschuldung des Investors, indem zusätzlich zu einer beschränkten Kreditaufnahmemöglichkeit Aktienleerverkäufe ausgeschlossen werden.

– *Beschränkung des Verschuldungsgrades bei Verbot von Aktien-Leerverkäufen*
  Die Begrenzung des Verschuldungsgrades unter der Bedingung, dass eine Verschuldung lediglich im risikolosen Bond erfolgen kann (Leerverkaufsverbot), wird durch die folgende Menge zulässiger Portfolio-Anteile ausgedrückt:

$$K = \{p \in \mathbb{R}^n_+ \ \mid \ \sum_{i=1}^{n} p_i \leq \kappa\}$$

mit $\kappa \geq 1$. Der Verschuldungsgrad λ als Verhältnis von Fremdkapital zu Eigenkapital ergibt sich als:

$$\lambda = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - 1}{1} = \sum_{i=1}^{n} p_i - 1, & \text{für } \sum_{i=1}^{n} p_i \geq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit der angegebenen Restriktion erfolgt somit eine Begrenzung des Verschuldungsgrades λ. Dieser wird auf maximal $\lambda_{max.} = \max[\kappa - 1, 0] =$

$\kappa - 1$, da $\kappa \geq 1$ vorausgesetzt wurde, beschränkt. Für die angegebene Menge zulässiger Portfolio-Anteile ist $\tilde{K} = \mathbb{R}^n$. Ferner gilt die im Folgenden zu beweisende Beziehung:

$$\zeta(\nu) = -\kappa \min_{i \in \{1,\dots,n\}} [0, \nu_i] \geq 0. \tag{3.6}$$

Beweis von Gl. (3.6):
Für gegebenes $\nu \in \mathbb{R}^n$ entspricht die Ermittlung des Wertes $\zeta(\nu)$ der Lösung des folgenden konvexen Optimierungsproblems $\mathcal{Z}_\lambda$:

$$\begin{array}{llcll} & \min\limits_p f(p,\nu) & & (\text{mit } f(p,\nu) := p'\nu) & \\ \text{unter} & -p_i & \leq & 0, \quad i = 1,\dots,n & \\ & \sum\limits_{i=1}^n p_i & \leq & \kappa \quad \Leftrightarrow \quad \sum\limits_{i=1}^n p_i - \kappa \leq 0. & \end{array}$$

Das Problem $\mathcal{Z}_\lambda$ kann mit Hilfe der zugehörigen *Karush-Kuhn-Tucker*-Optimalitätsbedingungen ausgewertet werden[303]. Hierfür ist zunächst die Lagrange-Funktion $L(p, \nu, \mu)$ wie folgt zu bilden, wobei $\mu \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ für den Vektor der Schattenpreise zum Problem $\mathcal{Z}_\lambda$ steht:

$$L(p,\nu,\mu) = f(p,\nu) - \sum_{i=1}^n \mu_i p_i + \mu_{n+1} \left(\sum_{i=1}^n p_i - \kappa \right).$$

Die Optimalitätsbedingungen lauten dann (ausgewertet an der Optimalstelle (p, ν, μ)) wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial p_i}(p,\nu,\mu) &= 0 = \nu_i - \mu_i + \mu_{n+1}, \qquad (3.7)\\ & \qquad (i = 1,\dots,n) \\ \mu_i \frac{\partial L}{\partial \mu_i}(p,\nu,\mu) &= 0 = -\mu_i p_i, \ (i = 1,\dots,n) \qquad (3.8)\\ \mu_{n+1} \frac{\partial L}{\partial \mu_{n+1}}(p,\nu,\mu) &= 0 = \mu_{n+1} \left(\sum_{i=1}^n p_i - \kappa \right) \qquad (3.9) \end{aligned}$$

und $\sum\limits_{i=1}^n p_i - \kappa \leq 0$; $p_i, \ \mu_i \geq 0 \ (i = 1, \dots, n)$; $\mu_{n+1} \geq 0$. Löst man zunächst für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die entsprechende Gleichung des Systems (3.7) nach μ_i auf und setzt man den hierfür zu erhaltenden Term in die zugehörige Gleichung des Systems (3.8) ein, so ergibt sich (jeweils für $i = 1, \dots, n$):

$$\begin{aligned} \mu_i &= \nu_i + \mu_{n+1} \qquad (3.10)\\ (\nu_i + \mu_{n+1}) p_i &= 0. \qquad (3.11) \end{aligned}$$

Summation der im Gleichungssystem (3.11) vorhandenen linken Gleichungsseiten über alle $i \, (\in \{1, \dots, n\})$ führt auf:

$$\sum_{i=1}^n (\nu_i + \mu_{n+1}) p_i = \sum_{i=1}^n \nu_i p_i + \mu_{n+1} \sum_{i=1}^n p_i = 0.$$

[303] Vgl. zur Lösung derartiger Optimierungsprobleme bspw. *Büning/Naeve/Trenkler/Waldmann* (2000), S. 437 ff.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Es ergibt sich nun:

$$\mu_{n+1} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} \nu_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}, \tag{3.12}$$

sofern $\sum_{i=1}^{n} p_i > 0$ gilt. Für $\sum_{i=1}^{n} p_i = 0$, d.h. für $p = \mathbf{0}_n$, ist zum einen $\zeta(\nu) = 0\,(\forall \nu \in \mathbb{R}^n)$, zum anderen folgt aus Gl. (3.9) unmittelbar $\mu_{n+1} = 0$. Damit ist nach dem Gleichungssystem (3.10) $\nu_i = \mu_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, so dass auch Gl. (3.6) auf $\zeta(\nu) = 0$ führt. Gl. (3.12) verdeutlicht wegen der Bedingung $\mu_{n+1} \geq 0$ ferner, dass $\nu > \mathbf{0}_n$ nur mit $p = \mathbf{0}_n$, also dem gerade betrachteten Fall, vereinbar ist. Für $\nu \geq \mathbf{0}_n$ ergibt sich zwar nicht notwendig $p = \mathbf{0}_n$, wohl aber ebenfalls $\zeta(\nu) = 0$, da $p_i \nu_i = 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, sein muss, um einen Widerspruch zu vermeiden. Somit ist Gl. (3.6) erfüllt. Es ist nun der Wert des Schattenpreises μ_{n+1} näher zu untersuchen, wofür zwei Fälle unterschieden werden.

1. Fall: $\sum_{i=1}^{n} p_i - \kappa < 0$, d.h. die Verschuldungsrestriktion ist nicht bindend.
Dann muss wegen Gl. (3.9) $\mu_{n+1} = 0$ sein, so dass aus Gl. (3.12) unmittelbar $\sum_{i=1}^{n} \nu_i p_i = 0$ folgt. Aus dem System der Gleichungen (3.10) und den Nichtnegativitätsbedingungen für die Schattenpreise μ_i folgt dann:

$$\nu_i = \mu_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Folglich ist $\nu \geq \mathbf{0}_n$, woraus sich gemäß den zuvor angestellten Überlegungen $\zeta(\nu) = 0$ in Übereinstimmung mit einer Auswertung der Gl. (3.6) für den Fall $\nu \geq \mathbf{0}_n$ ergibt.

2. Fall: $\sum_{i=1}^{n} p_i - \kappa = 0$; die Verschuldungsrestriktion ist somit bindend.

Da $p_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ ist und wegen $\sum_{i=1}^{n} p_i = \kappa \geq 1$ für mindestens ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ $p_j > 0$ sein muss sowie gemäß dem Gleichungssystem (3.10) $\mu_i = \nu_i + \mu_{n+1} = \nu_i - \sum_{k=1}^{n} \nu_k \frac{p_k}{\sum_{j=1}^{n} p_j} \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ gilt, entspricht der Schattenpreis μ_{n+1} dem Negativen eines über die (nicht negativen) Portfolio-Anteile gewichteten Mittels der Komponenten des Vektors ν. Da folglich jedes ν_i $(i = 1, \ldots, n)$ größer sein muss als dieses gewichtete Mittel, d.h. als der Durchschnitt über alle ν_i, gibt es eine Indexmenge $\mathcal{J}$, für die Folgendes zutrifft:

$$\nu_{min.} := \min_{k \in \{1, \ldots, n\}} \nu_k = \nu_j \ (\forall j \in \mathcal{J}) \quad \wedge \quad p_i = 0 \ (\forall i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \mathcal{J}),$$

wobei die zweite Bedingung in Verbindung mit den Gleichungen des Systems (3.11) zu sehen ist. Falls $\nu_{min.} = 0$ ist, ergibt sich wieder $\zeta(\nu) = 0$, was abermals mit der ausgewerteten Gl. (3.6) übereinstimmt. Es kann für das Folgende also von $\nu_{min.} \neq 0$ ausgegangen werden. Nunmehr reduziert

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

sich der Ausdruck für μ_{n+1} auf:

$$\mu_{n+1} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} \nu_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = -\frac{\sum_{i \in \mathcal{J}} \nu_i p_i}{\sum_{i \in \mathcal{J}} p_i} = -\nu_{min.}.$$

Wegen $\mu_{n+1} \geq 0$ muss folglich $\nu_{min.} < 0$ gelten. Ferner ist $\kappa = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i \in \mathcal{J}} p_i$. Damit kann $\zeta(\nu)$ für den gegebenen Fall bestimmt werden als:

$$\zeta(\nu) = \sup_{p \in K} -p'\nu = -\sum_{i=1}^{n} p_i \nu_i = -\nu_j \sum_{i \in \mathcal{J}} p_i = -\kappa \nu_j$$
$$(j := \arg \min_{k=1,\ldots,n} \nu_k).$$

Fügt man das Ergebnis der vorausgehenden Fälle hinzu, in denen der minimale Wert der ν_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) durch $\nu_{min.} \geq 0$ gegeben war und sich $\zeta(\nu) = 0$ ergab, lässt für alle $\nu \in \mathbb{R}^n$ der in Gl. (3.6) angegebene Ausdruck herleiten. $\square$

Im Folgenden werden noch zwei weitere, im Schrifttum angeführte Marktbeschränkungen beschrieben, die in der nachfolgenden Darstellung allerdings nicht aufgegriffen werden, da sie sich nicht auf den Prozess der Portfolio-Anteile beziehen bzw. in ihn überführbar sind und/oder einen Schattenpreisprozess auch für die risikolose Anlage beinhalten. Die weitere Verwendung der Restriktionsmenge K bezieht sich demgegenüber auf Portfolio-Prozesse zu den risikobehafteten Wertpapieren und berücksichtigt eine sich auf den risikolosen Bond ggf. beziehende Beschränkung allenfalls über diese Prozesse.

Die Restriktionen lauten[304]:

- Einhaltung eines Mindestvermögens für einen vorgegebenen Zeitpunkt $\bar{t}$ (*Minimum Capital Requirement*)[305]:
  Basak unterscheidet zwischen „gewöhnlichen“ Investoren und Investoren (*portfolio insurers*), welche in ihren Portfolio-Entscheidungen dadurch beschränkt sind, dass das von ihnen verwaltete Vermögen (zu einem bestimmten Zeitpunkt) einen Schwellenwert nicht unterschreiten darf. Für beide Investorengruppen werden optimale Konsum- und Portfolio-Prozesse hergeleitet, wobei die für die *portfolio insurers* zu beachtende Restriktion wie folgt lautet:

$$X^{c,p,x}(\bar{t}) \geq k,$$

  mit k als Mindestvermögen, das im (vorgegebenen) Zeitpunkt $\bar{t} \in (0, T)$ vorhanden sein soll. *Basak* bettet das Optimierungsproblem eines einzelnen

[304] In verkürzter Form sind die Restriktionen (auch) in der Ausarbeitung von *Cuoco* (1997), S. 41 f., aufgeführt.
[305] Vgl. *Basak* (1995).

Investors in ein Gleichgewichtsmodell. Darin untersucht er die Wirkung, welche sich aus der Existenz von *portfolio insurers* auf Marktparameter (Marktdrift und -volatilität) ergibt.

- Solvabilitätsbedingung mit beleihbarkeitsabhängigen Anrechnungsfaktoren (*Solvency Constraint*)[306]:
  Hindy formuliert eine dynamisch und zustandsabhängig einzuhaltende Restriktion, welche für den Portfolio-Prozess (in Absolutbeträgen) im Zeitpunkt $t \in [0, T]$ wie folgt lautet:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\pi_i(t) \geq \gamma(t) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) \max[0, \pi_i(t)], \text{ fast sicher.} \tag{3.13}$$

  Dabei sind $\alpha_i(.)$ $(i = 0, 1, \dots, n)$ und $\gamma(.) \in [0, 1]$ (progressiv messbare) Prozesse mit folgender Interpretation: $\alpha_i(.)$ bezeichnet den beleihungsfähigen Anteil des Wertes von Wertpapier $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Dabei ist an den Betrag zu denken, der im Rahmen eines Repo-Geschäftes[307] für den Erhalt des Wertpapieres aufzubringen ist. Auf Basis der so bewerteten Wertpapieraktiv- und -passivbestände bestimmt die Bedingung eine Beschränkung des Verschuldungsgrades (nach oben). Indem $\gamma(.)$ für den Anteil steht, den das Reinvermögen (linke Seite der Gl. (3.13)) an den gesamten Aktiva (Summenterm der rechten Seite der Gl. (3.13)) mindestens aufweisen soll, wird damit der Verschuldungsgrad λ als Verhältnis der Verbindlichkeiten zum Reinvermögen durch die Beziehung $\lambda \leq \frac{1}{\gamma} - 1$ begrenzt[308]. Das Darstellungsziel *Hindy's* ist gegenüber dem hier verfolgten jedoch ein anderes. Es besteht nicht in der Herleitung eines optimalen Portfolio-Prozesses, vielmehr wird gezeigt, dass die Einführung der angeführten Restriktion Einfluss auf das Zustandspreis-System hat oder zumindest haben kann, welches der Investor der Bewertung zukünftiger Zahlungsansprüche zugrunde legt. *Hindy's* Ansatz beinhaltet im Unterschied zur hier zugrunde gelegten Annahme eine dynamische und zustandsabhängige Formulierung der Restriktionsmenge K.

Die Formulierung der oben eingeführten, zeit- und zustandskonstanten Restriktionsmenge K und der zugehörigen Menge $\tilde{K}$ von Schattenpreisen, die einen Wert der Funktion $\zeta(.) < \infty$ nach sich ziehen, bildet die Grundlage für die folgenden Ausführungen, soweit sie den Dualansatz der Martingalmethode betreffen. Sie findet damit Verwendung bei der Bestimmung von

[306] Vgl. *Hindy* (1995).

[307] Ein Repo-Geschäft beinhaltet den Kassaverkauf bei gleichzeitigem Terminrückkauf eines Wertpapieres („Repurchase Agreement"); vgl. *Häuselmann* (2001), Sp. 2266 f. Kassa- und Rücknahmepreis, und damit insbesondere der aus der Differenz ableitbare Zinssatz (Repo-Rate), hängen nach *Hindy* von über die Cashflow-Charakteristika hinausgehenden allgemeinen Beleihbarkeitseigenschaften des Wertpapieres ab, welche er in unterschiedlichen Werten der Prozesse $\alpha_i(.)$ $(i = 0, 1, \dots, n)$ abbildet.

[308] Die Restriktion besagt dann: „Reinvermögen $\geq \gamma$ Gesamtvermögen $= \gamma$ (Reinvermögen + Verbindlichkeiten)".

Bewertungsgrenzen von Einzelansprüchen sowie in der auf dem Martingalansatz basierenden dynamischen Portfolio-Optimierung auf unvollständigen Kapitalmärkten.

3.3 Die Investitionsprobleme im Marktkontext

Ähnlich der Beurteilung von Investitionen unter den idealen Bedingungen eines vollständigen (und vollkommenen) Kapitalmarktes gibt es Ansätze zur Beurteilung von stochastischen Einzelcashflows bzw. zur Reduzierung/Eliminierung der aus ihnen resultierenden Einkommensunsicherheit sowie zur Bestimmung eines optimalen Investitionsverhaltens im Zeitablauf, falls der Markt den in *Abschnitt 3.2* bereits diskutierten Restriktionen unterliegt und insofern unvollständig ist. Die beiden dabei angesprochenen Investitionsprobleme sind Gegenstand des folgenden Abschnittes. Die Behandlung der dynamischen Portfolio-Optimierung wird hierbei zuerst behandelt (*Abschnitt 3.3.2*), da die grundsätzliche Vorgehensweise und die Abgrenzung zur Problematik der Bewertung von Einzelansprüchen bereits vorbereitet sind. Darauf aufbauend, kann sich die Darstellung auf die Erweiterung des Modellrahmens durch die zugelassene Unvollständigkeit konzentrieren. Hierfür wird wiederum auf die Martingalmethode zurückgegriffen, nunmehr allerdings auf Basis eines fiktiven, der Unvollständigkeit angepassten Marktes, welcher somit zuerst einzuführen ist (*Abschnitt 3.3.1*). Dieser Markt liegt auch der Bestimmung von Wertgrenzen für Einzelansprüche zugrunde, mit deren Erörterung die Darstellung der diesbezüglich verschiedenen Bewertungsansätze in *Abschnitt 3.3.3* einsetzt. Da die Martingalmethode allerdings den meisten der in diesem Abschnitt skizzierten Ansätze nicht zugrunde liegt, erscheint es sinnvoll, die Präsentation der Bewertungsansätze für Einzelansprüche insgesamt der Darstellung der dynamischen Portfolio-Optimierung nachzustellen. Im Schwerpunkt werden hierbei ferner Ansätze behandelt, welche konsistent sind mit der bisher verfolgten Linie einer nutzenorientierten Entscheidungsfindung.

3.3.1 Fiktive Märkte und darauf basierende Prozesse als Hilfsmittel für eine Problemlösung auf dem unvollständigen Kapitalmarkt

Den unvollständigen Kapitalmarkt $\mathcal{M}^{unvst}$, wie er in *Abschnitt 3.1* in einem noch allgemein gehaltenen Rahmen eingeführt und in *Abschnitt 3.2* spezifiziert wurde, vor Augen, werden im Folgenden die Elemente einer Familie von Hilfsmärkten $\mathcal{M}_\nu$ mit jeweils einem d-dimensionalen Schattenpreisprozess $\nu(.)$ definiert. Die Hilfsmärkte dienen als Vehikel zur Lösung einer Problemstellung auf dem unvollständigen Kapitalmarkt. Die spezifische Unvollständigkeit des Kapitalmarktes spiegelt sich dabei in der Menge zulässiger Schattenpreisprozesse wider, welche die Familie der betrachteten Hilfsmärkte bestimmt. Die Menge der zu berücksichtigenden Schattenpreise wiederum hängt entsprechend der in *Abschnitt 3.2* beschriebenen Art und Weise von der Menge zulässiger Portfolio-Prozesse (in Relativbeträgen) ab.

Die Bestandteile des Marktes $\mathcal{M}_\nu$ sind wie folgt gegeben[309]: Es sei $\{\nu(t)\}_{t\in[0,T]}$ ein $\mathcal{F}_t$-progressiv messbarer Prozess mit $\nu : [0,T] \times \Omega \to \tilde{K}$ dergestalt, dass $E\left[\int_0^T \|\nu(t)\|^2\,dt\right] < \infty$ und $E\left[\int_0^T \zeta(\nu(t))\,dt\right] < \infty$. Die Menge der Prozesse $\nu(.)$, die diese Bedingungen erfüllen, wird durch $\mathcal{D}$ symbolisiert. $\tilde{K}$ ist die gemäß den Ausführungen in *Abschnitt 3.2* zu bestimmende Komplementmenge zur Menge K, welche ihrerseits die zulässigen Portfolio-Prozesse charakterisiert. Der Markt $\mathcal{M}_\nu$ besteht aus einem risikolosen Bond sowie $n = d$ risikobehafteten Wertpapieren (Aktien), wobei d weiterhin die Dimension des zugrunde liegenden Wiener-Prozesses kennzeichnet. Die Prozesse der Wertpapierpreise können nun unter Einbeziehung des Schattenpreisprozesses (jeweils für $t \in [0,T]$) beschrieben werden. Für den *risikolosen Bond* gilt:

$$dS_0^\nu(t) = S_0^\nu(t)(\underbrace{r(t) + \zeta(\nu(t))}_{=:\, r_\nu(t)})dt. \tag{3.14}$$

Daraus ist ein steuerkorrigierter Bondpreisprozess als Diskontierungsprozess im Fall *mit Steuern* wie folgt abzuleiten:

$$dS_0^{\nu,st}(t) = S_0^{\nu,st}(t)(1-st)(r(t) + \zeta(\nu(t)))dt. \tag{3.15}$$

Die Wertentwicklung der Aktien wird beschrieben durch: $S^\nu(.) = (S_i^\nu(.))_{i=1,\ldots,n}$ mit:

$$dS_i^\nu(t) = S_i^\nu(t)((\underbrace{b_i(t) + \nu_i(t) + \zeta(\nu(t))}_{=:\, b_i^\nu(t)})dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)\,dW_j(t)). \tag{3.16}$$

Die Prozesswerte in $t = 0$ sollen mit den Anfangswerten der analogen Prozesse im vollständigen Kapitalmarkt $\mathcal{M}^{vst}$ übereinstimmen. Die Koeffizientenprozesse $r(.), b(.)$ und $\sigma(.)$ seien so vorgegeben, dass der Markt $\mathcal{M}_\nu$ mit $\nu = 0$ vollständig ist; d.h. bspw., dass die an einem unvollständigen Kapitalmarkt im engeren Sinne nur im Umfang $n < d$ vorhandenen Wertpapiere durch fiktive Aktien zu ergänzen sind, so dass sich ein vollständiger Kapitalmarkt einstellt. Letztlich werden dadurch neue Aktien generiert, die durch eine geeignete Wahl des Schattenpreisprozesses — wie eingangs skizziert — dann aber nicht gehandelt werden. Durch die Bildung eines vollständigen Referenzmarktes können über dessen Modifikation mit allgemeinen Schattenpreisprozessen $\nu(.)$ die verschiedenen, zuvor angesprochenen Restriktionen in

[309] Vgl. zur Marktspezifikation ohne Steuern *Karatzas/Shreve* (1998), S. 208 ff., bzw. *Cvitanić/Karatzas* (1992), S. 776 f., wobei beide geringfügig voneinander abweichen — bspw. hinsichtlich der in diesem Zusammenhang definierten Menge $\mathcal{D}$.

einem einheitlichen Lösungsverfahren berücksichtigt werden. Für das Folgende ist daraus zu beachten, dass der Volatilitätsprozess $\sigma(.)$ fast immer, fast sicher durch eine beschränkte, nicht singuläre Matrix charakterisiert ist und zu jedem Zeitpunkt eine beschränkte Inverse besitzt. Zu den angegebenen Koeffizientenprozessen kommt noch ein Dividendenprozess $\delta(.)$ (mit den bereits für einen vollständigen Kapitalmarkt eingeführten Eigenschaften) hinzu. Betrachtet man die Gestaltung folglich so, dass der Markt $\mathcal{M}_\nu$ aus dem vollständigen Kapitalmarkt $\mathcal{M}_0$ (Pseudo-Originalmarkt) hervorgeht, so zeigt ein Vergleich der Koeffizientenprozesse, in welcher Weise dies geschieht. Die von denjenigen des Pseudo-Originalmarktes abweichenden Koeffizientenprozesse sind durch den risikolosen Zinsprozess $r_\nu(.) = r(.) + \zeta(\nu(.))$ sowie den Driftprozess $b_\nu(.) = b(.) + \nu(.) + \zeta(\nu(.))\mathbf{1}_n$ gegeben.

Analog der Vorgehensweise auf dem vollständigen Markt wird nun ein Maßwechselprozess wie folgt definiert:

$$dZ_\nu(t) = -Z_\nu(t)\theta'_\nu(t)\,dW(t), \quad t \in [0,T], \tag{3.17}$$

wobei $\theta_\nu(.) := \sigma^{-1}(.)\,(b_\nu(.) + \delta(.) - \mathbf{1}_n r_\nu(.)) = \sigma^{-1}(.)(b(.) + \delta(.) - \mathbf{1}_n r(.) + \nu(.)) = \theta(.) + \sigma^{-1}(.)\nu(.)$ und $Z_\nu(0) = 1$.
Daraus ergibt sich unmittelbar:

$$Z_\nu(t) = e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \|\theta'_\nu(s)\|^2\,ds - \theta'_\nu(t)\,dW(t)}. \tag{3.18}$$

Ist $Z_\nu(.)$ ein Martingal, so lautet die *Girsanov*-Transformation von $W(.)$ in einen Wiener-Prozess $W_\nu(.)$ wie folgt:

$$W_\nu(t) = W(t) + \int\limits_0^t \theta_\nu(s)\,ds = W_0(t) + \int\limits_0^t \sigma^{-1}(s)\nu(s)\,ds,\ t \in [0,T]. \tag{3.19}$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass $Z_0(.)$ ein Martingal ist und $E\left[\int_0^T \|\theta(t)\|^2\,dt\right] < \infty$ gilt[310]. Schließlich kann auch der „Zustandspreis-Dichte-Prozess“ für den Schattenmarkt folgendermaßen angegeben werden:

$$H_\nu(t) := \frac{Z_\nu(t)}{S_0^\nu(t)} = e^{-\int_0^t (r(s)+\zeta(\nu(s))+\frac{1}{2}\|\theta_\nu(s)\|^2)\,ds - \int_0^t \theta_\nu(s)'\,dW(s)},\ t \in [0,T], \tag{3.20}$$

bzw. unter Einbeziehung des Steuersystems $\mathcal{S}$:

$$H_\nu^{st}(t) := \frac{Z_\nu(t)}{S_0^{\nu,st}(t)} = e^{-\int_0^t ((1-st)(r(s)+\zeta(\nu(s)))+\frac{1}{2}\|\theta_\nu(s)\|^2)\,ds - \int_0^t \theta'_\nu(s)\,dW(s)},\ t \in [0,T]. \tag{3.21}$$

Der steuerkorrigierte Zustandspreis-Dichte-Prozess beinhaltet folglich eine Steuerkorrektur im Bondpreisprozess, der als Diskontierungsprozess dient, wobei analog dem Fall eines vollständigen Kapitalmarktes der Maßwechsel von

[310] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 262, *Cvitanić/Karatzas* (1992), S. 769.

der Besteuerung nicht beeinflusst wird. In Differentialschreibweise sind die Prozesse für $t \in [0, T]$ darstellbar als:

$$dH_\nu(t) = -H_\nu(t) \left[(r(t) + \zeta(\nu(t)))\, dt + \theta'_\nu(t)\, dW(t) \right] \tag{3.22}$$

bzw.

$$dH^{st}_\nu(t) = -H^{st}_\nu(t) \left[(1 - st)(r(t) + \zeta(\nu(t)))\, dt + \theta'_\nu(t)\, dW(t) \right], \tag{3.23}$$

wobei noch $H_\nu(0) = H^{st}_\nu(0) = 1$ gilt.

Auf dem Markt $\mathcal{M}_\nu$ kann analog der Vorgehensweise in *Abschnitt 2.1.2* ein Vermögensprozess charakterisiert werden. In Differentialform lautet er analog zu Gl. (2.15) mit Bezug auf den Portfolio-Prozess in Relativbeträgen für $t \in [0, T]$:

$$dX_\nu(t) = -c(t)\, dt + X_\nu(t) p_0(t) r_\nu(t)\, dt + X_\nu(t) p'(t) \left((b_\nu(t) + \delta(t))\, dt + \sigma(t)\, dW(t) \right). \tag{3.24}$$

Die Vermögensgleichung ergibt sich beim Anfangsvermögen $x \geq 0$ (analog den Gl. (2.28) und (2.31)) wie folgt (jeweils $t \in [0, T]$):

$$\frac{X_\nu(t)}{S^\nu_0(t)} = x - \int_0^t \frac{c(s)}{S^\nu_0(s)}\, ds + \int_0^t \frac{1}{S^\nu_0(s)} X_\nu(s) p'(s) \sigma(s)\, dW_\nu(s), \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} H_\nu(t) X_\nu(t) + \int_0^t H_\nu(s) c(s)\, ds = \\ x + \int_0^t H_\nu(s) X_\nu(s) \left[p'(s)\sigma(s) - \theta'_\nu(s) \right]\, dW(s). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Mit Steuern gemäß dem Steuersystem $\mathcal{S}$ gilt zunächst für $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} dX^{st}_\nu(t) &= -c^{st}(t)\, dt + (1 - st) \left(X_\nu(t) p_0(t) r_\nu(t)\, dt \right. \\ &\quad \left. + X_\nu(t) p'(t) \left((b_\nu(t) + \delta(t))\, dt + \sigma(t)\, dW(t) \right) \right), \end{aligned} \tag{3.27}$$

sowie parallel zu den Gl. (2.70) und (2.69) mit $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} &\frac{X^{st}_\nu(t)}{S^{\nu,st}_0(t)} = \\ &\quad x - \int_0^t \frac{c(s)}{S^{\nu,st}_0(s)}\, ds + (1 - st) \int_0^t \frac{1}{S^{\nu,st}_0(s)} X^{st}_\nu(s) p(s)' \sigma(s)\, dW_\nu(s) \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} &H^{st}_\nu(t) X^{st}_\nu(t) + \int_0^t H^{st}_\nu(s) c(s)\, ds = \\ &\quad x + \int_0^t H^{st}_\nu(s) X^{st}_\nu(s) \left[p(s)'\sigma(s)(1 - st) - \theta'_\nu(s) \right]\, dW(s). \end{aligned} \tag{3.29}$$

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Aufgrund der Nichtnegativität von Vermögens- und Konsumprozess ist aus Gl. (3.29) analog der Vorgehensweise für einen vollständigen Kapitalmarkt eine *Budget-Restriktion* auf dem Schattenmarkt $\mathcal{M}_\nu$ herzuleiten. Die Hilfsmärkte $\mathcal{M}_\nu$ werden bei der Bestimmung von Preisgrenzen bedingter Ansprüche und der Herleitung eines optimalen Portfolio-Prozesses benötigt. Mit Letzterem fährt die Darstellung fort.

3.3.2 Dynamische Portfolio-Optimierung mit der Martingalmethode

Die hier präsentierte dynamische Portfolio-Optimierung auf Basis der Martingalmethode und unter den Bedingungen eines Kapitalmarktes, welcher in der in *Abschnitt 3.2* beschriebenen Allgemeinheit unvollständig ist, geht auf *Cvitanić/Karatzas* (1992) zurück[311].

Anstelle einer Portfolio-Optimierung auf einem vollständigen Markt $\mathcal{M}^{vst}$ unter expliziter Berücksichtigung der Restriktion $p(t) \in K$ $(\forall t)$ erfolgt im Rahmen des Dualansatzes der Martingalmethode eine Optimierung des Portfolio-Prozesses auf dem Markt $\mathcal{M}_\nu$, der auch als Schattenmarkt bezeichnet wird, *wie* auf einem vollständigen Markt. Gemäß *Cvitanić/Karatzas* (1992) kann, sofern existent, ein zulässiger Schattenpreisprozess $\hat{\nu}(.)$ bestimmt werden, so dass der optimale Portfolio-Prozess $p_{\hat{\nu}}(.)$ auf dem Markt $\mathcal{M}_{\hat{\nu}}$ zulässig für den betrachteten Markt $\mathcal{M}^{unvst}$ und zudem optimal unter allen diesbezüglich zulässigen Prozessen ist. Darüber hinaus existiert — bei bestimmten zugrunde liegenden Nutzenfunktionen — stets ein optimaler Schattenpreismarkt mit zugehörigem optimierten Portfolio-Prozess, wenn es eine Lösung für das restringierte Ausgangsproblem gibt. Die folgenden Ausführungen stellen Schritte zur Herleitung eines optimalen Portfolio-Prozesses auf Basis der in *Abschnitt 3.3.1* bereits eingeführten Prozesse, welche den Hilfsmarkt $\mathcal{M}_\nu$ charakterisieren, formal dar. Es soll jedoch bereits an dieser Stelle angemerkt werden, dass die durch eine bestimmte Markt- und Präferenzstruktur des Investors konkretisierte Anwendung der Ergebnisse, mithin die entsprechende Ermittlung optimaler Portfolio-Prozesse i.d.R. mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden ist[312]. Vereinfachungen können im Hinblick auf Annahmen

[311] Die angegebene Referenz diente als Grundlage für die Beschreibung in *Karatzas/Shreve* (1998), S. 260 ff. Der vorliegenden Darstellung, soweit sie sich auf das grundlegende Konzept bezieht, liegen beide Quellen zugrunde. Neben geringfügigen Modifikationen beziehen sich eigenständige Ergänzungen insbesondere auf die Betrachtung der Endvermögensoptimierung unter vorgegebenen Entnahmen bzw. bei einer Endvermögensvorgabe, des Weiteren auf die Einbeziehung von Steuern sowie auf Auswertungs- und Implementierungsaspekte. Ein früher wesentlicher Beitrag zur Thematik stammt von *He/Pearson* (1991). In Bezug auf den hier verwendeten Dualansatz grundlegend ist zudem *Bismut* (1975).

[312] Vgl. die Anmerkung in *Kallsen* (2000), S. 358, nicht nur mit Bezug auf unvollständige Kapitalmärkte; vgl. auch *Cvitanić/Karatzas* (1992), S. 791.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

bezüglich der Marktstruktur erreicht werden, bspw. durch Restriktionen, für die sich, wie im Fall des Verbotes von Aktienleerverkäufen, $\zeta(.) \equiv 0$ ergibt[313]. Darüber hinaus können bei unterstelltem logarithmischen Nutzen explizite Darstellungen für die Portfolio-Prozesse gewonnen werden. Hierauf wird sich die nachfolgende Betrachtung konzentrieren. Es wird im Weiteren deshalb die Herleitung optimaler Portfolio-Prozesse wiedergegeben, für logarithmische Nutzenfunktionen spezialisiert und die sich daraus ableitende, im Schrifttum wohlbekannte Darstellung des Portfolio-Prozesses dadurch verfeinert, dass Restriktionen des Intervalltyps sowie einer Verschuldungsbeschränkung unter Einbeziehung des Verbotes von Aktienleerverkäufen bis hin zur Bestimmung eines Berechnungsalgorithmus' ausgewertet und dadurch unmittelbar implementierungsfähig werden. Eine Verallgemeinerung der Herleitung des optimalen Portfolio-Prozesses findet durch die Berücksichtigung des Steuersystems $\mathcal{S}$ statt.

Als Zielkriterium wird, wie schon im Rahmen der Portfolio-Optimierung auf vollständigen Kapitalmärkten, die Maximierung des Erwartungsnutzens des Investors herangezogen. Hierbei werden zunächst Nutzenbestandteile aus Konsum und Endvermögen betrachtet. Der Fall einer Endvermögensoptimierung verläuft hierzu analog, indem der Nutzen aus Konsum identisch null gesetzt wird ($U_1(.,.) \equiv 0$)[314], wobei zu unterstellen ist, dass auch keine Entnahmen an sich stattfinden. Insofern bedarf der Fall einer Endvermögensoptimierung, bei der keine Entnahmen während des Planungszeitraumes zu berücksichtigen sind, keiner eigenständigen Behandlung. Lediglich ergänzend wird im Rahmen der Optimierung von Entnahmen *und* Endvermögen des folgenden Abschnittes noch die Problematik einer Endvermögensoptimierung bei vorgegebenen, nicht verschwindenden Entnahmen verdeutlicht. Zugrunde gelegt wird allgemein eine Nutzenfunktion $U_1(t,.)$ bzw. $U_2(.)$, wie sie in *Abschnitt 2.2.3.1* — zur Nutzenbewertung von Konsum bzw. Endvermögen — eingeführt wurde[315].

[313] Vgl. hierzu die Darstellung in *Karatzas/Shreve* (1998), S. 291 ff., wo mit Hilfe der dynamischen Programmierung unter der zusätzlichen Annahme deterministischer Koeffizienten u.a. die optimalen Portfolio-Prozesse für Nutzenfunktionen des „power type" hergeleitet werden.

[314] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 290, hierzu und zur Feststellung, dass der Fall einer Entnahmeoptimierung ohne Nutzenbeitrag des Endvermögens ($U_2(.) \equiv 0$) ein noch offenes Problem ist.

[315] Es wird nicht notwendig von $U_1'(t,0) = \infty$ bzw. $U_2'(0) = \infty$ wie in *Karatzas/Shreve* (1998), S. 265, bzw. *Cvitanić/Karatzas* (1992), S. 772, ausgegangen, so dass die nachfolgend aufgeführten optimalen Prozesse für die Entnahmen $c_\nu(.)$ und die Vermögensentwicklung $X_\nu(.)$ auch nicht zwangsläufig dadurch echt positive Werte fast immer, fast sicher annehmen; vgl. zur umgekehrten Konsequenz *Karatzas/Shreve* (1998), S. 270.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

3.3.2.1 Herleitung eines optimalen Portfolio-Prozesses

Betrachtet wird, zunächst für den Fall *vor Steuern*, das folgende Problem $(\mathcal{KE}_{unvst})$:
Finde bei gegebenem Anfangsvermögen x ein optimales Prozesspaar $(c_{KE}, p_{KE}) \in \mathcal{A}(x;K)$ aus einem Konsum- $(c_{KE}(.))$ und einem Portfolio-Prozess $(p_{0,KE}(.), p'_{KE}(.))$, welches in dem durch K restringierten Kapitalmarkt zulässig ist und für das gilt:

$$V_{KE}(x;K) := \sup_{(c,p)\in\mathcal{A}_{KE}(x;K)} E\left[\int_0^T U_1(t,c(t))\,dt + U_2(X^{x,c,p}(T))\right], \tag{3.30}$$

wobei

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{KE}(x;K) := \{(c,p) \in \mathcal{A}(x;K) \mid \\ E\int_0^T \min\left[0, U_1(t,c(t))\right]\,dt + E\left[\min\left[0, U_2(X^{x,c,p}(T))\right]\right] > -\infty\right\}\end{aligned}$$

und $(c,p) \in \mathcal{A}(x;K)$ bedeutet, dass das Prozesspaar $(c,p) \in \mathcal{A}(x)$ *zulässig* in Bezug auf K ist. Dies ist dann der Fall, wenn für $\tau_0 := \inf\{t \in [0,T] \mid X^{x,c,p}(t) = 0\}$ gilt: $c(t) = 0$, $X^{x,c,p}(t) = 0$ fast sicher, fast immer in $[\tau_0, T]$ und wenn fast sicher, fast immer $p(t) \in K$ ist. Hierbei wird die Menge aller unrestringiert zulässigen Paare mit $\mathcal{A}(x)$ gekennzeichnet; sie entspricht der ebenso bezeichneten Menge zulässiger Paare aus Konsum- und Portfolio-Prozess in Absolutbeträgen[316].

Nun wird die Menge zulässiger Portfolio-Prozesse (in Relativbeträgen) auf dem Schattenmarkt $\mathcal{M}_\nu$ $(\nu(.) \in \mathcal{D})$ definiert als:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\nu(x) \quad := \quad & \{(c,p) \mid c(t) = 0,\ \text{f. s., f. i. in}\,[\tau_{X_\nu^{c,p,x}}, T], \\ & X_\nu^{c,p,x}(t) = 0\,(t \in [\tau_{X_\nu^{c,p,x}}, T]), \}\,,\end{aligned}$$

wobei $\tau_{X_\nu^{c,p,x}}$ analog τ_0 in Bezug auf den Vermögensprozess $X_\nu^{c,p,x}(.)$ definiert sei.

Für den gegebenen Schattenmarkt $\mathcal{M}_\nu$ $(\nu(.) \in \mathcal{D})$ ist das folgende Problem $(\mathcal{KE}_\nu)$ zu lösen[317]:
Finde ein optimales, zulässiges Prozesspaar $(c_{KE,\nu}, p_{KE,\nu}) \in \mathcal{A}_\nu(x)$ aus einem Konsum- $(c_{KE,\nu}(.))$ und einem Portfolio-Prozess $(p_{0,KE,\nu}(.), p'_{KE,\nu}(.))$, für das gilt:

$$V_{KE,\nu}(x) := \sup_{(c,p)\in\mathcal{A}_{KE,\nu}(x)} E\left[\int_0^T U_1(t,c(t))\,dt + U_2(X_\nu^{x,c,p}(T))\right], \tag{3.31}$$

[316] Vereinfachend wird dasselbe Symbol wie für zulässige Portfolio-Prozesse in Absolutbeträgen verwendet; vgl. S. 65.

[317] Vgl. hierzu und zum Folgenden *Karatzas/Shreve* (1998), S. 267 ff.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

wobei

$$\mathcal{A}_{KE,\nu}(x) := \{(c,p) \in \mathcal{A}_\nu(x) \mid$$
$$E\int_0^T \min\left[0, U_1(t,c(t))\right] dt + E\left[\min\left[0, U_2(X^{x,c,p}(T))\right]\right] > -\infty \Bigg\}.$$

Das Optimierungsproblem $(\mathcal{KE}_\nu)$ kann analog der Vorgehensweise in *Abschnitt 2.2.3.2* zum Problem $(\mathcal{KE})$ gelöst werden. Folglich ergibt sich[318]: Ausgehend von der analog zur Betragsfunktion nach Gl. (2.41) definierten Betragsfunktion auf dem Schattenmarkt $\mathcal{M}_\nu$:

$$\mathcal{X}_{KE,\nu}(y) := E\left[\int_0^T H_\nu(t) I_1(t, yH_\nu(t))\, dt + H_\nu(T) I_2(yH_\nu(T))\right], \quad y \in \mathbb{R}_{++}, \tag{3.32}$$

zu welcher $\mathcal{Y}_{KE,\nu} : (0,\infty) \to (0, z_{KE,\nu})$[319] die Umkehrfunktion kennzeichnet, wird zunächst die folgende Menge von Schattenpreisprozessen definiert:

$$\mathcal{D}_0 := \{\nu(.) \in \mathcal{D} \mid \mathcal{X}_{KE,\nu}(y) < \infty, \forall y \in (0,\infty), V_\nu(x) < \infty, \forall x \in (0,\infty)\}.$$

Für jeden Schattenpreisprozess $\nu(.) \in \mathcal{D}_0$ ergeben sich der optimale Konsumprozess sowie das optimale Endvermögen als[320]:

$$c_{KE,\nu}(t) = I_1(t, \mathcal{Y}_{KE,\nu}(x) H_\nu(t)),\ t \in [0,T],\ \text{und} \tag{3.33}$$

$$\xi_{KE,\nu} = I_2(\mathcal{Y}_{KE,\nu}(x) H_\nu(T)). \tag{3.34}$$

Der optimale Vermögensprozess ist dann gegeben durch:

$$X_{KE,\nu}(t) = \frac{1}{H_\nu(t)} E\left[\int_t^T H_\nu(s) c_{KE,\nu}(s)\, ds + H_\nu(T)\xi_{KE,\nu} \mid \mathcal{F}_t\right], \quad t \in [0,T]. \tag{3.35}$$

Schließlich folgt als optimaler Portfolio-Prozess für $t \in [0,T]$:

$$p_{KE,\nu}(t) = (\sigma'(t))^{-1}\left(\frac{\psi_{KE,\nu}(t)}{H_\nu(t) X_{KE,\nu}(t)} + \theta_\nu(t)\right), \tag{3.36}$$

wobei sich der Prozess $\psi_{KE,\nu}(.)$ aus der Martingaldarstellung des Prozesses:

$$M_{KE,\nu}(t) := E\left[\int_0^T H_\nu(s) c_{KE,\nu}(s)\, ds + H_\nu(T)\xi_{KE,\nu} \mid \mathcal{F}_t\right], t \in [0,T], \tag{3.37}$$

gemäß dem Ansatz $M_{KE,\nu}(t) = x + \int_0^t \psi'_{KE,\nu}(s)\, dW(s)$ $(t \in [0,T])$, wobei $\int_0^T ||\psi_{KE,\nu}(t)||^2\, dt < \infty$ ist, ergibt und Gl. (3.36) in Analogie zur lediglich mit Bezug auf den Portfolio-Prozess in Relativbeträgen umgeformten Gl. (2.47) entsteht. Die Verbindung zur Lösung des Problems $(\mathcal{KE}_{unvst})$ ergibt sich aus dem folgenden Satz.

[318] Es wird hierbei $E\left[\int_0^T H_\nu(t)\, dt + H_\nu(T)\right] < \infty$ $(\forall \nu(.) \in \mathcal{D})$ unterstellt.

[319] In *Karatzas/Shreve* (1998), S. 268, gilt wegen der zusätzlichen Restriktion für die Nutzenfunktion (vgl. Fn. 315, S. 161) $z_{KE,\nu} = \infty$.

[320] Es wird $E\left[\int_0^T H_\nu(t)\, dt + H_\nu(T)\right] < \infty$ vorausgesetzt.

Satz 3.1 *Cvitanić/Karatzas (1992)*[321]
Betrachtet werden die folgenden Aussagen, innerhalb derer $\hat{\nu}(.) \in \mathcal{D}_0$ und für die $x > 0$ gilt:

1. *Zu $(c_{KE,\hat{\nu}}(.), \xi_{KE,\hat{\nu}})$ existiert ein Portfolio-Prozess $p_{KE,\hat{\nu}}(.)$, [welcher durch Gl. (3.36) gegeben ist,] so dass das Paar $(c_{KE,\hat{\nu}}(.), p_{KE,\hat{\nu}}(.))$ in $\mathcal{A}_{KE}(x;K)$ ist und Folgendes fast sicher, fast immer gilt $(t \in [0,T])$*[322]*:*

$$\begin{aligned} p_{KE,\hat{\nu}}(t) \in K,\ \zeta(\hat{\nu}(t)) + p'_{KE,\hat{\nu}}(t)\hat{\nu}(t) &= 0, &(3.38)\\ X_{KE}^{x,c_{KE,\hat{\nu}},p_{KE,\hat{\nu}}}(t) &= X_{KE,\hat{\nu}}(t). &(3.39)\end{aligned}$$

2. *Für $\hat{\nu}(.)$ gilt:*
$$V_{KE,\hat{\nu}}(x) \leq V_{KE,\nu}(x), \quad \forall \nu(.) \in \mathcal{D}. \tag{3.40}$$

3. *Für $(c_{KE}(.), p_{KE}(.)) \in \mathcal{A}_{KE}(x;K)$ gilt:*
$$V_{KE}(x;K) = E\left[\int_0^T U_1(t, c_{KE}(t))\,dt + U_2(X^{x,c_{KE},p_{KE}}(T))\right] < \infty. \tag{3.41}$$

Dann gilt:

- *Die Aussagen 1 und 2 sind äquivalent.*
- *Aus Aussage 1 (bzw. 2) folgt Aussage 3 mit $(c_{KE}(.), p_{KE}(.)) = (c_{KE,\hat{\nu}}(.), p_{KE,\hat{\nu}}(.))$.*
- *Erfüllen die Nutzenfunktionen die folgenden Bedingungen, wobei $U(.)$ für $U_1(t,.)$, $U_2(.)$ $(t \in [0,T])$ steht*[323]*:*

$$\begin{aligned} &xU'(x) \ \textit{nicht fallend auf}\ (0,\infty),\\ &\exists \beta \in (0,1),\ \gamma \in (1,\infty):\ \beta U'(x) \geq U'(\gamma x),\\ &\qquad\qquad \forall x \in (0,\infty),\ U(.) = U_1(t,.),\ U_2(.)\ (t \in [0,T]),\end{aligned}$$

---

[321] Vgl. zu Satz und Beweis *ebd.*, S. 785 ff. (Theorem 10.1) i.V.m. S. 779 (Proposition 8.3), sowie *Karatzas/Shreve* (1998), S. 274 ff. (Proposition 6.3.8, Theorem 6.4.1) i.V.m. S. 267 f. (Gl. (6.3.7) und Remark 6.3.3). Die Wiedergabe des Satzes ist den hier verfolgten Zwecken angepasst und deshalb verkürzt; insbesondere fehlt eine Verbindung zum Wert des konvexen Duals zur Zielfunktion $V_\nu(.)$ (vgl. hierzu Anhang 5.2). Ein Teil des Beweises, nämlich die Inklusionen aus Aussage 1 nach der folgenden Nummerierung, ist als Spezialfall des Beweises zu betrachten, der zu dem im Weiteren aufgeführten Satz 3.2, welcher der Einbeziehung der Besteuerung dient, gegeben wird und dabei lediglich eine „Steuer-Modifikation" des Beweises aus den zitierten Quellen repräsentiert.

[322] Die erste nachfolgende Bedingung ist lediglich affirmativ, da $(c_{KE,\hat{\nu}}(.), p_{KE,\hat{\nu}}(.)) \in \mathcal{A}_{KE}(x;K)$ impliziert, dass $p_{KE,\hat{\nu}}(.) \in K$. Mit dem durch Gl. (3.36) gegebenen Portfolio-Prozess stimmt der über Gl. (3.35) definierte *optimale* Vermögensprozess $X_{KE,\hat{\nu}}(.)$ mit dem Vermögensprozess $X_{KE,\hat{\nu}}^{x,c_{KE,\hat{\nu}},p_{KE,\hat{\nu}}}(.)$ im Schattenmarkt (fast sicher, fast immer) überein. Der durch Gl. (3.36) beschriebene optimale Portfolio-Prozess im Schattenmarkt wird damit zu dem hier angesprochenen Prozess $p_{KE,\hat{\nu}}(.)$; vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 269. Der Zusatz in eckigen Klammern gegenüber dem Originalsatz stellt dies heraus. In der Konsequenz gilt dies auch analog für den optimalen Konsumprozess.

[323] Zur ersten Bedingung sei angemerkt: Bei einer auf $(0,\infty)$ zweimal (im zweiten Argument partiell) stetig differenzierbaren Nutzenfunktion entspricht diese Bedingung einem Wert des relativen Risikoaversionskoeffizienten nach *Arrow/Pratt* (vgl. S. 85) von kleiner-gleich eins; denn mit $f(x) = xU'(x)$ ergibt sich $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq -\frac{xU''(x)}{U'(x)}$.

und gilt Aussage 3, dann gibt es einen Prozess $\hat{\nu}(.) \in \mathcal{D}_0$, so dass die Aussagen 1 und 2 mit $p_{KE,\hat{\nu}}(.) = p_{KE}(.)$ erfüllt sind.

Findet man folglich einen Schattenpreisprozess $\hat{\nu}(.) \in \mathcal{D}_0$, der den minimalen Zielfunktionswert $V_{KE,\nu}(x)$ über alle Schattenmärkte $\mathcal{M}_\nu$ ($\nu(.) \in \mathcal{D}$) nach sich zieht[324], dann ist dadurch auch ein optimaler Prozess für das Ausgangsproblem ($\mathcal{KE}_{unvst}$) gegeben. Dies bedeutet, dass für diesen Prozess die Vermögensentwicklung auf dem Schattenmarkt, ausgedrückt durch $X_{KE,\hat{\nu}}(.)$, (bis auf Ununterscheidbarkeit) identisch ist der tatsächlichen Vermögensentwicklung, welche durch $X_{KE}^{x,c_{\hat{\nu}},p_{\hat{\nu}}}(.)$ gegeben ist. Zum Ausdruck kommt dieser Sachverhalt in Gl. (3.39). Darüber hinaus ist auch durch die Gl. (3.38) und (3.39) ein Bedingungssystem gegeben, dessen Erfüllung durch einen Schattenpreisprozess $\hat{\nu}(.) \in \mathcal{D}_0$ zur Lösung des Optimierungsproblems ($\mathcal{KE}_{unvst}$) führt; dies ist im Zusammenhang mit „Power-type"-Nutzenfunktionen von Bedeutung[325]. Dabei besagt Gl. (3.39), dass der zum betrachteten Konsum-/Portfolio-Prozesspaar gehörige Vermögensprozess mit dem für den betreffenden Schattenmarkt ($\mathcal{M}_{\hat{\nu}}$) optimalen Vermögensprozess gemäß Gl. (3.35) übereinstimmen muss (im Sinne von Ununterscheidbarkeit). In umgekehrter Richtung kann zumindest für eine bestimmte Klasse von Nutzenfunktionen, zu welcher die logarithmische Nutzenfunktion und „Power-type"-Nutzenfunktionen der Gestalt $U(x) = \frac{1}{\beta}x^\beta$ ($\beta \in (0,1)$) gehören, davon ausgegangen werden, dass bei Lösung des primalen Problems ($\mathcal{KE}_{unvst}$) auch eine Lösung des dualen Problems ($\mathcal{KE}_{\hat{\nu}}$) existiert[326]. Bestimmungszweck der Martingalmethode mit dem Dualansatz ist, über die Ermittlung eines Schattenpreisprozesses $\hat{\nu}(.)$ zu einem primal optimalen Portfolio-Prozess zu gelangen, so dass bei einer Anwendung des Satzes 3.1 der Schluss von Aussage 1 oder 2 auf Aussage 3 im Vordergrund steht. Dem trägt der folgende Satz Rechnung, der die Gültigkeit des vorausgehenden Satzes (zumindest partiell) auch im Steuerfall postuliert, wobei ($\mathcal{KE}_{unvst}^{st}$) das zu ($\mathcal{KE}_{unvst}$) analoge Problem unter dem Steuersystem des *Abschnittes 2.2.3.4* bezeichnet.

Satz 3.2 *Optimalitätsbedingungen im Steuerfall*
Mit der Maßgabe, dass als Diskontierungsprozess der Prozess $S_0^{\nu,st}(.)$ gemäß Gl. (3.14) an die Stelle des Prozesses $S_0^\nu(.)$ tritt[327] *und unter dieser Bedingung eine analoge Optimierung in dem durch $\nu(.) \in \mathcal{D}$ charakterisierten Schattenmarkt wie im Vor-Steuer-Fall erfolgt, so dass sich $c_{KE,\nu}^{st}(.)$ als optimaler Konsumprozess, $\xi_{KE,\nu}^{st}$ als optimales Endvermögen und für den optimalen*

[324] Aufgrund der Definition der Menge $\mathcal{D}_0$ gilt $V_{KE,\hat{\nu}}(x) < \infty$.
[325] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 276 und 305 ff.
[326] Zu allgemeinen Existenzaussagen unter Bezug auf das hier nicht aufgeführte konvexe Dual zur Zielfunktion $V_.(.)$ (vgl. Fn. 321, S. 164) sei auf *Karatzas/Shreve* (1998), S. 284 ff., verwiesen.
[327] Damit ist unmittelbar auch $H_\nu(.)$ (Gl. (3.20)) durch $H_\nu^{st}(.)$ (Gl. (3.21)) zu ersetzen.

Portfolio-Prozess:

$$p^{st}_{KE,\nu}(t) = \frac{1}{1-st}(\sigma'(t))^{-1}\left(\frac{\psi^{st}_{KE,\nu}(t)}{H^{st}_{\nu}(t)X^{st}_{KE,\nu}(t)} + \theta_\nu(t)\right), \tag{3.42}$$

— $\psi^{st}_{KE,\nu}(.)$ und $X^{st}_{KE,\nu}(.)$ analog $\psi_{KE,\nu}(.)$ bzw. $X_{KE,\nu}(.)$ — sowie als optimaler Zielfunktionswert entsprechend Gl. (3.31) $V^{st}_{KE,\nu}(x)$ für den Nach-Steuer-Fall ergeben, gilt unter den Voraussetzungen des Satzes 3.1, d.h. insbesondere mit Bezug auf einen Prozess $\hat{\nu}(.) \in \mathcal{D}_0$, auch unter dem Steuersystem $\mathcal{S}$ Folgendes:

1. *Die Aussagen 1 und 2 sind äquivalent.*

2. *Aus der Gültigkeit der Aussage 1 (bzw. 2) folgt die Gültigkeit der Aussage 3 mit $(c^{st}_{KE}(.), p^{st}_{KE}(.)) = (c^{st}_{KE,\hat{\nu}}(.), p^{st}_{KE,\hat{\nu}}(.))$, wobei $(c^{st}_{KE}(.), p^{st}_{KE}(.))$ die Lösung im restringierten Primalproblem (bezogen auf die Prozesse/Werte im Nach-Steuer-Fall) repräsentiert.*

Zum *Beweis* siehe Anhang 5.2.

Wie schon angemerkt, entstehen bei der Anwendung der Sätze 3.1 und 3.2 erhebliche Auswertungsprobleme, die nur durch Spezialisierungen gemildert werden können. Gegenüber dem diesbezüglich ebenfalls nicht unproblematischen Fall eines vollständigen Kapitalmarktes bestehen im Fall eines unvollständigen Kapitalmarktes zusätzlich Hürden durch die Ermittlung des optimalen Schattenpreisprozesses. Für logarithmische Nutzenfunktionen können jedoch Lösungen explizit berechnet werden.

Beispiel 3.2 *Logarithmische Nutzenfunktionen*[328]
Die Nutzenbeiträge der Entnahmen bzw. des Endvermögens werden durch logarithmische Nutzenfunktionen wie folgt abgebildet, wobei die Nutzenwerte durch die deterministischen Funktionen $f_1(.), f_2(.) > 0$ zeitlich gewichtet werden:

$$\begin{array}{llcccccc} & U_1(t,c) & = & f_1(t)\ln c & \text{und} & U_2(\xi) & = & f_2(T)\ln\xi \\ \text{mit} & U_1'(t,c) := \dfrac{\partial U_1(t,c)}{\partial c} & = & f_1(t)\dfrac{1}{c} & \text{und} & U_2'(\xi) & = & f_2(T)\dfrac{1}{\xi}, \\ \text{so dass} & I_1(t,y) & = & f_1(t)\dfrac{1}{y} & \text{und} & I_2(y) & = & f_2(T)\dfrac{1}{y}. \end{array}$$

[328] Die Behandlung logarithmischer Nutzenfunktionen im Rahmen einer simultanen Konsum- und Endvermögensoptimierung in Gestalt von $U_1(t,x) = U_2(x) = \ln x$ ($\forall t \in [0,T]$) ist in *Karatzas/Shreve* (1998), S. 282, und *Cvitanić/Karatzas* (1992), S. 790 f., zu finden. Die folgende Darstellung erweitert die Funktionen (geringfügig) um eine multiplikativ hinzuzufügende Funktion der Zeit. Darüber hinaus wird das „Ergebnis" der angegebenen Quellen fortgeführt, indem Algorithmen zur Bestimmung des optimalen Schattenpreisprozesses $\hat{\nu}(.)$ für bestimmte Restriktionen(klassen) des *Abschnittes 3.2* angegeben werden. Dies ermöglicht unmittelbar eine Implementierung der dergestalt spezifizierten Problemstellungen innerhalb der dynamischen Portfolio-Optimierung auf unvollständigen Kapitalmärkten.

Hinsichtlich der die Zeitpräferenz repräsentierenden Funktionen ist vor allem an solche der Gestalt: $f_i(t) = e^{-kt}$ $(k > 0, i = 1,2)$ zu denken. Für diesen Fall entspricht dieses Beispiel zu einem unvollständigen Kapitalmarkt den Beispielen 2.5 (ohne Steuern) bzw. 2.7 (mit Steuern) bei Vollständigkeit des Marktes. Zu beachten ist allerdings wiederum, dass die Zeitpräferenz nur in multiplikativer Weise unter Separation des Zeiteinflusses von der Wirkung der Konsum- bzw. Vermögenshöhe auf den Nutzenwert zum Ausdruck gebracht wird. Im Folgenden wird das Vorgehen unter dem Steuersystem $\mathcal{S}$ betrachtet, wobei darin der Vor-Steuer-Fall durch Nullsetzen des Steuerfaktors $(st \equiv 0)$ enthalten ist.

Für die Betragsfunktion ergibt sich mit $\nu(.) \in \mathcal{D}$, $y \in \mathbb{R}_{++}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^{st}_{KE,\nu}(y) &= E\left[\int_0^T H^{st}_\nu(t) I_1(t, yH^{st}_\nu(t))\,dt + H^{st}_\nu(T) I_1(yH^{st}_\nu(T))\right]\\ &= E\left[\frac{1}{y}\int_0^T f_1(t)\,dt + \frac{1}{y} f_2(T)\right] = \frac{1}{y}\left(\int_0^T f_1(t)\,dt + f_2(T)\right).\end{aligned}$$

Für das Weitere wird $F(t,T) := \left(\int_t^T f_1(s)\,ds + f_2(T)\right)$ gesetzt. Die Umkehrfunktion zur Betragsfunktion lautet dann:

$$\mathcal{Y}^{st}_{KE,\nu}(x) = \frac{1}{x} F(0,T), \quad x \in \mathbb{R}_{++}.$$

Der optimale Konsumprozess und das optimale Endvermögen ergeben sich beim Ausgangsvermögen x analog den Gl. (3.33) und (3.34) zu:

$$\begin{aligned}c^{st}_{KE,\nu}(t) &= \frac{x}{H^{st}_\nu(t)} \frac{f_1(t)}{F(0,T)},\ t \in [0,T],\ \text{und}\\ \xi^{st}_{KE,\nu} &= \frac{x}{H^{st}_\nu(T)} \frac{f_2(T)}{F(0,T)}.\end{aligned}$$

Der Zielfunktionswert in dem durch $\nu(.)$ charakterisierten Schattenmarkt erhält damit die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}V^{st}_\nu(x) &= E\left[\int_0^T U_1(t, c^{st}_{KE,\nu}(t))\,dt + U_2(\xi^{st}_{KE,\nu})\right]\\ &= E\left[\int_0^T f_1(t) \ln\left(\frac{x}{H^{st}_\nu(t)} \frac{f_1(t)}{F(0,T)}\right) dt + f_2(T) \ln\left(\frac{x}{H^{st}_\nu(T)} \frac{f_2(T)}{F(0,T)}\right)\right]\\ &= \int_0^T f_1(t) \ln \frac{x f_1(t)}{F(0,T)}\,dt + f_2(T) \ln \frac{x f_2(T)}{F(0,T)}\\ &\quad - E\left[\int_0^T f_1(t) \ln H^{st}_\nu(t)\,dt + f_2(T) \ln H^{st}_\nu(T)\right].\end{aligned}$$

Gemäß Satz 3.1 bzw. Satz 3.2 ist nach einem Schattenpreisprozess $\hat{\nu}(.)$ $(\in \mathcal{D}_0)$ zu suchen, der den Wert $V^{st}_\nu(x)$ minimiert, was bedeutet:

$$\hat{\nu}(.) := \arg \min_{\nu(.)\in\mathcal{D}} V^{st}_\nu(x) = \arg \min_{\nu(.)\in\mathcal{D}} -E\left[\int_0^T f_1(t) \ln H^{st}_\nu(t)\,dt + f_2(T) \ln H^{st}_\nu(T)\right]. \tag{3.43}$$

Unter Berücksichtigung der Definitionsgleichung für den Zustandspreis-Dichte-Prozess $H_\nu^{st}(.)$ (Gl. (3.20)) — bzw. den Prozess $H_\nu(.)$ (Gl. (3.21)) im Vor-Steuer-Fall — ist somit nach folgendem Prozess zu suchen:

$$\begin{aligned}
\hat{\nu}(.) \quad &= \quad \arg\min_{\nu(.)\in\mathcal{D}} \left\{ \int_0^T f_1(t) E\left[\int_0^t ((1-st)(r(s)+\zeta(\nu(s))) \right.\right. \\
&\qquad \left. +\frac{1}{2} \parallel \theta_\nu(s) \parallel^2)\, ds + \int_0^t \theta_\nu'(s)\, dW(s)\right] dt \\
&\qquad +f_2(T) E\left[\int_0^T ((1-st)(r(s)+\zeta(\nu(s))) \right. \qquad (3.44) \\
&\qquad \left.\left. +\frac{1}{2} \parallel \theta_\nu(s) \parallel^2)\, ds + \int_0^T \theta_\nu'(s)\, dW(s)\right]\right\} \\
\Leftrightarrow \hat{\nu}(t) \quad &= \quad \arg\min_{\nu\in\tilde{K}} \left\{(1-st)\zeta(\nu) + \frac{1}{2} \parallel \theta_\nu(t) \parallel^2\right\},\ t\in[0,T]. \qquad (3.45)
\end{aligned}$$

Die Minimierung des Zielfunktionswertes nach dem Schattenpreisprozess lässt sich demgemäß reduzieren auf die entsprechende Minimierung des Klammerausdruckes auf der rechten Seite der Gl. (3.45) für jeden Zeitpunkt innerhalb des Planungszeitraumes, und zwar isoliert von den jeweils anderen Zeitpunkten. Insofern kann der optimale Schattenpreisprozess über eine (zeit)„punktweise Minimierung“[329] ermittelt werden. Ein Algorithmus zur Bestimmung des optimalen Prozesses $\hat{\nu}(.)$ unter verschiedenen Restriktionen wird nachfolgend beschrieben. Zuvor werden, das Vorliegen dieses Prozesses voraussetzend, noch der optimale Vermögens- und der dazugehörige Portfolio-Prozess angegeben. Der Vermögensprozess ergibt sich aufgrund der zu Gl. (3.35) analogen Beziehung für den Nach-Steuer-Fall, wie sich leicht nachvollziehen lässt, als:

$$X_{KE,\hat{\nu}}^{st}(t) = \frac{1}{H_{\hat{\nu}}^{st}(t)} x \frac{F(t,T)}{F(0,T)}, \quad t\in[0,T].$$

Entsprechend Gl. (3.37) ist darüber hinaus für $t\in[0,T]$:

$$\begin{aligned}
M_{KE,\hat{\nu}}^{st}(t) \quad &= \quad E\left[\int_0^T H_{\hat{\nu}}^{st}(s)\frac{x}{F(0,T)H_{\hat{\nu}}^{st}(s)}\, ds + H_{\hat{\nu}}(T)\frac{x}{F(0,T)H_{\hat{\nu}}^{st}(T)} \ \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \quad x,
\end{aligned}$$

so dass aus der Martingaldarstellung dieses Prozesses gemäß $M_{KE,\nu}^{st}(t) = x + \int_0^t \psi_{\hat{\nu}}^{st}(s)'\, dW(s)$ $(t\in[0,T])$, wie bereits auf dem vollständigen Markt, $\psi_{\hat{\nu}}^{st}(.)\equiv 0$ folgt. Der optimale Portfolio-Prozess hat für $t\in[0,T]$ damit die Gestalt:

$$p_{KE,\hat{\nu}}^{st}(t) = \frac{1}{1-st}(\sigma'(t))^{-1}\theta_{\hat{\nu}}(t) = \frac{1}{1-st}(\sigma(t)\sigma'(t))^{-1}\left(b(t)+\delta(t)+\hat{\nu}(t)-r(t)\mathbf{1}_n\right). \qquad (3.46)$$

Im folgenden *Abschnitt 3.3.2.2* wird die Ermittlung des optimalen Schattenpreisprozesses gemäß Gl. (3.45) anhand von zwei verschiedenen Typen

[329] Vgl. *Cvitanić/Karatzas* (1992), S. 790.

investorspezifischer Restriktionen vertieft. Unter Bezug auf *Abschnitt 3.2* handelt es sich dabei um Restriktionen zur Beschränkung von Investitions- und Desinvestitionsvolumina in einzelne, riskante Wertpapiere sowie um die Beschränkung des Verschuldungsgrades bei einem Verbot von Aktienleerverkäufen. □

Zuvor soll jedoch, wie im Vorfeld dieses Abschnittes angekündigt, die Problematik herausgestellt werden, die bei einer Anwendung der gerade durchgeführten Optimierung für den Fall einer *Endvermögensoptimierung bei gegebenen, nicht verschwindenden Entnahmen* entsteht. Der Übersichtlichkeit halber werden hierfür die sich für die Endvermögensoptimierung einstellenden, wesentlichen Ergebnisprozesse und sonstigen Resultate kurz angeführt, wobei von einem Anfangsvermögen x und zunächst noch von keinen Entnahmen ausgegangen wird. Vor dem Hintergrund des gegebenen Darstellungszweckes werden Steuern nicht explizit berücksichtigt. Mit $U_1(.,.) \equiv 0$ und somit $I_1(.,.) \equiv 0$ ergibt sich bei analoger Definition der Zielfunktion $V_E(.;K)$ für den restringierten Ausgangsmarkt und $V_{E,\nu}(.)$ für den Schattenmarkt $\mathcal{M}_\nu$ auf diesem die Betragsfunktion $\mathcal{X}_{E,\nu}(y) := E\left[H_\nu(T)I_2(yH_\nu(T))\right]$ $(y \in \mathbb{R}_{++})$ mit zugehöriger Umkehrfunktion $\mathcal{Y}_{E,\nu}(.)$ — bei geeignetem Definitions- und Bildbereich. Als optimales Endvermögen ist daraus $\xi_{E,\nu} = I_2(\mathcal{Y}_{E,\nu}(x)H_\nu(T))$, analog Gl. (3.34), abzuleiten. Für den Vermögensprozess ergibt sich analog Gl. (3.35) $X_{E,\nu}(t) = \frac{1}{H_\nu(t)} E\left[H_\nu(T)\xi_{E,\nu} \mid \mathcal{F}_t\right]$ $(t \in [0,T])$ und für den optimalen Portfolio-Prozess:

$$p_{E,\nu}(t) = (\sigma'(t))^{-1}\left(\frac{\psi_{E,\nu}(t)}{H_\nu(t)X_{E,\nu}(t)} + \theta_\nu(t)\right),\ t \in [0,T], \tag{3.47}$$

wobei sich $\psi_{E,\nu}(.)$ ableitet aus der Martingaldarstellung von $M_{E,\nu}(t) := E\left[H_\nu(T)\xi_{E,\nu} \mid \mathcal{F}_t\right]$ $(t \in [0,T])$. Der optimale Schattenpreisprozess $\hat{\nu}(.)$ minimiert die Zielfunktion $V_\nu(x)$ über alle $\nu(.) \in \mathcal{D}$.

Für den Fall einer *logarithmischen Nutzenfunktion* $(U_2(\xi) = \ln\xi,\ \xi > 0)$ spezialisiert sich dies zu: $\mathcal{X}_{E,\nu}(y) = \frac{1}{y}$, $\xi_{E,\nu} = \frac{x}{H_\nu(T)}$ und

$$V_\nu(x) = \ln x - E\left[\ln H_\nu(T)\right], \tag{3.48}$$

so dass ebenfalls der durch Gl. (3.45), mit $st \equiv 0$, gegebene Ausdruck zu minimieren ist. Damit ist:

$$\begin{aligned} \hat{\nu}(.) &= \arg\min_{\nu(.)\in\mathcal{D}} \left\{ E\left[\int_0^T (r(s) + \zeta(\nu(s)) \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \frac{1}{2} \parallel \theta_\nu(s) \parallel^2)\, ds + \int_0^T \theta'_\nu(s)\, dW(s)\right]\right\} \qquad (3.49) \\ \Leftrightarrow\ \hat{\nu}(t) &= \arg\min_{\nu\in\tilde{K}} \left\{\zeta(\nu) + \frac{1}{2} \parallel \theta_\nu(t) \parallel^2\right\},\ t \in [0,T]. \qquad (3.50) \end{aligned}$$

Die Suche nach einem minimierenden Prozess gemäß Gl. (3.49) wird folglich wiederum durch eine punktweise Minimierung des Klammerausdrucks auf der rechten Seite von Gl. (3.50) über $\nu \in \tilde{K}$ erreicht. Analog der Vorgehensweise

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

bei simultaner Entnahme- und Endvermögensoptimierung kann der optimale Portfolio-Prozess hergeleitet werden. Dies führt bei Einbeziehung von Steuern auf denselben Ausdruck wie er durch Gl. (3.46) beschrieben wird.

Betrachtet man nunmehr einen *nicht verschwindenden, jedoch deterministischen Konsumprozess* $c_\nu(t,\omega) \equiv \bar{c}(t)\,(\forall t \in [0,T])$, so wird die Endvermögensoptimierung unter der Annahme formuliert, dass der Gegenwartswert des Entnahmestromes auf dem Schattenmarkt $\mathcal{M}_\nu$ vom Anfangsvermögen in Abzug gebracht wird und lediglich der verbleibende Betrag in ein „optimales" Endvermögen zu transferieren ist. Für gegebenes $\nu(.)$ sind somit die zuvor angeführten optimalen Prozesse für ein Anfangsvermögen von $\bar{x} := x - E\left[\int_0^T H_\nu(t)\bar{c}(t)\,dt\right]$ zu formulieren, und es wird $V_\nu(\bar{x})$ über $\nu(.) \in \mathcal{D}$ zu minimieren sein[330].

[330] Vgl. hierzu auch *Abschnitt 2.2.3.3*. Die Zulässigkeit des Vorgehens, mithin die analoge Anwendbarkeit von Satz 3.1, ergibt sich durch den Beweis von *Karatzas/Shreve* (1998), S. 266 ff., (beachte Anhang 5.2) mit $U_1(.,.) \equiv 0$, indem die nachfolgend genannten Anpassungen vorzunehmen sind. Die negative Aussage des hier verfolgten reinen Demonstrationszieles möglicher auftretender Schwierigkeiten bei der Berücksichtigung nicht verschwindender Entnahmen rechtfertigt nicht eine ausführliche Erörterung; es werden deshalb nur die Anpassungen kurz genannt:

Die Zielfunktionswerte auf den Schattenmärkten sind wie folgt definiert: $V_\nu^{\bar{c}}(x) := \sup_{(c,p)\in\mathcal{A}_\nu^{\bar{c}}(x)} E\left[U_2(X_\nu^{x,c,p}(T))\right]$ sowie $V_\nu(x) := \sup_{(c,p)\in\mathcal{A}_\nu(x)} E\left[U_2(X_\nu^{x,c,p}(T))\right]$, wobei $\mathcal{A}_\nu^{\bar{c}}(x)$ analog zu $\mathcal{A}_\nu(x)$ definiert ist mit dem Unterschied, dass insbesondere $c(.) = \bar{c}(.)$ (fast immer, fast sicher) erfüllt sein muss, während für $\mathcal{A}_\nu(x)$ anders als im Fall der Entnahme- und Endvermögensoptimierung von $c(.) \equiv 0$ auszugehen ist. [Das Gleichheitszeichen anstelle eines „$\geq$" berücksichtigt bereits, dass eine Lösung des Optimierungsproblems keinen über das Geforderte hinausgehenden Konsum beinhalten wird.] Des Weiteren wird $\mathcal{X}_\nu^{\bar{c}}(y) := E\left[H_\nu(T)I_2(yH_\nu(T))\right] + E\left[\int_0^T H_\nu(t)\bar{c}(t)\,dt\right]$ anstelle von $\mathcal{X}_\nu(y) = E\left[H_\nu(T)I_2(yH_\nu(T))\right]$ sowie $\tilde{V}_\nu^{\bar{c}}(y) := \sup_{x>0}[V_\nu^{\bar{c}}(x) - xy] = G_\nu^{\bar{c}}(y) - y\mathcal{X}_\nu^{\bar{c}}(y)$ statt $\tilde{V}_\nu(y) := \sup_{x>0}[V_\nu(x) - xy] = G_\nu(y) - y\mathcal{X}_\nu(y)$ gesetzt, wobei $G_\nu^{\bar{c}}(y) := G_\nu(y) := E\left[U_2(I_2(yH_\nu(T)))\right]$ sein soll. $\mathcal{Y}_\nu^{\bar{c}}(.)$ bzw. $\mathcal{Y}_\nu(.)$ bezeichnen die Umkehrfunktionen zu $\mathcal{X}_\nu^{\bar{c}}(.)$ bzw. $\mathcal{X}_\nu(.)$. Aus den Definitionen für $\mathcal{X}_\nu^{\bar{c}}(.)$ und $\mathcal{X}_\nu(.)$ folgt für die Umkehrfunktionen $\mathcal{Y}_\nu^{\bar{c}}(x) = \mathcal{Y}_\nu(x - E\left[\int_0^T H_\nu(t)\bar{c}(t)\,dt\right])$. Es ist nun in Bezug auf das konvexe Dual zur Zielfunktion $(\tilde{V}_\nu(.))$ $\tilde{V}_\nu^{\bar{c}}(y) = E\left[\tilde{U}_2(yH_\nu(T))\right] - yE\left[\int_0^T H_\nu(t)\bar{c}(t)\,dt\right]$ für $\tilde{V}_\nu(y) = E\left[\tilde{U}_2(yH_\nu(T))\right]$ zu setzen. Ferner gilt $V_\nu^{\bar{c}}(x) = G_\nu^{\bar{c}}(\mathcal{Y}_\nu^{\bar{c}}(x))$ bzw. (vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 270 i.V.m. S. 108) $V_\nu(x) = G_\nu(\mathcal{Y}_\nu(x))$, wobei x für das Anfangsvermögen steht. Die Optimalitätsbedingung des Satzes 3.1 gilt dann auch für $V_\nu^{\bar{c}}(x)$, so dass nach einem diesen Funktionswert minimierenden $\hat{\nu}(.)$ zu suchen ist.

Auf Basis der aufgeführten Beziehungen gilt nun aber auch: $V_\nu^{\bar{c}}(x) = G_\nu^{\bar{c}}(\mathcal{Y}_\nu^{\bar{c}}(x)) = G_\nu(\mathcal{Y}_\nu^{\bar{c}}(x)) = G_\nu(\mathcal{Y}_\nu(x - E\left[\int_0^T H_\nu(t)\bar{c}(t)\,dt\right])) = V_\nu(x - E\left[\int_0^T H_\nu(t)\bar{c}(t)\,dt\right]) = V_\nu(\bar{x})$. Bei der Endvermögensoptimierung bei einem gegebenen, nicht verschwindenden Entnahmestrom $\bar{c}(.)$ kann folglich eine Endvermögensoptimierung unter der Annahme eines Entnahmestromes von null und mit modifiziertem Anfangsvermögen vorgenommen werden. Das modifizierte Anfangsvermögen ergibt sich aus dem ursprünglichen, indem von diesem der (vom Schattenpreisprozess abhängige) Gegenwartswert für den Entnahmestrom in Abzug gebracht wird.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Für eine *logarithmische Nutzenfunktion* ($U_2(\xi) = \ln \xi$, $\xi > 0$) ergibt sich nun analog zu Gl. (3.48):

$$V_\nu(\bar{x}) = \ln\left(x - E\left[\int_0^T H_\nu(t)\bar{c}(t)\,dt\right]\right) - E\left[\ln H_\nu(T)\right]. \tag{3.51}$$

Der minimierende Schattenpreisprozess $\hat{\nu}(.)$ hat unter Beachtung der Gestalt des Zustandspreis-Dichte-Prozesses nach Gl. (3.20) somit Folgendes zu erfüllen:

$$\begin{aligned}\hat{\nu}(.) \quad = \quad & \arg\min_{\nu(.)\in\mathcal{D}} \\ & \left\{\ln\left(x - E\left[\int_0^T \bar{c}(t)e^{-\int_0^t (r(s)+\zeta(\nu(s))+\frac{1}{2}\|\theta_\nu(s)\|^2)\,ds - \int_0^t \theta_\nu'(s)\,dW(s)}\,dt\right]\right)\right. \\ & \left. -E\left[\int_0^T (r(s)+\zeta(\nu(s))+\frac{1}{2}\parallel \theta_\nu(s)\parallel^2)\,ds + \int_0^T \theta_\nu'(s)\,dW(s)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Aus dieser Darstellung wird deutlich, dass eine Ermittlung des optimalen Schattenpreisprozesses nur unter zusätzlichen, vereinfachenden Annahmen möglich ist. Insbesondere ist im allgemeinen Fall die Lösung nicht mehr über eine punktweise Minimierung zu finden.

Ist $r(.)$ *deterministisch* und liegt ein Restriktionentyp dergestalt vor, dass $\zeta(\nu(.)) \equiv 0$ ist, dann gilt — mit $Z_\nu(.)$ als Martingal:

$$V_\nu(\bar{x}) = \ln\left(x - \int_0^T \bar{c}(t)e^{-\int_0^t r(s)\,ds}\,dt\right) - E\left[\ln H_\nu(T)\right], \tag{3.53}$$

so dass die Minimierung des Funktionswertes wie in Gl. (3.50) punktweise über den Ausdruck $\zeta(\nu) + \frac{1}{2} \parallel \theta_\nu(s) \parallel^2$ erfolgen kann. Durch die Vereinfachung ist das Optimierungsproblem allerdings so weit reduziert, dass der risikolose Bond keinen Engpass repräsentiert und durch Anlage allein in ihm der deterministische Entnahmestrom gedeckt werden kann. Der hierfür in $t = 0$ bereitzustellende Betrag ist i.d.R. — ggf. abhängig von der Gestalt der Funktionen $\bar{c}(.)$ bzw. $r(.)$ — unmittelbar berechenbar. Die Marktrestriktionen tangieren dann die Erfüllung des Entnahmestromes nicht, so dass die Endvermögensoptimierung so durchgeführt werden kann, als wären bei entsprechend reduziertem Ausgangsvermögen keine Konsumentnahmen vorzusehen. Das dergestalt vereinfachte Problem der Endvermögensoptimierung bei gegebenen deterministischen Konsumentnahmen führt folglich auf das gleiche Minimierungsproblem wie die Endvermögensoptimierung ohne Konsumentnahmen bzw. die Optimierung von Konsum und Endvermögen, sofern von logarithmischen Nutzenfunktionen ausgegangen wird. Dies soll im nächsten Abschnitt durch eine Untersuchung des nach $\nu \in \tilde{K}$ zu minimierenden Terms in der Gl. (3.50) vertieft werden, und zwar unter zweierlei Restriktionentypen, für welche jeweils $\zeta(\nu) \equiv 0$ nicht vorausgesetzt werden kann. Zuvor wird jedoch noch der Fall von „Power-type"-Nutzenfunktionen und deterministischen Koeffizienten angesprochen.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Satz 3.3 *Optimaler Schattenpreis- und Portfolio-Prozess bei deterministischen Koeffizienten und Nutzenfunktion vom „power type“*
Es seien $U_1 : [0, \infty) \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *und* $U_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *Nutzenfunktionen der Gestalt:*

$$U_1(t, x) = f_1(t) \frac{1}{\beta} x^\beta, \quad t \in [0, \infty), x \in \mathbb{R}_+, \tag{3.54}$$

$$U_2(x) = f_2(T) \frac{1}{\beta} x^\beta, \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{3.55}$$

mit $\beta \in (0,1)$ *und den deterministischen, stetigen Funktionen* $f_1 : [0, T) \to \mathbb{R}_{++}$ *und* $f_2 : \{T\} \to \mathbb{R}_{++}$*. Zugrunde gelegt werde das Steuersystem* $\mathcal{S}$*. Ferner seien die Koeffizientenprozesse* $r(.), b(.), \sigma(.)$ *sowie* $\delta(.)$ *deterministisch und stetige Funktionen der Zeit. Für das Problem* $(\mathcal{KE}_{unvst})$ *einer simultanen Optimierung von Entnahmen und Endvermögen ergibt sich dann der optimale Schattenpreisprozess* $\hat{\nu}(.)\,(\in \mathcal{D}_0)$ *aus:*

$$\hat{\nu}(t) := \arg\min_{\nu \in \tilde{K}} \left\{ (1 - st)(1 - \beta)\zeta(\nu) + \frac{1}{2} \parallel \theta_\nu(t) \parallel^2 \right\}, \quad t \in [0, T]. \tag{3.56}$$

Die Steuerung des Portfolios erfolgt mit dem folgenden optimalen Portfolio-Prozess $(t \in [0, T])$*:*

$$\begin{aligned} p^{st}_{KE,\hat{\nu}}(t) &= \frac{1}{(1 - st)(1 - \beta)} \left(\sigma'(t)\right)^{-1} \theta_{\hat{\nu}}(t) \\ &= \frac{1}{(1 - st)(1 - \beta)} \left(\sigma(t)\sigma'(t)\right)^{-1} \\ &\quad\; (b(t) + \delta(t) + \hat{\nu}(t) - r(t)\mathbf{1}_n)\,. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Für das Problem $(\mathcal{E}_{unvst})$ *der Endvermögensoptimierung bei einem Konsumstrom von* $c(.) \equiv 0$ *ergeben sich die gleichen optimalen Schattenpreis- und Portfolio-Prozesse.*

Beweis: Siehe Anhang 5.3.

Anmerkung 3.1

- *Zunächst ist zu bemerken, dass sich der optimale Schattenpreisprozess wie im Falle einer logarithmischen Nutzenfunktion über die zeitpunktweise Minimierung eines Terms ergibt, welcher nunmehr durch den auf der rechten Seite der Gl. (3.56) in Klammern stehenden Ausdruck gegeben ist. Dieser Ausdruck enthält lediglich deterministische Werte. Damit wird auch der optimale Schattenpreisprozess deterministisch. Bei konstanten Koeffizientenprozessen ergibt sich sogar ein konstanter Schattenpreis(prozess).*

- *Die Portfolio-Prozesse zu logarithmischen Nutzenfunktionen sowie diejenigen zu Nutzenfunktionen des „power type“ unterscheiden sich lediglich dadurch, dass Letztere sich aus den Erstgenannten durch Division mit dem Faktor* $1 - \beta \in (0,1)$ *ergeben. Bei gleichen optimalen Schattenpreisen würden somit Investoren mit entsprechenden „Power-type“-Nutzenfunktionen zu extremeren Portfolio-Zusammensetzungen, mithin zu* *stärker risikobehafteten Portfolios, tendieren. Freilich kann aufgrund der unterschiedlichen Bestimmungsgleichungen (3.56) und (3.45) für den optimalen Wert des Schattenpreises diesbezüglich keine generelle Aussage getroffen werden.*

- *Der Vor-Steuer-Fall ist mit $st \equiv 0$ enthalten*[331].

Der nächste Abschnitt dient dazu, die Herleitung optimaler Schattenpreis- und damit optimaler Portfolio-Prozesse für die zuletzt betrachteten Typen von Nutzenfunktionen zu ergänzen. Es werden für spezielle Restriktionentypen Verfahren zur Evaluierung der Bestimmungsgleichungen (3.45) und (3.56) angegeben.

3.3.2.2 Zur algorithmischen Bestimmung eines Schattenpreisprozesses bei logarithmischen und „Power-type"-Nutzenfunktionen und unter speziellen Restriktionen

Die vorausgehende Herleitung zeigt, dass die Bestimmung eines optimalen Schattenpreis- sowie eines optimalen Portfolio-Prozesses für logarithmische Nutzenfunktionen auf nahezu gleiche, auszuwertende Ausdrücke führt wie die Portfolio-Optimierung bei „Power-type"-Nutzenfunktionen und deterministischen Parameterprozessen. Ein Vergleich der Gl. (3.45) und (3.46) einerseits mit den Gl. (3.56) und (3.57) andererseits zeigt, dass der in den Gleichungen zu logarithmischen Nutzenfunktionen auftretende Term $1 - st$ um den Faktor $1 - \beta$ multiplikativ zu ergänzen ist. Beide Typen von Nutzenfunktionen können somit im Folgenden simultan behandelt werden durch die Einführung eines wie folgt definierten Faktors γ^{st}:

$$\gamma^{st} := \begin{cases} 1 - st, & \text{für Nutzenfkt. } U_1(t,x) = f_1(t)\ln x,\ U_2(x) = f_2(T)\ln x; \\ (1-st)(1-\beta), & \text{für Nutzenfkt. } U_1(t,x) = f_1(t)\frac{1}{\beta}x^{\beta},\ U_2(x) = f_2(T)\frac{1}{\beta}x^{\beta}, \\ & \beta \in (0,1). \end{cases} \tag{3.58}$$

Bei einer reinen Endvermögensoptimierung sind die sich auf Konsumentnahmen beziehenden Nutzenfunktionen $U_1(.,.)$ identisch null. Der Fall ohne Steuern ist jeweils durch $st \equiv 0$ enthalten. Innerhalb des hierdurch gegebenen Rahmens konzentriert sich die weitere Untersuchung auf unterschiedliche Arten der Marktunvollständigkeit.

Der erste Restriktionentyp ist durch den Fall einer *Beschränkung von (Des-)Investitionsvolumina in risikobehaftete Wertpapiere* mit folgender Restriktionenmenge („rectangular constraint")[332] gekennzeichnet:

$$K = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times \ldots \times [\alpha_n, \beta_n], \quad -\infty \le \alpha_i \le 0 \le \beta_i \le \infty,\ i = 1, \ldots, n.$$

[331] Vgl. zum Vor-Steuer-Fall die in Anhang 5.3 angegebenen Quellen.
[332] Vgl. Fn. 300, S. 149.

Daraus ergibt sich:

$$\zeta(\nu) = -\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i 1_{\{|\alpha_i|<\infty\}} \max[0,\nu_i] - \beta_i 1_{\{\beta_i<\infty\}} \max[0,-\nu_i]\right)$$

mit der Bedeutung, dass $1_{\{\gamma<\infty\}} = 1$, falls $\gamma < \infty$, 0 sonst. Lediglich aus Gründen einer einfacheren Beschreibung der Funktion $\zeta(.)$ wird im Folgenden von $-\infty < \alpha_i \leq 0 \leq \beta_i < \infty$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, ausgegangen, so dass allgemein $1_{\{.\}} = 1$ ist. Der später angegebene Berechnungsalgorithmus ist jedoch auch für den allgemeinen Fall im Grundsatz anwendbar. Es liegt somit im Weiteren (vereinfachend) die folgende Funktion zugrunde:

$$\zeta(\nu) = -\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \max[0,\nu_i] - \beta_i \max[0,-\nu_i]) = -\sum_{i=1}^{n} c_i(\nu)\nu_i, \text{ wobei}$$

$$c_i(\nu) = \begin{cases} \alpha_i & \text{für } \nu_i \geq 0, \\ \beta_i & \text{für } \nu_i < 0. \end{cases} \tag{3.59}$$

Es wird hiermit $c(\nu) := (c_1(\nu),\ldots,c_n(\nu))'$ gesetzt. $\zeta(\nu)$ ist als Summe konvexer Funktionen wieder konvex. Für gegebene Parameter $\sigma(t), b(t), \delta(t), r(t)$ und st sowie für $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ wird die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert, wobei auf die Kennzeichnung durch den Zeitparameter der Prozesse verzichtet wird:

$$\begin{aligned} f(\nu,\bar{c}) &:= -\gamma^{st} \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i \nu_i + \tfrac{1}{2} \parallel \theta_\nu \parallel^2 \\ &= -\gamma^{st} \bar{c}'\nu + \tfrac{1}{2} \parallel \theta \parallel^2 + \theta'\sigma^{-1}\nu + \tfrac{1}{2}\nu'(\sigma\sigma')^{-1}\nu. \end{aligned}$$

Der nach Gl. (3.45) für gegebene Parameterausprägungen über $\nu \in \mathbb{R}^n$[333] zu minimierende Ausdruck hat damit die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} f(\nu,c(\nu)) &:= -\gamma^{st} \sum_{i=1}^{n} c_i(\nu) \nu_i + \tfrac{1}{2} \parallel \theta_\nu \parallel^2 \\ &= -\gamma^{st} c'(\nu)\nu + \tfrac{1}{2} \parallel \theta \parallel^2 + \theta'\sigma^{-1}\nu + \tfrac{1}{2}\nu'(\sigma\sigma')^{-1}\nu. \end{aligned}$$

Dabei ist die vektorwertige Funktion $c(\nu)$ wie zuvor bestimmt, indem sich die Komponenten des Funktionswertes aus Gl. (3.59) ergeben. Das Minimierungsproblem lautet folglich:

$$\min_{\nu \in \mathbb{R}^n} f(\nu, c(\nu)). \tag{3.60}$$

Offensichtlich ist $f(\nu,c(\nu))$ stetig und ebenfalls konvex; ferner ist $\lim_{\|\nu\|\to\infty} f(\nu) = \infty$, so dass ein Minimum auf einer kompakten Menge angenommen werden muss und folglich die Funktion $f(\nu,c(\nu))$ ein Minimum, welches wegen der Konvexität zugleich ein globales Minimum ist, besitzt. Es gilt nun — insbesondere unter Beachtung von Gl. (3.46) — bei fixem $\bar{c} \in \mathbb{R}$

[333] Bei den nicht aufgeführten Fällen nicht-endlicher Intervalle müsste diese Menge bei $\alpha_i = -\infty$ auf $\nu_i \leq 0$ und bei $\beta_i = \infty$ auf $\nu_i \geq 0$ eingegrenzt werden ($i \in \{1,\ldots,n\}$) — mit entsprechender Anpassung im Folgenden.

für den Gradientenvektor zum Variablenvektor ν[334]:

$$\nabla f(\nu,\bar{c}) := \left(\frac{\partial f}{\partial \nu_1}(\nu,\bar{c}),\ldots,\frac{\partial f}{\partial \nu_n}(\nu,\bar{c})\right)' = -\gamma^{st}\bar{c} + (\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1}\nu \quad (3.61)$$

$$= \gamma^{st}[-\bar{c} + p^{st}_{KE,\nu}]. \quad (3.62)$$

Analog kann auch zu $f(\nu, c(\nu))$ eine Funktion $f_d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wie folgt definiert werden:

$$(f_d(\bar{\nu}, c(\bar{\nu})))_i := \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \nu_i}(\bar{\nu}, c(\bar{\nu})) & \text{für } \bar{\nu}_i \neq 0 \\ -\gamma^{st}\alpha_i + \left[(\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1}\bar{\nu}\right]_i & \text{für } \bar{\nu}_i = 0, \end{cases}$$

wobei $i = 1, \ldots, n$ und $f_d(.,.) := ((f_d(.,.))_1, \ldots, (f_d(.,.))_n)$; ferner steht $[y]_i$ wie $(y)_i$ für die i-te Komponente des Vektors y. Die (n-wertige) Funktion $f_d(.,.)$ entspricht dem Gradienten der Funktion $f(\nu, c(\nu))$ mit (rechts)stetiger Fortsetzung an den Stellen, an denen eine (partielle) Differenzierbarkeit nicht gegeben ist. Der rechtsseitige Grenzwert der partiellen Ableitung von $f(\bar{\nu}, c(\bar{\nu}))$ nach der Variablen ν_i an der Stelle $\bar{\nu}$ wird durch $f_{\nu_i+}(\bar{\nu}, c(\bar{\nu}))$ ($= f_d(\bar{\nu}, c(\bar{\nu}))_i$) gekennzeichnet. Er beträgt für $\bar{\nu}_i = 0$: $f_{\nu_i+}(\bar{\nu}, c(\bar{\nu})) = -\gamma^{st}\alpha_i + (\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1}\bar{\nu}$. Der linksseitige Grenzwert bei $\bar{\nu}_i = 0$ hat analog den Wert $f_{\nu_i-}(\bar{\nu}, c(\bar{\nu})) = -\gamma^{st}\beta_i + (\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1}\bar{\nu}$.

Im Fall $n = 1$[335] ergibt sich aus Gl. (3.61) mit $\nabla f(\nu, \bar{c}) = 0$:

$$\bar{\nu} = \gamma^{st}\sigma^2\bar{c} - \sigma\theta.$$

$\bar{\nu}$ ist jedoch nur für $\theta \leq \gamma^{st}\sigma\alpha$ oder $\gamma^{st}\sigma\beta \leq \theta$ eine (kompatible) Lösung mit $\bar{c} = c(\bar{\nu})$. Für $\gamma^{st}\sigma\alpha < \theta < \gamma^{st}\sigma\beta$ ist hingegen der Randpunkt $\nu = 0$ optimal, da dann bei $c(\bar{\nu}) = \alpha$ keine Nullstelle $\bar{\nu} \geq 0$ existiert und sich analog für $c(\bar{\nu}) = \beta$ kein $\bar{\nu} \leq 0$ aus der angegebenen Gleichung ergibt. Demgegenüber ist die rechtsseitige Ableitung an der Stelle $\nu = 0$ gegeben durch $f_{\nu+}(0, \alpha) > 0$ und die linksseitige Ableitung ist $f_{\nu-}(0, \beta) < 0$, so dass $\nu = 0$ in diesem Fall das gesuchte Minimum repräsentiert.

Für den allgemeinen Fall $n \geq 1$ wird nunmehr ein Algorithmus zur Lösung des Minimierungsproblems (3.60) angegeben, welcher allerdings durch die nachfolgend aufgeführten Definitionen vorzubereiten ist. Mit der n-wertigen Funktion $f_{oc} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, gegeben durch:

$$f_{oc}(\nu) := (\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1}\nu,$$

wird die folgende *Abbruchbedingung* für das optimale $\hat{\nu} \in \mathbb{R}^n$ formuliert:
Für $i = 1, \ldots, n$ gilt:

1. $\hat{\nu}_i = 0: \quad \left((f_{oc}(\hat{\nu}))_i - \gamma^{st}\alpha_i \geq 0\right) \wedge \left((f_{oc}(\hat{\nu}))_i - \gamma^{st}\beta_i \leq 0\right),$
2. $\hat{\nu}_i \neq 0: \quad (f_d(\hat{\nu}, c(\hat{\nu})))_i = 0.$

[334] Hierbei ist die Matrix $(\sigma\sigma')^{-1}$ wegen $[(\sigma\sigma')^{-1}]' = [(\sigma\sigma')']^{-1} = (\sigma\sigma')^{-1}$ symmetrisch.

[335] Dieser Fall wird in *Cvitanić/Karatzas* (1992), S. 798 f., behandelt; mit Blick auf den mehrdimensionalen Fall heißt es dort: „The situation is more complicated in several dimensions". Lediglich für ein spezielles Beispiel zu $n = 2$ wird noch die konkrete Lösung angegeben. Insofern ist für $n \geq 2$ keine (einfache) analytische Lösung zu erwarten.

Die Abbruchbedingung entspricht einer Anwendung der *Kuhn-Tucker*-Optimalitätsbedingungen zu 2^n Optimierungsproblemen, deren jedes eine Minimierung der (Ziel-)Funktion $f(\nu, \bar{c})$ auf einem Orthanten des $\mathbb{R}^n$ und einer Ausprägung des Vektors $\bar{c}$ dergestalt, dass $\bar{c}_i = \alpha_i$, wenn $\nu_i \geq 0$, und $\bar{c}_i = \beta_i$, wenn $\nu_i \leq 0$ betrachtet werden, beinhaltet. Zur Verdeutlichung sei ein solches (Teil-)Problem dargestellt. O.B.d.A. werde dabei von $\bar{c}_i = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, l$, sowie von $\bar{c}_j = \beta_j$, $j = l+1, \ldots, n$, ausgegangen, so dass das folgende nichtlineare, konvexe Optimierungsproblem betrachtet wird:

$$\begin{array}{llcl} \min & \bar{f}(\nu) := f(\nu, \bar{c}) & = & -\gamma^{st} \left(\sum\limits_{i=1}^{l} \nu_i \alpha_i + \sum\limits_{i=l+1}^{n} \nu_i \beta_i \right) \\ & & & + \frac{1}{2} \parallel \theta \parallel^2 + \theta' \sigma^{-1} \nu + \frac{1}{2} \nu' (\sigma \sigma')^{-1} \nu \\ \text{unter} & -\nu_i & \leq & 0, \quad i = 1, \ldots, l, \\ & \nu_i & \leq & 0, \quad i = l+1, \ldots, n. \end{array}$$

Mit den Lagrange-Multiplikatoren μ_i $(i = 1, \ldots, n)$, zusammengefasst im Vektor μ, kann die Lagrange-Funktion gebildet werden als:

$$L(\nu, \mu) = \bar{f}(\nu) + \sum_{i=1}^{l} \mu_i(-\nu_i) + \sum_{i=l+1}^{n} \mu_i \nu_i.$$

Hieraus ergeben sich die folgenden (notwendigen und hinreichenden) *Karush-Kuhn-Tucker*-Optimalitätsbedingungen für den optimalen Argumentvektor $\hat{\nu}$:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \nu_i}(\hat{\nu}) - \mu_i = 0, \quad i = 1, \ldots, l, \tag{3.63}$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \nu_i}(\hat{\nu}) + \mu_i = 0, \quad i = l+1, \ldots, n, \tag{3.64}$$

$$-\hat{\nu}_i \leq 0, \quad i = 1, \ldots, l, \tag{3.65}$$

$$\hat{\nu}_i \leq 0, \quad i = l+1, \ldots, n, \tag{3.66}$$

$$\mu_i(-\hat{\nu}_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, l, \tag{3.67}$$

$$\mu_i \hat{\nu}_i = 0, \quad i = l+1, \ldots, n, \tag{3.68}$$

$$\mu_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.69}$$

Ergibt sich nun in der Komponente r ein „Randoptimum“ $\hat{\nu}_r = 0$, so gilt für

- $r \in \{1, \ldots, l\}$ aus der zugehörigen Gleichung des Systems (3.63):

$$\begin{array}{rcccl} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \nu_r}(\hat{\nu}) & = & \mu_r & \geq & 0 \\ \Leftrightarrow \quad (f_{oc}(\hat{\nu}))_r - \gamma^{st} \alpha_r & = & \mu_r & \geq & 0, \end{array}$$

- $r \in \{l+1, \ldots, n\}$ aus der entsprechenden Gleichung des Systems (3.64):

$$\begin{array}{rcccl} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \nu_r}(\hat{\nu}) & = & -\mu_r & \leq & 0 \\ \Leftrightarrow \quad (f_{oc}(\hat{\nu}))_r - \gamma^{st} \beta_r & = & -\mu_r & \leq & 0. \end{array}$$

Erweist sich jedoch ein $\hat{\nu}$ als optimal, für das $\hat{\nu}_r \neq 0$ gilt und sich somit bezüglich dieser Komponente ein „Binnenoptimum" ergibt, folgt aus der entsprechenden Gleichung eines der Systeme (3.67) bzw. (3.68) $\mu_r = 0$ und wegen der zugehörigen Gleichung des Systems (3.63) bzw. (3.64) auch $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \nu_r}(\hat{\nu}) = 0$, was bei $\hat{\nu}_r \neq 0$ äquivalent ist zu $(f_d(\hat{\nu}, c(\hat{\nu})))_r = 0$. Folglich spiegeln sich die Optimalitätsbedingungen eines (Teil-)Optimierungsproblems zu einem spezifischen Vektor $\bar{c}$ bzw. dem zugehörigen Orthanten des $\mathbb{R}^n$ für die betrachteten Schattenpreise im Fall einer Randlösung bezüglich einer Komponente im ersten Teil der Abbruchbedingung und im anderen Fall durch deren zweiten Teil wider. Um über eine solche Teil-Problem-Lösung zu einer *Lösung des Gesamtproblems* zu kommen, muss in den Koordinaten, in denen sich für eines dieser Probleme eine Randlösung einstellt ($\hat{\nu}_i = 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$), dieser (Komponenten-)Wert auch das Minimum des Problems zum „gegenüberliegenden" Orthanten[336] kennzeichnen. Abstiegsrichtungen dürfen von dort nur jeweils aus dem Orthanten herausführen; sonst handelt es sich nicht um das gesuchte globale Minimum. Dies ist Inhalt des gesamten ersten Teiles der Abbruchbedingung: Bei einem Wert $\hat{\nu}_i = 0$ im Optimum muss die rechtsseitige Ableitung, also die Richtung des steilsten Anstiegs im Bereich $\nu_i \geq 0$ nach innen weisen, d.h. positiv (nicht-negativ) sein. Ebenso muss die linksseitige Ableitung für $\nu_i \leq 0$ — gemäß der sich beim komplementären Teil-Optimierungsproblem ergebenden Bedingung für ein Randoptimum — in die negative (nicht-positive) Richtung weisen. Der zweite Teil der Abbruchbedingung beschreibt Binnenoptima in Bezug auf einzelne Komponenten gemäß den wiedergegebenen Optimalitätsbedingungen eines jeden Teilproblems, mithin auch desjenigen mit dem globalen Minimum. Um die Bedingung $(f_d(\hat{\nu}, c(\hat{\nu})))_i = 0$ zu erfüllen, muss die rechte Seite der Definitionsgleichung (3.61) mit einem Paar $(\hat{\nu}, c(\hat{\nu}))$ null sein. Der zweite Teil der Abbruchbedingung kann deshalb wie folgt formuliert werden:

$$2.' \quad \hat{\nu}_i \neq 0: \quad (\nabla f(\hat{\nu}, \bar{c}))_i = 0 \ \wedge \ (\bar{c}_i = \alpha_i \ \vee \ \bar{c}_i = \beta_i) \\ \wedge \ (\hat{\nu}_i \bar{c}_i < 0 \ \vee \ (\hat{\nu}_i > 0 \ \wedge \ \bar{c}_i = \alpha_i = 0) \ \vee \ (\hat{\nu}_i < 0 \ \wedge \ \bar{c}_i = \beta_i = 0)).$$

Der *Algorithmus* $\mathcal{A}1$ zur Bestimmung der Ausprägung eines optimalen Schattenpreisprozesses für einen gegebenen Zeitpunkt gemäß Gl. (3.60) kann in einer programmiernahen Formulierung nun wie folgt beschrieben werden:

1. *Initialisierung*:
   Betrachte die Potenzmenge $\mathbb{P}(.)$ zur Menge $\{1, \ldots, n\}$ als geordnete Menge mit den Elementen $S_1, \ldots, S_{2^n}$, wobei $S_{2^n} = \emptyset$ sein soll: $\mathbb{P}(\{1, \ldots, n\}) = \{S_1, \ldots, S_{2^n}\}$.
   Setze $k := 0$.
   Weiter mit Schritt 2.

2. *Äußere Schleife*:
   Setze $k := k + 1$.
   Setze $\bar{S}_k := \{1, \ldots, n\} \setminus S_k$.

[336] Galt zunächst $\nu_i \geq (\leq)\, 0$ für i aus $\{1, \ldots, n\}$, so ist dieser Orthant durch dieselben Bedingungen für ν_j, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq i$, und durch $\nu_i \leq (\geq) 0$ charakterisiert.

Sei $\nu \in \mathbb{R}^n$ ein Variablenvektor.
Setze $\nu_i := 0, \ \forall i \in \bar{S}_k$.
(S_k und $\bar{S}_k$ bilden eine verlustfreie Zerlegung der Indexmenge $\{1, \ldots, n\}$ mit der Bedeutung, dass, bezogen auf die gerade zu betrachtende Konstellation, die Elemente in S_k die Indizes derjenigen Komponenten mit nicht verschwindendem Schattenpreis, die Elemente von $\bar{S}_k$ entsprechend die Indizes repräsentieren, für welche $\nu_i = 0$ gilt.)
Sei $M := \{(\bar{c}_{i_1}, \ldots, \bar{c}_{i_{l_k}})' \mid \bar{c}_{i_r} = \alpha_{i_r} \vee \bar{c}_{i_r} = \beta_{i_r}, i_r \in S_k, r = 1, \ldots, l_k, i_{r_1} \neq i_{r_2}, r_1, r_2 \in \{1, \ldots, l_k\}, r_1 \neq r_2\}$ die Menge, deren Elemente als Vektoren jeweils eine Kombination von Ober- bzw. Untergrenzen für die Anteile der einzelnen Aktien im Portfolio-Prozess repräsentieren, wobei für diese Anteile in diesem Schritt ein nicht verschwindender Schattenpreis unterstellt wird. M sei eine geordnete Menge, die sich darstellen lässt als: $M = \{\bar{c}_1^{S_k}, \ldots, \bar{c}_{2^{l_k}}^{S_k}\}$. ($l_k$ steht für die Mächtigkeit der Menge S_k.)
Setze $m := 0$ und gehe zu Schritt 3.

3. *Innere Schleife*:
Setze $m := m + 1$.
Löse das Gleichungssystem: $(\nabla(f(\nu, \bar{c}_m^{S_k}))_i = 0, \ \forall i \in S_k$, wobei gemäß Schritt 2 die Komponenten ν_j mit $j \in \bar{S}_k$ als gleich null vorauszusetzen sind. (Im Falle $l_k = 0$ sind weder eine einzelne Gleichung noch ein Gleichungssystem zu lösen.)
Für das so ermittelte ν ist die Abbruchbedingung zu überprüfen:
Berechne hierzu den Wert der Funktion $f_{oc}(\nu)$.
Ermittle den Wert der folgenden boolschen Variablen — entsprechend den Teilen 1 und $2'$ der Abbruchbedingung:
$$\begin{aligned} \mathit{bool} \quad := \quad & \bigwedge_{i \in \bar{S}_k} \Big(\big((f_{oc}(\nu))_i - \gamma^{st}\alpha_i \geq 0 \big) \ \wedge \ \big((f_{oc}(\nu))_i - \gamma^{st}\beta_i \leq 0 \big) \Big) \\ & \wedge \bigwedge_{i \in S_k} \Big(\nu_i (\bar{c}_m^{S_k})_i < 0 \ \vee \ (\nu_i > 0 \ \wedge \ (\bar{c}_m^{S_k})_i = \alpha_i = 0) \\ & \vee \ (\nu_i < 0 \ \wedge \ (\bar{c}_m^{S_k})_i = \beta_i = 0) \Big) \, . \end{aligned}$$
Falls
- *bool*: Gehe zu Schritt 4 (*Ende*). (*bool* hat den Wert „wahr", was bedeutet, dass die Abbruchbedingung erfüllt, also ein minimierender Schattenpreisvektor gefunden wurde.)
- $m < 2^{l_k}$: Wiederhole Schritt 3, die *innere Schleife*, von Beginn an.
- $m = 2^{l_k}$: Gehe zu Schritt 2 (*äußere Schleife*). (Die in der inneren Schleife betrachtete Zerlegung der Indexmenge in die Menge nicht verschwindender (S_k) und verschwindender Komponenten ($\bar{S}_k$) des Schattenpreisvektors ist für das Minimum nicht zutreffend.)
[Eine Abbruchbedingung, welche an der Bedingung $k > 2^n$ ansetzt, ist nicht vonnöten, da ein Minimum vorliegt und gefunden wird.]

4. *Ende*:
Der das Abbruchkriterium erfüllende Schattenpreisvektor minimiert die Zielfunktion: $\hat{\nu} := \nu$.

Durch den vorliegenden Algorithmus werden sämtliche Indexmengenkombinationen für die mit null und die mit nicht verschwindenden Werten zu belegenden Komponenten überprüft. Für jede dieser Kombinationen werden wiederum Fallunterscheidungen dergestalt vorgenommen, dass für die jeweils betrachtete Menge nicht verschwindender Komponenten sämtliche sich aus positiver oder negativer Belegung der zugehörigen Variablen ergebenden Kombinationen untersucht werden, indem hierfür ein Gleichungssystem gelöst und daraufhin die Abbruchbedingung ausgewertet wird. Der Algorithmus bricht ab, sobald bei einem der bisher genannten Schritte das Optimum gefunden wurde.

Aus dieser kurzen Charakterisierung lässt sich bereits unmittelbar ersehen, dass das Verfahren im Maximalfall, d.h. wenn sämtliche Fallunterscheidungen abzuarbeiten sind, ein ungünstiges, in jedem Fall nicht polynomiales Laufzeitverhalten hat. Dies überträgt sich auch auf das Laufzeitmittel, da a priori keine Präferenz für eine Nullstellen/Nicht-Nullstellen-Kombination angegeben werden kann. Bei einer iterativen Anwendung des Algorithmus', welche sich daraus ergibt, dass im Rahmen einer Implementierung nach jedem in seiner Länge festzusetzenden Zeitintervall ${}_{\triangle}t$ der Schattenpreisvektor zur Bestimmung des optimalen Portfolio-Prozesses $p^{st}_{KE,\hat{\nu}}(.)$ gemäß Gl. (3.46) bzw. (3.57) aufs Neue zu berechnen ist, kann zumindest intuitiv der Rechenaufwand durch die Reihenfolge der Auswertung reduziert werden, indem der jeweils zuletzt ermittelte Schattenpreisvektor zuerst untersucht wird. Ändern sich innerhalb von ${}_{\triangle}t$ die Knappheitsverhältnisse grundsätzlich nicht, muss auch der Schattenpreisvektor unverändert bleiben. Eine in dieser Weise ausgerichtete Anwendung des Algorithmus' müsste auf eine geeignete Reihenfolge in der geordneten Potenzmenge des Schrittes 1 und in der Belegung des Vektors $\bar{c}$ in Schritt 2 abstellen.

Eine Implementierung des beschriebenen Algorithmus findet sich im Maple-Programm des Anhangs 5.5.1, eingeordnet in eine übergreifende Simulation. Darin bleibt allerdings der letztgenannte, das Laufzeitverhalten vermutlich verbessernde Aspekt noch unberücksichtigt[337].

Als zweiter Restriktionentyp, für den ein Algorithmus zur Berechnung des optimalen Schattenpreisprozesses $\hat{\nu}(.)$ angegeben werden soll, wird im Folgenden die *Beschränkung des Verschuldungsgrades bei einem Verbot von Aktienleerverkäufen* betrachtet. Gemäß dem Ergebnis aus *Abschnitt 3.2* ist dieser Restriktionentyp gekennzeichnet durch:

$$K = \{p \in \mathbb{R}^n_+ \ \mid \ \sum_{i=1}^{n} p_i \leq \kappa\} \text{ mit } \kappa \geq 1, \text{ sowie } \tilde{K} = \mathbb{R}^n.$$

[337] Der Algorithmus zur Bestimmung eines Schattenpreisvektors für gegebene Parameter b, δ, σ und r ist darin unter der Prozedur *optimierung* in den (Sub-)Prozeduren *defin* (Initialisierung), *mengengen* (Initialisierung und äußere Schleife) und g (äußere und innere Schleife) wiederzufinden.

Darüber hinaus gilt Gl. (3.6), welche die folgende Gestalt hat:

$$\zeta(\nu) \quad = \quad -\kappa \min_{i\in\{1,\dots,n\}}[0,\nu_i] \; \geq 0.$$

Der nach Gl. (3.45) bei gegebenen Parameterausprägungen $\sigma(t), b(t), \delta(t), r(t)$ und st in einem Zeitpunkt $t \in [0,T]$ im Hinblick auf den Wert des Schattenpreisprozesses für diesen Zeitpunkt zu minimierende Ausdruck lautet (unter Vernachlässigung des Zeitindex'):

$$g(\nu) := \gamma^{st}\zeta(\nu)+\frac{1}{2} \parallel \theta_\nu \parallel^2 = -\gamma^{st}\kappa \min_{i\in\{1,\dots,n\}}[0,\nu_i]+\frac{1}{2} \parallel \theta \parallel^2 +\theta'\sigma^{-1}\nu+\frac{1}{2}\nu'(\sigma\sigma')^{-1}\nu. \tag{3.70}$$

Das zugehörige Optimierungsproblem werde mit (P_g) bezeichnet und ist gegeben durch:

$$g(\hat{\nu}) := \min_{\nu\in\mathbb{R}^n} g(\nu).$$

Da die Minimum-Funktion konkav ist, ist die Funktion $-\min[0,.]$ konvex und folglich auch die gesamte Funktion $g(.)$. Es handelt sich bei der Minimierung der Funktion $g(.)$ nach dem Vektor ν somit (abermals) um ein konvexes Optimierungsproblem. Aufgrund des quadratischen Terms existiert darüber hinaus nur ein globales Minimum der Funktion $g(.)$.

Offenkundig liegt die Schwierigkeit bei der Bestimmung einer Minimalstelle in dem Summanden der rechten Seite von Gl. (3.70), der die Minimum-Funktion enthält. Dadurch entsteht ein komplexes Minimierungsproblem, welches durch Zerlegung in Teilprobleme gelöst werden kann. Die Teilprobleme grenzen sich dadurch voneinander ab, dass jeweils eine spezifische Komponente des Vektors ν als Wert der Minimum-Funktion betrachtet wird und über sukzessive Lösung aller dergestalt formulierten Teil-Minimierungsprobleme das (globale) Minimum so lange gesucht wird, bis es gefunden ist. Dies ist der Inhalt des nachfolgend beschriebenen Algorithmus' zur Bestimmung des Minimums der Funktion $g(.)$. Der Algorithmus wird zunächst wiederum programmiernah formuliert und anschließend wird die Abbruchbedingung erläutert; hierfür ist zugleich die Formalisierung eines der angesprochenen Teilprobleme (P_k) vorzunehmen, so dass zu seiner algorithmischen Lösung die nachfolgenden Ausführungen heranzuziehen sind.

Der *Algorithmus* $\mathcal{A}2$ zur Bestimmung der Ausprägung eines optimalen Schattenpreisprozesses für einen gegebenen, nicht spezifizierten Zeitpunkt (aus $[0,T]$)[338] lautet:

1. *Test auf (echt) positiven, optimalen Schattenpreisvektor*:
   Löse das Gleichungssystem:

$$\nabla g_o(\nu) = \mathbf{0}_n,$$

[338] Die Situation des Planungshorizontes soll, wie bisher implizit bereits geschehen, nicht eigens betrachtet werden.

wobei $g_o(\nu) := \frac{1}{2} \parallel \theta \parallel^2 + \theta'\sigma^{-1}\nu + \frac{1}{2}\nu'(\sigma\sigma')^{-1}\nu$, so dass $\nabla g_o(\nu) = (\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1}\nu$[339].
Es sei $\bar{\nu}$ der das Gleichungssystem lösende Schattenpreisvektor.
Gilt $\bar{\nu} > \mathbf{0}_n$, dann gehe zu Schritt 4 (Lösung ist gefunden), andernfalls fahre mit Schritt 2 fort.

2. *Initialisierung*:
   Betrachte die Elemente der geordneten Indexmenge $M := \{1, 2, \ldots, n\}$, setze $z := 0$ und gehe zu Schritt 3.

3. *Schleife*:
   Setze $z := z + 1$.
   Suche ein Vektorpaar (x^z, μ^z), welches das folgende Bedingungssystem erfüllt:

$$\mu_z^z = \mathbf{1}_n' \left((\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1}(x^z - \mathbf{1}_n x_z^z - (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{z}, 0, \ldots, 0)' x_z^z) \right) + \gamma^{st}\kappa, \tag{3.71}$$

$$\mu_k^z = \left[(\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1}(x^z - \mathbf{1}_n x_z^z - (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{z}, 0, \ldots, 0)' x_z^z) \right]_k, \quad k = 1, \ldots, n, k \neq z, \tag{3.72}$$

$$0 \leq x_k^z, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{3.73}$$

$$0 = \mu_k^z x_k^z, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{3.74}$$

$$0 \leq \mu_k^z, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.75}$$

   Setze

$$\bar{\nu} := x^z - \mathbf{1}_n x_z^z - (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{z}, 0, \ldots, 0)' x_z^z$$

   und

$$p_{opt}^z := (\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1}\bar{\nu}.$$

   Sind die Bedingungen:

$$p_{opt,i}^z \geq 0 \; (i = 1, 2, \ldots, n) \; \wedge \; \kappa \geq \sum_{i=1}^{n} p_{opt,i}^z, \tag{3.76}$$

   - erfüllt, dann gehe zu Schritt 4;
   - nicht erfüllt, dann beginne diesen Schritt (Schleife) von Neuem.

4. *Ende*:
   Erfolgt bereits in Schritt 1 ein Abbruch, dann ist der optimale Schattenpreis durch $\hat{\nu} = \bar{\nu}$ gegeben und für den zugehörigen Portfolio-Prozess ergibt sich aus dem Vergleich von $\nabla g_o(.)$ mit Gl. (3.46) bzw. (3.57):

[339] $\nabla g_o(.)$ entspricht somit der Funktion $f_{oc}(.)$ des Optimierungsproblems zum vorausgehend betrachteten Restriktionentyp.

$p^{st}_{KE,\hat{\nu}} = \frac{1}{\gamma^{st}} \nabla g_o(\hat{\nu})$.

Wird das Ende aus Schritt 3 erreicht, bedeutet nunmehr die Erfüllung der Bedingung (3.76), dass der gesuchte Schattenpreisprozess gefunden wurde: $\hat{\nu} = \bar{\nu}$. Zugleich ist der ermittelte Portfolio-Prozess p^z_{opt} zu realisieren, d.h. es gilt für die zum betrachteten Zeitpunkt gehörende Ausprägung des optimalen Portfolio-Prozesses der Gl. (3.46) bzw. (3.57): $p^{st}_{KE,\hat{\nu}} = p^z_{opt}$.

Im Algorithmus zur Ermittlung eines Minimums der Funktion $g(.)$ wird danach differenziert, ob eine (echt) positive Lösung $\hat{\nu} > 0$ für den Schattenpreisvektor besteht (Schritt 1) — in diesem Fall nimmt die Funktion $\min_{i \in \{1,\ldots,n\}} [0, \nu_i]$ den Wert null an — oder ob ein $\hat{\nu}$ mit $\hat{\nu}_i \leq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ optimal ist. Dieser Fall ist aufwendiger und erfordert sukzessive die Lösung von Bedingungssystemen der Gestalt (3.71)-(3.75), welche sich in einer ausgezeichneten Komponente $z \in \{1, \ldots, n\}$ unterscheiden. Für gegebenes z kann ein solches Bedingungssystem dergestalt gelöst werden, dass so lange verschiedene Kombinationen von verschwindenden Komponenten ($x^z_i = 0, \forall i \in \mathcal{I} \in \mathbb{P}(\{1, \ldots, n\})$) untersucht werden, bis eine zulässige Lösung gefunden wird. Dies bedeutet, dass die Werte der nicht verschwindenden Komponenten ($j \in \tilde{\mathcal{I}} := \{1, \ldots, n\} \setminus \mathcal{I}$) die diesen zuzuordnenden Gleichungen aus dem System (3.71)-(3.72) — wegen Gleichungssystem (3.74) ist $\mu^z_j = 0, \forall j \in \tilde{\mathcal{I}}$ — lösen müssen und zugleich nicht negativ sein dürfen. Ist für gegebenes z eine Lösung für das Bedingungssystem gefunden, liegt zugleich ein Kandidat für den gesuchten optimalen Schattenpreisvektor vor. Dieser wird durch die Zuweisung in Schritt 3 mit $\bar{\nu}$ bezeichnet. Er führt unmittelbar zu einem Kandidaten(vektor) (p^z_{opt}) für die Ausprägung des optimalen Portfolio-Prozesses der Gl. (3.46) bzw. (3.57) im Betrachtungszeitpunkt t ($p^{st}_{KE,\hat{\nu}}(t)$). Erfüllt p^z_{opt} die Bedingungen (3.76), ist der optimale Portfolio-Vektor gefunden. Ein solcher existiert auf dem kompakten Raum der die Restriktion erfüllenden Portfolio-Prozesse stets. Er wird durch den Algorithmus identifiziert. Bis zu diesem Punkt ist allerdings insbesondere das Zustandekommen der Abbruchbedingung in Schritt 3 noch unerklärt geblieben, mithin ist die Richtigkeit des Algorithmus' noch nicht nachgewiesen.

Ein *Nachweis der Optimalität des durch den Algorithmus bestimmten Schattenpreis- und des Beteiligungsvektors* wird in Anhang 5.4 gegeben. Daraus wird ersichtlich, dass das Bedingungssystem (3.71)-(3.75) Optimalitätsbedingungen zu einem (Teil-)Optimierungsproblem, welches als $(P_{\bar{z}})$ bezeichnet werden soll, repräsentiert. Die zu untersuchenden (Teil-)Optimierungsprobleme $(P_z)\,(z = 1, \ldots, n)$ sind so konzipiert, dass das im Rahmen des übergeordneten Problems (P_g) gesuchte Minimum auch Minimum eines solchen (Teil-) Problems ist und über die Abbruchbedingung als globales Minimum identifiziert wird.

Damit ist die auf der Martingalmethode basierende dynamische Portfolio-Optimierung auf unvollständigen Kapitalmärkten in ihrer grundsätzlichen

Struktur dargestellt und um Elemente erweitert worden, welche die Einführung des Steuersystems $\mathcal{S}$ sowie spezielle Restriktionen umfassen. Letztere wurden dergestalt operationalisiert, dass eine unmittelbare Implementierung möglich ist. Im nachfolgenden Abschnitt wird ein Problem der Investitionsrechnung behandelt, welchem eine dynamische Restriktionenformulierung zugrunde liegt. Ein zu dessen Lösung vorgestellter myopischer Ansatz greift zum Teil auf den Algorithmus $\mathcal{A}1$ zurück und bildet insofern eine Ergänzung zu den vorausgehenden Ausführungen.

3.3.2.3 Myopisch optimierende Investitionsrechnung bei exogen begrenzter Verfügbarkeit des Investitionsobjektes

Gegenstand der folgenden Überlegungen ist ein Entscheidungsproblem, welches primär wie folgt zu interpretieren ist: Im Kontext der Konzernstrukturierung ist die Frage zu beantworten, welche Beteiligungsquote die Konzernholding unter am (Geld-)Nutzen orientierten Erwägungen an den einzelnen Konzerntöchtern halten soll. Das Entscheidungsfeld kann grob durch Investitionsobjekte, als welche die Konzerntöchter zu interpretieren sind, umrissen werden, deren Wertverlauf im einfachsten Fall jeweils durch eine geometrisch Brown'sche Bewegung auf Basis mehrerer Unsicherheitsquellen repräsentiert wird. Allgemein wird der Wert eines jeden Investitionsobjektes durch (genau) eine objektspezifische Unsicherheitsquelle beeinflusst, die am (Kapital-)Markt nicht gehandelt wird, so dass diesbezüglich von einem unvollständigen Kapitalmarkt i.e.S. auszugehen ist. Die übrigen Unsicherheitsquellen können durch beliebig handelbare Kapitalmarktpapiere vollständig gehedgt werden. Restriktiv wirkt darüber hinaus die Größe des Investitionsobjektes, so dass eine Beteiligungsquote zwischen null und eins am Eigenkapital der Tochter zu wählen ist — gegebenenfalls ist auf ein reelles Vielfaches des Tochter-Eigenkapitals abzustellen, sofern eine Kapitalerhöhung als möglich erachtet wird. Es wird sowohl eine beliebige Wahl der Beteiligungsquote innerhalb des durch die Unter- und die Obergrenze bestimmten Intervalles („Intervall-Fall“) als auch die Situation betrachtet, dass alternativ zur Nicht-Beteiligung an einem (potentiellen) Tochterunternehmen lediglich eine über den Planungszeitraum hinweg konstante Beteiligungsquote gehalten werden kann („0-1-Fall“). Im ersten Fall ist daran zu denken, dass ein liquider Sekundärmarkt für die Beteiligungsansprüche an der Tochter existiert; im zweiten Fall kann die Fixierung der Beteiligungsquote entsprechend auf einem illiquiden Markt in diesem Anspruch, insbesondere bei Nicht-Existenz einer Börsennotierung des Titels, beruhen. Im Unterschied zu den bisher betrachteten Beschränkungen für den Portfolio-Prozess ist die Restriktion hier nicht in den persönlichen Verhältnissen des Investors, welcher der Konzernmutter bzw. ihrem/n Eigentümer/n entspricht, begründet, sie bezieht sich vielmehr auf die exogen vorgegebene begrenzte Verfügbarkeit des Investitionsobjektes selbst. Der maximal in eine Beteiligung investierbare Betrag ist durch den aktuellen Wert der Tochter und nicht durch das dem Investor zur Verfügung stehende Vermögen bestimmt. In Bezug auf den Portfolio-Prozess (in Relativbeträgen) bedeutet dies, dass sich die Restriktion dynamisch und stochastisch mit dem Wert des Tochterunternehmens entwickelt. Dies hat zur Konsequenz, dass die auf der Martingalmethode basierende dynamische Portfolio-Optimierung auf unvollständigen Kapitalmärkten nicht (ohne weiteres) anwendbar ist. Tatsächlich existiert gegenwärtig noch keine exakte Lösung für das gerade beschriebene Auswahlproblem, so dass im Folgenden lediglich eine heuristische Lösung angeboten wird, die auf einer myopischen Portfolio-Optimierung basiert.

Als Optimierungsziel wird von einer Maximierung des Erwartungsnutzens aus dem Endvermögen des Investors ausgegangen (*Endvermögensoptimierung*). Als Nutzenfunktionen werden logarithmische sowie solche des „power type" zugrunde gelegt. Hierbei ist zuzugeben, dass die Zugrundelegung des Bernoulli-Prinzips bei mehreren Eigentümern entscheidungstheoretisch nicht fundiert ist, da eine Aggregation der Nutzen über mehrere Individuen im Grundsatz nicht möglich ist[340]. Insofern ist ein Allein-Eigentümer des Konzerns zu unterstellen, wenn man sich nicht damit begnügt, durch den Ansatz einer Risikoaversion widerspiegelnden Nutzenfunktion lediglich ein „vorsichtiges Investitionsverhalten" zu generieren. Denkbar ist aus einer der Praxis angelehnten Sicht allerdings auch, dass die Konzernstrukturierung von einer beauftragten Konzernleitung (Management) vorgenommen wird, deren Einkommenstrom proportional mit dem Endvermögen des Konzerns verbunden ist und die faktisch autonom handeln kann. Alternativ zur Interpretation als Problem der Konzernstrukturierung kann die behandelte Situation auch als Problem der Zusammenstellung eines optimalen Investitionsprogrammes innerhalb eines einzelnen Unternehmens betrachtet werden, sofern die Investitionsprojekte die hier unterstellten Risikocharakteristika aufweisen und entsprechende Durchführungsbeschränkungen gegeben sind. Darüber hinaus kann auch die Unterstellung einer „reinen" Konzern*holding* zugunsten eines Mutterunternehmens mit eigenem Sachinvestitionsprogramm modifiziert werden. In diesem Fall wären von einem außenstehenden Investor die Beteiligungsquoten an sämtlichen (Konzern-)Unternehmen, einschließlich des „Mutterunternehmens", zu bestimmen.

Ziel dieses Abschnittes ist die Präsentation eines Vorschlages zur möglichen Handhabung des Problems der Konzernstrukturierung und die ergänzende Beschreibung und Implementierung dieses Vorschlages für spezielle Fälle im Grundsatz. Dabei auftretende ökonometrisch zu behandelnde Sachverhalte der Kalibrierung des Modells sind nicht Gegenstand der folgenden Betrachtungen. Des Weiteren sollen hinsichtlich der Ausgestaltung einzelner Komponenten der Simulation Hinweise auf weiterführendes Schrifttum genügen; dies gilt ebenso für die Frage nach der Konvergenz des Simulationsergebnis-

[340] Vgl. den Hinweis in Fn. 301, S. 150.

ses[341]. Die bislang verbal beschriebene Problemstellung wird im Folgenden formalisiert.

Spezifikation des Problems ($\mathcal{P}_{KS}$):

- Der betrachtete Markt aus Sicht der Konzernholding kann durch einen risikolosen Bond sowie $n = n_1 + n_2$ riskante Wertpapiere beschrieben werden[342]. Die Wertpapiere $1, \ldots, n_1$ repräsentieren jeweils den Anspruch auf das Eigenkapital einer Tochter. Die Wertpapiere $n_1 + 1, \ldots, n$ seien beliebig handelbare Finanzinstrumente. Für $t \in [0, T]$ gilt dann:

  Die Wertentwicklungen der riskanten Wertpapiere sind für $t \in [0, T]$ durch die folgenden stochastischen Differentialgleichungen:

$$
\begin{aligned}
dS_1(t) &= S_1(t)(b_1(t)\,dt + \sigma_{11}(t)\,dW_1(t) + \ldots + \sigma_{1,n_2}(t)\,dW_{n_2}(t) \\
&\qquad\qquad + \sigma_{1,n_2+1}(t)\,dW_{n_2+1}(t)) \\
&\vdots \\
dS_{n_1}(t) &= S_{n_1}(t)(b_{n_1}(t)\,dt + \sigma_{n_1,1}(t)\,dW_1(t) + \ldots + \sigma_{n_1,n_2}(t)\,dW_{n_2}(t) \\
&\qquad\qquad + \sigma_{n_1,n_2+n_1}(t)\,dW_{n_2+n_1}(t)) \\
dS_{n_1+1}(t) &= S_{n_1+1}(t)(b_{n_1+1}(t)\,dt + \sigma_{n_1+1,1}(t)\,dW_1(t)) \\
&\vdots \\
dS_{n_1+n_2}(t) &= S_{n_1+n_2}(t)(b_{n_1+n_2}(t)\,dt + \sigma_{n_1+n_2,n_2}(t)\,dW_{n_2}(t))
\end{aligned}
$$

  mit den Anfangswerten $S_i(0) = S_{i,0}, i = 1, \ldots, n$, beschrieben.

  Ferner existiert ein risikoloser Bond, für den $dS_0(t) = S_0(t) r(t)\,dt$ mit Anfangswert $S_0(0) = 1$ gilt.

  Die folgende Beschreibung beschränkt sich auf *deterministische Parameterprozesse*[343]. Aus obigem Gleichungssystem ergibt sich $\sigma(t) = (\sigma_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}(t)$ mit $\sigma_{n_1+i,j}(t) = 0, i, j = 1, \ldots, n_2, i \neq j$, sowie $\sigma_{i,n_2+j}(t) = 0, i, j = 1, \ldots, n_1, i \neq j$, wobei $\sigma(.)$ stets regulär sei. Zur späteren Vereinfachung werden die Teilmatrizen $\bar{\sigma}(t), \sigma^{d_1}(t), \sigma^{d_2}(t)$ eingeführt. Mit $0_{i,j}$ als $i \times j$-Matrix, deren Einträge sämtlich null sind, wird gesetzt:

$$
\sigma(t) = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}(t) & \sigma^{d_2}(t) \\ \sigma^{d_1}(t) & 0_{n_2,n_1} \end{pmatrix}. \tag{3.77}
$$

[341] Da die Simulation in Anlehnung an das Vorgehen in *Korn/Korn* (1999), S. 203 ff., formuliert wird, sei auf die dortigen Anmerkungen zur Konvergenzfrage verwiesen.

[342] Die Kennzeichnung als „Wertpapiere" dient der sprachlichen Vereinfachung und erstreckt sich auch auf die Fälle der Nicht-Verbriefung der Ansprüche.

[343] Da die zu beschreibende heuristische Vorgehensweise ohnehin lediglich auf jeweils „aktuellen" Ausprägungen von Prozesswerten basiert, könnten auch stochastisch sich entwickelnde, geeignet messbare Parameterprozesse berücksichtigt werden. Auf die hierbei ggf. notwendige Ergänzung des Vorgehens, bspw. durch ergänzende Simulation von Ausprägungen der Parameterwerte, soll hier jedoch nicht eingegangen werden. Aus anwendungsbezogener Sicht erscheint demgegenüber eine weitere Vereinfachung durch konstante Parameterprozesse nahe liegend, wie sie dem hier vorgestellten Implementierungsvorschlag zugrunde liegt.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

$\bar{\sigma}(t)$ stellt eine $n_1 \times n_2$-Matrix dar, während $\sigma^{d_1}(t)$ und $\sigma^{d_2}(t)$ n_2- bzw. n_1- Diagonalmatrizen repräsentieren. Hinsichtlich der Dividendenprozesse $\delta_1(t), \ldots, \delta_{n_1}(t), \delta_{n_1+1}(t), \ldots, \delta_n(t)$ wird vereinfachend unterstellt, dass sie deterministisch sind und darüber hinaus die vollständig gehandelten Wertpapiere keine Ausschüttungen aufweisen ($\delta_{n_1+1}(t) = \ldots = \delta_n(t) \equiv 0$). Die hedgebaren Marktrisiken werden durch die Wiener-Prozesse $W_1(.), \ldots, W_{n_2}(.)$, die objektspezifischen Risiken durch die Wiener-Prozesse $W_{n_2+1}(.), \ldots, W_n(.)$ abgebildet. Dabei können die objektspezifischen Risiken als normalverteilte Störterme der kontinuierlichen Wertpapierrenditen interpretiert werden. Unterstellt man bspw. konstante Parameterprozesse, können Schätzer für die Parameterwerte mit Hilfe einer Regression auf die als bekannt vorauszusetzenden Marktrisiken ermittelt werden. Liegt für ein Tochterunternehmen demgegenüber keine Historie der Wertentwicklung vor, müssen die Parameterwerte auf der Grundlage des ökonomischen Umfeldes „geschätzt“ werden.

- Das Optimierungsziel besteht in der Maximierung des Erwartungsnutzens zum Endvermögen am Planungshorizont in T durch geeignete Wahl eines restringiert zulässigen Portfolio-Prozesses; es wird hierbei von einem Konsumstrom von null ausgegangen. Das Anfangsvermögen betrage x. Entsprechend der Darstellung in *Abschnitt 3.3.2.1* ist folglich ein Portfolio-Prozess $(0, \hat{p}_E)$ gesucht, der Folgendes erfüllt:

$$\hat{p}_E(.) := \arg \max_{(0,p) \in \mathcal{A}_E(x;K(.))} E\left[U(X^{x,0,p}(T))\right],$$

wobei

$$\mathcal{A}_E(x; K(.)) := \{(c,p) \in \mathcal{A}(x; K(.)) \mid E\left[\min\left[0, U(X^{x,c,p}(T))\right]\right] > -\infty\} \quad (3.78)$$

sowie[344]

$$\mathcal{A}(x; K(.)) := \{(c,p) \in \mathcal{A}(x) \mid p(t) \in K(t),\, 0 \leq t \leq T, \text{ fast sicher}\}. \quad (3.79)$$

Die Restriktionenmenge $K(.)$ ist stochastisch; sie wird nachfolgend spezifiziert. Als Nutzenfunktionen werden $U(x) = \ln x$ bzw. $U(x) = \frac{1}{\beta}x^{\beta}$, $\beta \in (0,1)$, betrachtet, so dass insbesondere von einem risikoaversen Investor, auf den die Optimierung auszurichten ist, ausgegangen wird.

- Für die Anzahlen $\varphi_i(t)$ der von den Wertpapieren $i = 1, \ldots, n_1$ in $t \in [0,T]$ gehaltenen Stück gilt mit $\bar{\beta}_i \in \mathbb{R}$ entweder
  - $(\varphi_i(t) = 0,\ \forall t \in [0,T]) \vee (\varphi_i(t) = \bar{\beta}_i,\ \forall t \in [0,T])$ oder
  - $\varphi_i(t) \in [0, \bar{\beta}_i],\ \forall t \in [0,T]$.

Dem entsprechen die folgenden, alternativ betrachteten Restriktionenmengen bezüglich des Portfolio-Prozesses in Relativbeträgen:

[344] Zu $\mathcal{A}(x)$ vgl. S. 65.

- $K_{01}(t) = \{p(t) \mid (p_i(t) = 0, \forall t \in [0,T]) \vee (p_i(t) = \beta_i(t), \forall t \in [0,T]), i = 1,\ldots,n_1\}$ (0-1-*Fall*) bzw.
- $K_{Int}(t) = \{p(t) \mid p_i(t) \in [0, \beta_i(t)], \forall t \in [0,T], i = 1,\ldots,n_1\}$ (*Intervall-Fall*),

wobei $\beta_i(t) := \bar{\beta}_i \frac{S_i(t)}{X(t)}$, $i = 1,\ldots,n_1$, $t \in [0,T]$. Die Anzahl der vom Wertpapier $i \in \{1,\ldots,n_1\}$ gehaltenen Stücke soll einerseits nach unten durch null begrenzt sein, d.h. es besteht keine Möglichkeit des Leerverkaufs. Andererseits gibt es eine Obergrenze von $\bar{\beta}_i$ Stücken, welche über den Planungszeitraum hinweg konstant ist. Kann die Tochter (höchstens) zu 100% erworben werden, ist $\bar{\beta}_i = 1$. Bei einem geringeren maximalen Anteil ist $\bar{\beta}_i < 1$ und bei einer Ausweitungsmöglichkeit der in der betreffenden Tochter repräsentierten Investition, welche durch eine Kapitalerhöhung zu finanzieren ist, gilt $\bar{\beta}_i > 1$. Für die übrigen Wertpapiere, einschließlich des risikolosen Bonds, gelten keine Handelsbeschränkungen. Damit gilt für die beiden betrachteten Fälle[345] in $t \in [0,T]$:

- im 0-1-Fall bei $y(t) = (y_1(t),\ldots,y_{n_1}(t))' \in \times_{i=1,\ldots,n_1}\{0,\beta_i(t)\}$ gegeben:

$$\zeta_{01}(\nu) = -\sum_{i=1}^{n_1} y_i(t)\nu_i,$$

- im Intervall-Fall:

$$\zeta_{Int}(\nu(t)) = -\sum_{i=1}^{n_1} \left(\alpha_i(t)\max[0,\nu_i(t)] - \beta_i(t)\max[0,-\nu_i(t)]\right) \tag{3.80}$$

  mit $\alpha_i(.) \equiv 0\,(\forall i = 1,\ldots,n_1)$

sowie in beiden Fällen:

$$\tilde{K} = \{\nu \in \mathbb{R}^n \mid \nu_{n_1+1} = \ldots = \nu_n = 0\}.$$

Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass für das Problem $(\mathcal{P}_{KS})$ bis dato noch keine exakte Lösung vorliegt. Eine gewisse Nähe zu diesem Problem weisen Überlegungen zur optimalen Portfolio-Strategie bei einem nicht hedgebaren, exogenen Einkommensstrom, welcher einem stochastischen Prozess folgt, auf (*Duffie/Zariphopoulou* (1993), *Duffie/Fleming/Soner/Zariphopoulou* (1997)[346], *Cuoco* (1997)[347] und *Koo* (1998)). Ein solcher Einkommensstrom entsteht in der vorliegenden Situation dann, wenn die Beteiligung an einem Tochterunternehmen fixiert ist und daraus ein dem Wert der Tochter proportionaler Dividendenstrom an den Investor fließt. Die angeführten

[345] Vgl. *Abschnitt 3.2.*

[346] Zu Aspekten der numerischen Berechnung der relevanten Prozesswerte und Wertfunktionen vgl. diesbezüglich *Munk* (2000).

[347] Vgl. bereits die Hinweise in Fn. 238, S. 123.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Untersuchungen behandeln allerdings nur einen Spezialfall des hier betrachteten Marktes, indem lediglich *ein* unsicherer Einkommensstrom und außer dem risikolosen Bond noch *eine* Investitionsmöglichkeit, deren Wertverlauf ebenfalls durch einen stochastischen Prozess beschrieben wird, vorgesehen sind. Darüber hinaus befassen sich die Arbeiten mit der Entnahmeoptimierung. Die abgeleiteten Aussagen betreffen die Existenz und allgemeine Eigenschaften der Wertfunktion, die als Lösung einer *Hamilton-Jacobi-Bellman*-Gleichung charakterisiert wird und an die der zu wählende Portfolio-Prozess anknüpft. Mit der Endvermögensoptimierung (ohne Konsumentnahmen) unter der Bedingung, dass am Planungshorizont ein exogen gegebenes, stochastisches Einkommen zu dem über den Portfolio-Prozess zustande kommenden Endvermögensteil hinzukommt, setzen sich *Cvitanić/Schachermayer/Wang* (2001) auseinander. Über die Formulierung eines dualen Problems gelingt eine Beschreibung des optimalen Endvermögens sowie der Wertfunktion; allerdings fehlt eine Charakterisierung des optimalen Portfolio-Prozesses. Darüber hinaus wird eine kontinuierliche Beeinflussung des Portfolio-Prozesses durch die exogene Vermögenskomponente nicht berücksichtigt.

Nicht zuletzt mit Blick auf die angesprochenen Arbeiten scheint eine vereinfachende Lösung des Problems geboten, welche zugunsten der Implementierbarkeit auf die Optimalität des Portfolio-Prozesses verzichtet und sich begnügt, dieser nahe zu kommen. Dies wird im Folgenden durch eine *myopisch optimierende* Portfolio-Prozessgestaltung angestrebt. Darunter wird eine Optimierung des Portfolio-Prozesses verstanden, welche zu jedem Zeitpunkt vereinfachend eine Konstanz der momentanen Ausprägung der Restriktionen für den Portfolio-Prozess über den restlichen Planungszeitraum unterstellt. Zeitliche Interdependenzen, welche sich auf die Restriktionenmengen zu verschiedenen Zeitpunkten beziehen, werden hierdurch vernachlässigt.

Die myopische Optimierung kommt dadurch einer nach jedem Anpassungsintervall wiederholten Anwendung eines statischen Portfolio-Problems bis zum Planungshorizont gleich[348]. Die Äquivalenz der Heuristik zu einem statischen Problem wird später für die logarithmische Nutzenfunktion und den Intervall-Fall gezeigt werden. Im Folgenden wird die Vorgehensweise für die beiden zu betrachtenden Fälle, den Intervall- und den 0-1-Fall, beschrieben, beginnend mit dem Letztgenannten. Auf Kombinationen beider Fälle, indem bspw. hinsichtlich mancher Beteiligungen lediglich eine fixierte Beteiligungsquote vorgegeben ist, bei anderen Beteiligungen hingegen beliebige Beteiligungsquoten zwischen Ober- und Untergrenze gewählt werden können, wird nicht gesondert eingegangen. Die Behandlung ergibt sich in nahe liegender Weise aus den im Folgenden dargestellten „reinen Fällen".

[348] Eine „kurzsichtig" ausgerichtete Portfolio-Strukturierung wird in anderer Form auch bei der Bewertung bedingter Ansprüche im Ansatz von *Kallsen* (1999) verwendet; vgl. S. 221.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

(a) 0-1-*Fall*:

In diesem Fall ist für jede einzelne der insgesamt möglichen Kombinationen aus den Beteiligungsquoten an den Töchtern ein Endvermögen zu generieren. Dabei wird zum einen bei jeder Neustrukturierung des Gesamt-Portfolios der Teil, welcher den Portfolio-Anteilen der gehandelten Wertpapiere entspricht, nach dem oben beschriebenen heuristischen Vorgehen festgelegt. Das Endvermögen ergibt sich dann durch *Simulation* der zeitlichen Entwicklung des Vermögens- und des Portfolio-Prozesses (*Monte-Carlo-Simulation*). Über die Nutzenfunktion ist ein Nutzenwert des Endvermögens zu ermitteln. Mehrfache Wiederholung der Vorgehensweise führt jeweils zu einem Nutzenwert. Als Ergebniswert, welcher der jeweils betrachteten Kombination aus Beteiligungsquoten zuzumessen ist, ist der Erwartungswert der ermittelten Nutzenwerte heranzuziehen. Die zu wählende Kombination ist dann jene mit dem höchsten Erwartungsnutzen.

Ein besonderes Problem liegt sicherlich in der Festlegung der Länge der Zeitintervalle, welche der Simulation für Portfolio-Anpassungen zugrunde gelegt wird, sowie in der Festlegung der Zahl der Wiederholungen von Zufallspfaden. Aufgrund der Komplexität des Problems ist eine Möglichkeit der Abschätzung des Simulationsfehlers nicht zu erkennen[349], so dass man sich damit behelfen muss, die Stabilität des Ergebnisses individuell abzuschätzen und die geschätzte Ergebniszuverlässigkeit gegen den Ermittlungsaufwand bei der Festlegung des Simulationsumfanges abzuwägen. Für die hier betrachteten Prozesse ist dabei allerdings grundsätzlich von einer schwachen Konvergenz des Simulationsergebnisses gegen den heuristisch bestimmten Erwartungswert auszugehen[350].

Der *optimale Portfolio-Prozess*, welcher sich unter Zugrundelegung der oben bezeichneten Restriktionen und für logarithmische sowie Nutzenfunktionen des „power type“ (mit $\beta \in (0,1)$) in $t \in [0,T]$ ergibt, lautet gemäß der Gl. (3.47)[351], insbesondere Gl. (3.57):

$$p_{\hat{\nu}}(t) = \frac{1}{\gamma^{st}}(\sigma'(t))^{-1}\theta_{\hat{\nu}}(t) = \frac{1}{\gamma^{st}}(\sigma(t)\sigma'(t))^{-1}\left(b(t) + \delta(t) + \hat{\nu}(t) - r(t)\mathbf{1}_n\right), \quad (3.81)$$

wobei γ^{st} je nach betrachteter Nutzenfunktion und Besteuerung die durch Definitionsgleichung (3.58) bestimmte Form annimmt, so dass $\gamma^{st} = (1 - st)(1-\beta)$ mit $st \in [0,1)$ und $\beta \in [0,1)$ gilt. Der Wert $\hat{\nu}(t)$ des optimalen Schattenpreisprozesses in $t \in [0,T]$ ist aus den Bestimmungsgleichungen (3.50) und (3.56) herzuleiten, so dass gelten muss:

$$\hat{\nu}(t) := \arg\min_{\nu \in \tilde{K}} \left\{ \gamma^{st}\zeta_{01}(\nu) + \frac{1}{2} \parallel \theta_{\nu}(t) \parallel^2 \right\}, \quad t \in [0,T]. \quad (3.82)$$

[349] Vgl. zu allgemeinen diesbezüglichen Überlegungen *Fishman* (1996), S. 19 ff.

[350] Zur schwachen Konvergenz vgl. bspw. *Korn/Korn* (1999), S. 195 ff., für die Anwendung hier insbesondere S. 197 (Satz 7) sowie S. 203 ff.; vgl. auch allgemein *Billingsley* (1999) oder *Billingsley* (1995), S. 327 ff.

[351] Vgl. hierzu die Anmerkung auf S. 170.

Für gegebenes $t \in [0, T]$ wird nun die konkrete Gestalt der optimalen Schattenpreis- und Portfolio-Prozesse hergeleitet, wobei auf eine *Kennzeichnung der Zeit-Zustands-Abhängigkeit von Prozessen weitgehend verzichtet* wird.

Hierbei ist eine Darstellung der Matrix $(\sigma\sigma')^{-1}$ hilfreich, welche auf die Teilmatrizen von σ gemäß Gl. (3.77) zurückgreift. Aus Gl. (3.77) folgt unmittelbar:

$$\sigma\sigma' = \begin{pmatrix} \bar{\sigma} & \sigma^{d_2} \\ \sigma^{d_1} & 0_{n_2,n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}' & \sigma^{d_1'} \\ \sigma^{d_2'} & 0_{n_1,n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}\bar{\sigma}' + \sigma^{d_2}\sigma^{d_2'} & \bar{\sigma}\sigma^{d_1'} \\ \sigma^{d_1}\bar{\sigma}' & \sigma^{d_1}\sigma^{d_1'} \end{pmatrix},$$

wobei wegen ihrer Diagonalität für die Matrizen σ^{d_i} $(i = 1, 2)$ gilt: $\sigma^{d_i} = \sigma^{d_i'}$; $\sigma^{d_i'}$ kennzeichnet die Transponierte von σ^{d_i}. Statt $\sigma^{d_i}\sigma^{d_i'}$ wird kurz $\sigma^{d_i^2}$ geschrieben. Es kann nun leicht nachgeprüft werden, dass die Inverse zu $\sigma\sigma'$ wie folgt gegeben ist:

$$(\sigma\sigma')^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\sigma^{d_2^2}\right)^{-1} & -\left(\sigma^{d_2^2}\right)^{-1} \bar{\sigma} \left(\sigma^{d_1}\right)^{-1} \\ -\left(\sigma^{d_1}\right)^{-1} \bar{\sigma}' \left(\sigma^{d_2^2}\right)^{-1} & \left(\sigma^{d_1}\right)^{-1} \bar{\sigma}' \left(\sigma^{d_2^2}\right)^{-1} \bar{\sigma} \left(\sigma^{d_1}\right)^{-1} + \left(\sigma^{d_1^2}\right)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.83}$$

Wie (nahezu unmittelbar) zu erkennen ist, sind die Matrizen $\sigma\sigma'$ und $(\sigma\sigma')^{-1}$ symmetrisch. Es soll nun noch $\bar{b} := (b + \delta + \mathbf{1}_n)$ gesetzt werden; ferner sollen $\bar{b}^{n_1}$ den Vektor der ersten n_1 Komponenten und $\bar{b}^{n_2}$ den Vektor der letzten n_2 Komponenten von $\bar{b}$ bezeichnen, so dass gilt: $\bar{b} = \left(\bar{b}^{n_1'}, \bar{b}^{n_2'}\right)'$. Dieselbe Schreibweise soll auch für die Zusammenfassung von Teilvektoren des n-dimensionalen Wiener-Prozesses W gelten. Zudem sei $\theta^{n_2} := \left(\sigma^{d_1}\right)^{-1} \bar{b}^{n_2}$.

Es werde eine Konzernstruktur unterstellt, welche im betrachteten Zeitpunkt zu einem Vektor $y \in \times_{i=1,\ldots,n_1} \{0, \beta_i(t)\}$ als den sich auf das Engagement in den Konzerntöchtern beziehenden Teil des Portfolio-Prozesses führt. Der *optimale Schattenpreisvektor* ergibt sich nun gemäß Gl. (3.82) aus der Minimierung des Ausdruckes:

$$\gamma^{st}\zeta_{01}(\nu) + \frac{1}{2} \parallel \theta_\nu \parallel^2 = -\gamma^{st} \sum_{i=1}^{n_1} y_i\nu_i + \frac{1}{2} \parallel \theta \parallel^2 + \theta'\sigma^{-1}\nu + \frac{1}{2}\nu' \left(\sigma^{-1}\right)' \sigma^{-1}\nu$$

nach den Komponenten des Vektors ν, wobei nach Voraussetzung $\nu_1, \ldots, \nu_{n_1} \in \mathbb{R}$ sowie $\nu_{n_1+1} = \ldots = \nu_n = 0$ gilt. Berücksichtigt man den letztgenannten Sachverhalt, so interessiert für die Minimierung lediglich die obere $n_1 \times n_1$-Teilmatrix von $\left(\sigma^{-1}\right)' \sigma^{-1} = (\sigma\sigma')^{-1}$ in der quadratischen Form, d.h. die Matrix $\left(\sigma^{d_2^2}\right)^{-1}$; analog sind lediglich die ersten n_1 Komponenten des Vektors $\left(\theta'\sigma^{-1}\right)'$ für die Skalarmultiplikation mit ν von Bedeutung. Bezeichnet $\hat{\nu}^{n_1}$ die nicht notwendig verschwindenden ersten n_1 Komponenten des gesuchten optimalen Schattenpreisvektors, so hat dieser Vektor das folgende Gleichungssystem zu lösen, welches sich durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen des obigen Ausdruckes nach den Schattenpreisen ergibt:

$$-\gamma^{st}y + \left(\sigma^{d_2^2}\right)^{-1} \bar{b}^{n_1} - \left(\sigma^{d_2^2}\right)^{-1} \bar{\sigma} \left(\sigma^{d_1}\right)^{-1} \bar{b}^{n_2} + \left(\sigma^{d_2^2}\right)^{-1} \hat{\nu}^{n_1} = 0.$$

Daraus folgt:

$$\hat{\nu}^{n_1} = \gamma^{st} \sigma^{d_2^2} y - \bar{b}^{n_1} + \bar{\sigma} \left(\sigma^{d_1}\right)^{-1} \bar{b}^{n_2}. \qquad (3.84)$$

Einsetzen in Gl. (3.81) führt auf:

$$p_{\hat{\nu}} = \frac{1}{\gamma^{st}} (\sigma\sigma')^{-1} \left(\bar{b} + \begin{pmatrix} \hat{\nu}^{n_1} \\ \mathbf{0}_{n_2} \end{pmatrix} \right). \qquad (3.85)$$

Eine Auswertung dieses Ausdruckes kann differenziert nach den sich für die Töchter (erste n_1 Komponenten) ergebenden Werten des Portfolio-Prozesses sowie nach den Portfolio-Anteilen zu den Marktpapieren (Komponenten n_1+1 bis n) erfolgen; hinsichtlich der erstgenannten Komponenten hat eine solche Auswertung lediglich eine Kontrollfunktion, da das Ergebnis y sein muss. Insofern soll die Portfolio-Zusammensetzung bezüglich der ersten n_1 Komponenten, die im Vektor $p_{\hat{\nu}^{n_1}}$ zusammengefasst seien, zunächst überprüft werden. Für diese Komponenten gilt das folgende Gleichungssystem:

$$p_{\hat{\nu}^{n_1}} = \frac{1}{\gamma^{st}} \left[\left(\sigma^{d_2^2}\right)^{-1} \left(\gamma^{st} \sigma^{d_2^2} y + \bar{\sigma} \left(\sigma^{d_1}\right)^{-1} \bar{b}^{n_2} \right) - \left(\sigma^{d_2^2}\right)^{-1} \bar{\sigma} \left(\sigma^{d_1}\right)^{-1} \bar{b}^{n_2} \right] = y.$$

Für die Portfolio-Anteile $p_{\hat{\nu}^{n_2}}$ der vollständig gehandelten Wertpapiere, wobei $p_{\hat{\nu}} = (p'_{\hat{\nu}^{n_1}},\ p'_{\hat{\nu}^{n_2}})'$ sei, ergibt sich nunmehr:

$$\begin{aligned} p_{\hat{\nu}^{n_2}} &= \frac{1}{\gamma^{st}} \Bigg[- \left(\sigma^{d_1}\right)^{-1} \bar{\sigma}' \left(\sigma^{d_2^2}\right)^{-1} \left(\gamma^{st} \sigma^{d_2^2} y + \bar{\sigma} \left(\sigma^{d_1}\right)^{-1} \bar{b}^{n_2} \right) && (3.86) \\ &\quad + \left(\left(\sigma^{d_1}\right)^{-1} \bar{\sigma}' \left(\sigma^{d_2^2}\right)^{-1} \bar{\sigma} \left(\sigma^{d_1}\right)^{-1} + \left(\sigma^{d_1^2}\right)^{-1} \right) \bar{b}^{n_2} \Bigg] \\ &= \underbrace{\frac{1}{\gamma^{st}} \left(\sigma^{d_1^2}\right)^{-1} \bar{b}^{n_2}}_{=:\, p^{\star\star}} - \underbrace{\left(\sigma^{d_1}\right)^{-1} \bar{\sigma}' y}_{=:\, p^{\star}}. && (3.87) \end{aligned}$$

Den optimalen Portfolio-Prozess kann man sich somit aus den Teilen $p^{\star\star}$ und $p^{\star}$ additiv zusammengesetzt denken. Dabei entspricht, wie sich aus einem Vergleich mit dem allgemeinen Ausdruck des optimalen Portfolio-Prozesses nach Gl. (3.81) nachvollziehen lässt, der Teilprozess $p^{\star\star}$ dem optimalen Portfolio-Prozess ohne nicht hedgebare Risiken. Ein solcher Prozess würde folglich gewählt, wenn man sich lediglich auf dem Markt der vollständig handelbaren Wertpapiere $n_1+1, \ldots, n$ befände. Der zweite Bestandteil des optimalen Portfolio-Prozesses, d.h. der Teilprozess $p^{\star}$ bewirkt eine Eliminierung der hedgebaren Risiken in den Wertpapieren $1, \ldots, n_1$, bezüglich welcher ein unvollständiger Kapitalmarkt i.e.S. vorliegt. Dies kann über die Darstellung der stochastischen Differentialgleichung zum Vermögensprozess wie folgt gezeigt werden:

Mit Hilfe von Gl. (2.64) und unter Berücksichtigung von $c(.) \equiv 0$ lässt sich der Vermögensprozess für $t \in [0, T]$ (fast sicher) darstellen als:

$$dX^{st}(t) = (1 - st) X^{st}(t) \left(r(t)\, dt + p'(t) \bar{b}(t)\, dt + p'(t) \sigma(t)\, dW(t) \right). \qquad (3.88)$$

Unter Weiterführung der notationellen Vereinfachung ergibt sich durch Einsetzen des Ausdruckes für den optimalen Portfolio-Prozess gemäß Gl. (3.87) hieraus:

$$\begin{aligned}
&dX^{st} \\
&= (1-st)X^{st}\Bigg(\Bigg(r + y'\bar{b}^{n_1} + \frac{1}{\gamma^{st}}\left(\left(\sigma^{d_1^2}\right)^{-1}\bar{b}^{n_2}\right)'\bar{b}^{n_2} - \left(\left(\sigma^{d_1}\right)^{-1}\bar{\sigma}'y\right)'\bar{b}^{n_2}\Bigg)\,dt \\
&\quad + \left(y'\bar{\sigma} + \frac{1}{\gamma^{st}}\left(\left(\sigma^{d_1^2}\right)^{-1}\bar{b}^{n_2}\right)'\sigma^{d_1} - \left(\left(\sigma^{d_1}\right)^{-1}\bar{\sigma}'y\right)'\sigma^{d_1}\right)dW^{n_1} + y'\sigma^{d_2}\,dW^{n_2}\Bigg) \\
&= (1-st)X^{st}\Bigg(\left(r + y'\bar{b}^{n_1} + \frac{1}{\gamma^{st}} \parallel \theta^{n_2} \parallel^2 - y'\bar{\sigma}\theta^{n_2}\right)dt \\
&\quad + \left(\frac{1}{\gamma^{st}}\theta^{n_2'} + y'\bar{\sigma} - y'\bar{\sigma}\left(\sigma^{d_1}\right)^{-1}\sigma^{d_1}\right)dW^{n_1} + y'\sigma^{d_2}\,dW^{n_2}\Bigg) \\
&= (1-st)X^{st}\Bigg(\left(r + y'\bar{b}^{n_1} + \frac{1}{\gamma^{st}} \parallel \theta^{n_2} \parallel^2 - y'\bar{\sigma}\theta^{n_2}\right)dt \\
&\quad + \frac{1}{\gamma^{st}}\theta^{n_2'}\,dW^{n_1} + y'\sigma^{d_2}\,dW^{n_2}\Bigg).
\end{aligned}$$

Dabei ist im vorletzten Ausdruck zu erkennen, dass die hedgebaren Teilrisiken der Wertpapiere $n_1+1,\ldots,n$ durch den Teilprozess $p^\star$ eliminiert werden, so dass bezüglich dieser Risiken eine Position wie auf einem vollständigen Kapitalmarkt eingegangen wird.

Damit kann nun auf Basis der Voraussetzungen dieses Abschnittes das Vorgehen im 0-1-Fall wie folgt beschrieben werden.

Algorithmus $\mathcal{A}_{01}$ *für den* 0-1-*Fall*[352]:

1. Lege M als Zahl der Teilperioden des Intervalls $[0,T]$ fest, so dass $\triangle t := \frac{T}{M}$ die Länge einer Teilperiode (für die zeitliche Anpassung von Prozesswerten) in Zeiteinheiten repräsentiert.
   Es sei $Z := \times_{i=1,\ldots,n_1}\{0,1\}$. Z gelte als geordnete Menge der paarweise verschiedenen Vektoren z^j, $j=1,\ldots,2^{n_1}$, deren jeweilige Komponenten $z_k^j\,(k=1,\ldots,n_1)$ entweder den Wert 1 oder den Wert 0 aufweisen und für die Beteiligung oder Nicht-Beteiligung an einem speziellen Konzernunternehmen stehen.
   Führe die Schritte 2-4 für $i=1,\ldots,N$ durch, wobei N als Anzahl der Simulationsdurchläufe zur Bestimmung jeweils einer Ausprägung des Endvermögens festzulegen ist.
   (Die Werte der Parameterprozesse ebenso wie γ^{st} gelten als gegeben; insofern ist auch der Prozess $\bar{b}(.)$ als gegeben zu betrachten.)

2. Initialisierung für den Durchlauf i:
   Setze $t := 0$ sowie $m := 0$. Initialisiere die Wertpapierkurse $S_k(0) := S_{k,0}$, $k=1,\ldots,n$, $S_0(0) := 1$.
   Initialisiere 2^{n_1} Vermögensprozesse durch $X^j(0) := x$, $j=1,\ldots,2^{n_1}$.

[352] Zur grundsätzlichen Vorgehensweise in diesem und im folgenden Fall vgl. das Beispiel für die simulative Ermittlung eines Optionspreises in *Korn/Korn* (1999), S. 202 f.

3. Setze $m := m + 1$.
   Für $j = 1, \ldots, 2^{n_1}$:

   - Für $k = 1, \ldots, n_1$:
     Bestimme $\beta_k^j(t) := \frac{S_k(t)}{X^j(t)}$ und setze $y_k^j(t) := \beta_k^j(t) z_k^j$ sowie damit den Vektor $y^j(t) := (y_1^j(t), \ldots, y_{n_1}^j(t))'$.
     Setze ferner $p^{j;n_1}(t) := y^j(t)$ für den Vektor der Portfolio-Anteile an den Konzernunternehmen.
   - Für $k = n_1 + 1, \ldots, n$:
     Setze $p^{j;n_2}(t) := \frac{1}{\gamma^{st}} \left(\sigma^{d_1^2}(t)\right)^{-1} \bar{b}^{n_2}(t) - \left(\sigma^{d_1}(t)\right)^{-1} \bar{\sigma}'(t) y^j(t)$ für den Vektor der Portfolio-Anteile an den Marktpapieren nach Gl. (3.87).
   - Setze $p^j(t) := (p^{j;n_1}(t)', p^{j;n_2}(t)')'$ als Wert des Portfolio-Prozesses im Fall j in t.

   Generiere einen Vektor $u := (u_1, \ldots, u_n)'$ mit $N(0,1)$-verteilten, paarweise stochastisch unabhängigen Zufallszahlen u_k, $k = 1, \ldots, n$.
   Setze ${}_{\triangle}W(t) := u\sqrt{{}_{\triangle}t}$ mit den Komponenten ${}_{\triangle}W_k(t) := u_k\sqrt{{}_{\triangle}t}$, $k = 1, \ldots, n$.
   Für $j = 1, \ldots, 2^{n_1}$:
   Setze ${}_{\triangle}X^j(t) = (1 - st)X^j(t)\left(\left(r(t) + p^j(t)'\bar{b}(t)\right) {}_{\triangle}t + p^j(t)'\sigma(t)\, {}_{\triangle}W(t)\right)$ und damit $X^j(t +_{\triangle} t) := X^j(t) +_{\triangle} X^j(t)$.
   Setze $t := t +_{\triangle} t$.
   Wiederhole diesen Schritt bis $m = M$.

4. Ermittle die Nutzenwerte zu den Endvermögen der betrachteten Konzernstrukturen durch $H_i^j := U(X^j(t))$, wobei $t = T$ gilt.

5. Bestimme für jede mögliche Konzernstruktur den Erwartungswert der Nutzenwerte über sämtliche Simulationsdurchläufe:
   $H^j := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} H_i^j$.
   Wähle diejenige Alternative $j^\star$ mit dem höchsten derart ermittelten Erwartungswert aus:
   $j^\star := \arg\max_{j \in \{1,\ldots,2^{n_1}\}} H^j$.
   Die zu wählende Konzernstruktur ergibt sich aus der Gestalt des Vektors $z^{j^\star}$, indem für $k = 1, \ldots, n_1$ bei $z_k^{j^\star} = 1$ eine Beteiligung am Konzernunternehmen k erworben bzw. gehalten, bei $z_k^{j^\star} = 0$ entsprechend auf eine Beteiligung verzichtet wird.

Die Beschreibung des 0-1-Falles ist damit abgeschlossen. Für konstante Parameterprozesse ist eine Implementierung des Algorithmus im Anhang 5.5.1 zusammen mit dem Vorgehen im nachfolgend behandelten Intervall-Fall in Maple angegeben.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

(b) Intervall-Fall:

Im Unterschied zum 0-1-Fall kann an einem Konzernunternehmen nunmehr jede Beteiligungsquote in dem durch null und eine gegebene Obergrenze bestimmten, abgeschlossenen Intervall gehalten werden, wobei zudem die Höhe der Beteiligung in diesem Intervall dynamisch angepasst werden kann. Im Folgenden werden nur die sich daraus ergebenden Unterschiede zum vorausgehend behandelten Fall beschrieben, auf eine Wiederholung allgemeiner Ausführungen wird verzichtet; dies betrifft auch die Bestimmung des optimalen Schattenpreisprozesses, welche in *Abschnitt 3.3.2.2* bereits behandelt worden ist. Im Hinblick auf die Anwendung des dort beschriebenen Algorithmus' ist lediglich anzumerken, dass, wie im 0-1-Fall dargestellt, die Ermittlung von:

$$\hat{\nu}(t) := \arg\min_{\nu \in \tilde{K}} \left\{ \gamma^{st} \zeta_{Int}(\nu) + \frac{1}{2} \parallel \theta_\nu(t) \parallel^2 \right\},\ t \in [0,T],$$

wegen $\nu_{n_1+1} = \ldots = \nu_n = 0$ äquivalent ist zur Bestimmung von:

$$\begin{aligned} \hat{\nu}^{n_1}(t) \quad := \quad \arg \min_{\nu^{n_1} \in \mathbb{R}^{n_1}} \Bigg\{ & \gamma^{st} \zeta_{Int}(\nu^{n_1}) + \left(\left(\sigma^{d_2^2} \right)^{-1} \bar{b}^{n_1} \right. \\ & \left. - \left(\sigma^{d_2^2} \right)^{-1} \bar{\sigma} \left(\sigma^{d_1} \right)^{-1} \bar{b}^{n_2} \right)' \nu^{n_1} + \tfrac{1}{2} \nu^{n_1'} \left(\sigma^{d_2^2} \right)^{-1} \nu^{n_1} \Bigg\},\ t \in [0,T], \end{aligned}$$

wobei ν^{n_1} wie im 0-1-Fall den Vektor der ersten n_1 Komponenten von ν kennzeichnet und insbesondere Gl. (3.83) verwendet wurde. Das damit gegebene Minimierungsproblem ist analog dem in *Abschnitt 3.3.2.2* beschriebenen Algorithmus $\mathcal{A}1$ zu berechnen. Hierfür tritt die Funktion $\tilde{f}_{oc} : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ mit der Abbildungsvorschrift $\nu^{n_1} \rightarrow \left(\sigma^{d_2^2} \right)^{-1} \bar{b}^{n_1} - \left(\sigma^{d_2^2} \right)^{-1} \bar{\sigma} \left(\sigma^{d_1} \right)^{-1} \bar{b}^{n_2} + \left(\sigma^{d_2^2} \right)^{-1} \nu^{n_1}$ an die Stelle der Funktion $f_{oc}(.)$; ferner ist die Funktion $f(.,.)$, deren zweites Argument durch die vektorwertige Funktion $c(.)$ bestimmt wird, durch die argumentgleiche Funktion $\tilde{f}(.,.)$ mit der Abbildungsvorschrift $(\nu^{n_1}, c(\nu^{n_1})) \rightarrow -\gamma^{st} c'(\nu^{n_1}) \nu^{n_1} + \left(\left(\sigma^{d_2^2} \right)^{-1} \bar{b}^{n_1} - \left(\sigma^{d_2^2} \right)^{-1} \bar{\sigma} \left(\sigma^{d_1} \right)^{-1} \bar{b}^{n_2} \right)' \nu^{n_1} + \nu^{n_1'} \left(\sigma^{d_2^2} \right)^{-1} \nu^{n_1}$ zu ersetzen, wobei der konstante Summand $\frac{1}{2} \parallel \theta \parallel^2$ weggelassen wurde. Das mit Algorithmus $\mathcal{A}1$ zu lösende Minimierungsproblem bestimmt für $t \in [0,T]$ somit wie folgt den optimalen Schattenpreisvektor für die Beteiligungen an Konzernunternehmen:

$$\hat{\nu}^{n_1}(t) := \arg \min_{\nu^{n_1} \in \mathbb{R}^{n_1}} \left\{ \tilde{f}(\nu^{n_1}, c(\nu^{n_1})) \right\}. \tag{3.89}$$

Betrachtet man das damit gegebene Minimierungsproblem als algorithmisch gelöst, besteht das heuristische Vorgehen im Intervall-Fall lediglich noch darin, den zugehörigen Portfolio-Prozess für $t = 0$ zu ermitteln — hierfür kann Gl. (3.81) herangezogen werden. Da die Heuristik keine Auswahl des Portfolio-Prozesses anhand des im Erwartungswert erreichbaren Nutzens aus dem Endvermögen trifft, muss dieses im Grunde auch nicht berechnet bzw. simuliert werden. Um gleichwohl eine Vorstellung vom erzielbaren Nutzenniveau zu geben, kann nach folgender Vorschrift vorgegangen werden:

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Algorithmus $\mathcal{A}_{Int}$ zur Simulation des erreichbaren Erwartungsnutzens für den Intervall-Fall:

1. Mit M und N wie im Algorithmus $\mathcal{A}_{01}$ sei zunächst ${}_{\triangle}t := \frac{T}{M}$ die Teilperiodenlänge (für die zeitliche Anpassung von Prozesswerten) in Zeiteinheiten. Für $i = 1, \ldots, N$ führe die Schritte 2-4 durch.

2. Initialisierung für den Durchlauf i:
Setze $t := 0$ sowie $m := 0$.
Initialisiere die Wertpapierkurse $S_k(0) := S_{k,0}$, $k = 1, \ldots, n$, $S_0(0) := 1$.
Initialisiere den Vermögensprozess durch $X(0) := x$.

3. Setze $m := m + 1$.
Für $k = 1, \ldots, n_1$:
Bestimme $\beta_k(t) := \frac{S_k(t)}{X(t)}$.
Ermittle den Wert des optimalen Schattenpreisprozesses für die ersten n_1 Komponenten $\hat{\nu}^{n_1}(t)$ im Zeitpunkt t nach der Bestimmungsgleichung (3.89).
Setze $\hat{\nu}(t) := \left(\hat{\nu}^{n_1'}(t), \mathbf{0}'_{n_2}\right)'$.
Bestimme den optimalen Portfolio-Prozess analog Gl. (3.81) entsprechend $p(t) := \frac{1}{\gamma^{st}}(\sigma(t)\sigma'(t))^{-1}\left(\bar{b}(t) + \hat{\nu}(t)\right)$.
Generiere einen Vektor $u := (u_1, \ldots, u_n)'$ mit $N(0,1)$-verteilten, paarweise stochastisch unabhängigen Zufallszahlen u_k, $k = 1, \ldots, n$.
Setze ${}_{\triangle}W(t) := u\sqrt{{}_{\triangle}t}$ mit den Komponenten ${}_{\triangle}W_k(t) := u_k\sqrt{{}_{\triangle}t}$, $k = 1, \ldots, n$.
Setze ${}_{\triangle}X(t) = (1 - st)X(t)\left(\left(r(t) + p'(t)\bar{b}(t)\right){}_{\triangle}t + p'(t)\sigma(t){}_{\triangle}W(t)\right)$ und damit $X(t +_{\triangle} t) := X(t) +_{\triangle} X(t)$.
Setze $t := t +_{\triangle} t$.
Wiederhole diesen Schritt bis $m = M$.

4. Ermittle den Nutzenwert zum simulierten Endvermögen $H_i := U(X(t))$, wobei $t = T$ ist.

5. Bestimme den Erwartungswert der Nutzenwerte über sämtliche Simulationsdurchläufe: $H := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} H_i$.

Eine Implementierung des Algorithmus $\mathcal{A}_{01}$ zum 0-1-Fall sowie die Bestimmung des optimalen Schattenpreis- und des optimalen Portfolio-Prozesses im Intervall-Fall inkl. einer Simulation des von der Heuristik erzielten Erwartungsnutzens aus dem Endvermögen nach Algorithmus $\mathcal{A}_{Int}$ enthält Anhang 5.5.1[353]; hierbei liegen konstante Parameterprozesse zugrunde.

[353] Zur Vereinfachung des Algorithmus wurde lediglich für *sämtliche* Portfolio-Prozess-Variablen eine Intervall-Restriktion angenommen; hierbei wurden für die Wertpapiere $n_1 + 1, \ldots, n$ derart extreme Grenzen gewählt, dass sich faktisch kein Unterschied zu einer diesbezüglich unbeschränkten Situation ergibt.

Anmerkung 3.2 *zum Intervall-Fall*
Für den Intervall-Fall ergibt sich der optimale Portfolio-Prozess auch aus der Lösung eines analogen statischen Optimierungsproblems. Zugrunde gelegt sei eine logarithmische Nutzenfunktion über das Endvermögen sowie der Fall ohne Steuern ($st \equiv 0$)[354]*. Ausgehend von einem Planungszeitraum der Länge* $_\triangle t$*, welcher mit* $t = 0$ *beginnt, hat das statische Problem* ($\mathcal{PS}$) *die Gestalt:*

$$\max_{w \in \mathbb{R}^n} E\left[\ln X(_\triangle t)\right] - r_\triangle t \;\Leftrightarrow\; \max_{w \in \mathbb{R}^n} \bar{b}'w - \frac{1}{2} \parallel w'\sigma'\sigma w \parallel^2$$

unter $0 \leq w_i \leq \frac{S_i(0)}{x}$ $(i = 1, \ldots, n_1)$.
w *steht für den* n*-dimensionalen Vektor der Portfolio-Gewichte der riskanten Wertpapiere, wobei die ersten* n_1 *Komponenten die Portfolio-Gewichte zu den Konzernunternehmen repräsentieren und die weiteren* n_2 *Komponenten den Anteilen der unbeschränkt handelbaren Wertpapiere entsprechen. Der Vektor ist in* $t = 0$ *festzulegen und bleibt bis* $t =_\triangle t$ *konstant. Im Übrigen gilt die bisher eingeführte Symbolik, wobei sämtliche Parameter als konstant zu betrachten sind. Lediglich das Vermögen des Investors besitzt in* $t = 0$ *den Wert* x *und in* $t =_\triangle t$ *nimmt es den (zufallsabhängigen) Wert:*

$$X(_\triangle t) = xe^{\left(b'w + \left(1 - \mathbf{1}'_n w\right) r + \delta' w - \frac{1}{2} w'\sigma\sigma' w\right)_\triangle t + w'\sigma\, W(_\triangle t)} \tag{3.90}$$

an[355]*. Logarithmierung und Erwartungswertbildung sowie Bereinigung um den für die Optimierung unerheblichen Driftterm zum risikolosen Zinssatz führen zur Zielfunktion.*

Beweis: Siehe Anhang 5.5.2.

Der Darstellung des myopischen Ansatzes zur Bestimmung optimaler Beteiligungen an Konzernunternehmen, welcher an die dynamische Portfolio-Optimierung anknüpft, schließt sich im Weiteren die Betrachtung von Bewertungsansätzen für bedingte Ansprüche auf unvollständigen Kapitalmärkten an.

3.3.3 Bewertungskonzepte für bedingte Ansprüche

Auf einem vollständigen Kapitalmarkt ist der Preis eines bedingten Anspruches *eindeutig*, sofern, als einzige Bedingung, der Markt arbitragefrei ist. Die Eindeutigkeit des Preises auf Basis des Arbitrageargumentes folgt aus der Möglichkeit, das Zahlungsmuster des bedingten Anspruches mit den am Markt verfügbaren Finanzinstrumenten vollständig, folglich unter Berücksichtigung

[354] Die Äquivalenz der Heuristik zu statischen Problemen in anderen Fällen wird nicht eigens untersucht.
[355] Dies ergibt sich mit geringfügigen Modifikationen aus Gl. (2.15) und Satz 2.10.

sämtlicher Umweltlagen, duplizieren zu können. Was aber ist zu tun, wenn diese Marktvollständigkeit nicht gegeben und somit kein durch das Arbitrageargument objektivierter, eindeutiger Preis eines (bedingten) Anspruches ableitbar ist? Eine erste Konsequenz aus dieser Situation kann darin bestehen, ein Preisintervall zu suchen, das arbitragefreie Preise (innerhalb des Intervalls) von solchen abgrenzt, bei deren Vorliegen Arbitrage möglich ist. Die Arbitragegrenzen bezeichnen damit die Preisober- und -untergrenze für den Wert des betrachteten Anspruches. Der Ermittlung derartiger Preisgrenzen ist *Abschnitt 3.3.3.1.1* gewidmet. Dieses intuitiv einleuchtende Konzept kann dadurch erweitert werden (*Abschnitt 3.3.3.1.2*), dass Preise nicht nur aufgrund des Arbitrageargumentes ausgeschlossen werden, sondern auch dann, wenn sie zu so genannten „good deals“ führen. Diese bestehen, wenn einer erweiterten Vorstellung entsprechende, „allgemein wünschenswerte“ Ansprüche keinen (positiven) Preis besitzen. Die beiden bezeichneten Ansätze einer Bestimmung von Preisintervallen machen somit den Inhalt von *Abschnitt 3.3.3.1* aus.

Daran anschließend werden in einem Überblick Ansätze skizziert, die auf einen eindeutigen Wert für den bedingten Anspruch führen. Die dadurch notwendige Auswahl aus dem Intervall arbitragefreier Preise wird unter Einbeziehung von Nutzenvorstellungen des Bewerters getroffen. Im Rahmen dieses Überblickes werden auch Ansätze angesprochen, die sich mit dem Hedging-Problem auf unvollständigen Märkten befassen. Sie zielen folglich auf die Bestimmung eines Portfolio-Prozesses ab, welcher in gewisser Weise risikominimierend ist.

Angemerkt werden soll, dass die Behandlung der Preisgrenzenbestimmung auf Basis des Arbitragearguments besonders ausführlich erfolgt, gerade im Vergleich zu den präferenzorientierten und den Hedging-Ansätzen. Dies ist zum einen durch ihre spätere Verwendung im Rahmen der Erörterung eines speziellen Realoptionsproblems motiviert. Zum anderen liegen bereits aufbereitende Ausarbeitungen zu den letztgenannten Ansätzen vor, so dass vielfach hierauf verwiesen werden kann.

3.3.3.1 Ansätze zur Bestimmung von Preisgrenzen

3.3.3.1.1 Arbitragefreie Optionswerte zwischen einem Käufer- und einem Verkäuferpreis

Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen ist ein (bedingter) Anspruch $B(\omega, t)$, kurz $B(t)$, für ein spezielles $t \in [0, T]$. $B(t)$ sei eine *nichtnegative* und $\mathcal{F}_t$*-messbare Zufallsvariable*, deren Ausprägung die Auszahlung aus dem Anspruch im Zeitpunkt t im zugehörigen Umweltzustand ω repräsentiert. Es geht nun darum, ggf. mehrere Gegenwarts-Preise für diesen

Anspruch zu bestimmen, die sämtlich kompatibel sind mit einer zu unterstellenden Arbitragefreiheit des Marktes, auf dem der Anspruch sowie die ihn bestimmenden Variablen, u.U. mit bestimmten Beschränkungen, gehandelt werden.

Wie bereits erwähnt, wird die Marktunvollständigkeit in der Regel verhindern, den Bereich arbitragefreier Preise auf einen einzigen Wert zu komprimieren. Hierfür müsste, die Beliebigkeit des Anspruches vorausgesetzt, mit diesem Preis ein Portfolio aus Kapitalmarktpapieren konstruierbar sein, das das Auszahlungsmuster des Anspruches in t repliziert. Auf der anderen Seite müsste auch eine Verschuldung in Höhe dieses Preises in $t = 0$ möglich sein, die vorzeichenverkehrt dieses Portfolio dynamisch dupliziert und damit in t eine Verschuldungssituation (fast sicher) erreicht, die durch die Auszahlung des bedingten Anspruches vollständig beglichen werden kann. Auf einem unvollständigen Markt werden jedoch Anlage- bzw. Verschuldungsmöglichkeiten in ihrer Höhe und/oder ihrem Vorzeichen beschränkt sein, so dass nicht jeder beliebige Anspruch mit einem gegebenen Anfangsvermögen (dem Optionspreis) erreichbar sein wird bzw. nicht zugleich die Gegenposition aufgebaut werden kann und man hierfür dasselbe Anfangsvermögen erhält. Insofern entsteht auf der Basis von Arbitrageüberlegungen ein *Intervall* von Preisen. Dieses wird nach oben begrenzt durch einen Verkäuferpreis, welcher auch unendlich hoch sein kann, sowie nach unten entsprechend durch einen Käuferpreis. Die Obergrenze des Intervalles, also der *Verkäuferpreis*, muss zwei Bedingungen erfüllen: Zum einen muss der Preis den Aufbau eines Portfolios gestatten, das in t — analog der zuvor geschilderten Situation auf einem vollständigen Markt — in jedem Umweltzustand (i.S.v. fast sicher) *mindestens* den Wert des verkauften Anspruches aufweist und dabei keine Zuzahlungen während der Haltedauer verlangt. Zum anderen muss es der kleinste Preis sein, der diese Eigenschaft besitzt. Die Verletzung der zweiten Bedingung würde bedeuten, dass der Verkäufer seinen bedingten Anspruch zu x_1 veräußern könnte und nur $x_2 < x_1$ aufwenden müsste, um einen Anspruch mit einem Zahlungsprofil aufzubauen, das mindestens so hohe Auszahlungen wie dasjenige des veräußerten Anspruches besitzt. Der Verkäufer würde somit einen risikolosen Gewinn in Höhe von $x_1 - x_2$ in $\tilde{t} = 0$ erzielen, welcher aus Arbitragegründen auszuschließen ist. Der *Käuferpreis* ist derart zu bestimmen, dass der Käufer des Anspruches die in $\tilde{t} = 0$ in Höhe des Kaufpreises entstandene Verschuldung durch Leerverkäufe im Bond und/oder den bzw. einzelnen Aktien derart dynamisch steuern kann, dass die Auszahlung aus dem erworbenen Anspruch in t (fast sicher) ausreicht, um die Verschuldung vollständig zu bedienen. Spiegelbildlich zum Verkäuferpreis ist als Käuferpreis nunmehr der größte Preis zu wählen, welche diese Bedingung erfüllt. Es ist also nach dem in diesem Sinne maximalen Käuferpreis zu suchen, da ein geringerer für den Anspruch verlangter Betrag gleichwohl eine Verschuldung bis zu diesem maximalen Preis erlauben würde, ohne dass der Käufer in der Zukunft eine negative Netto-Auszahlung zu befürchten hätte. Die Differenz zwischen diesem maximalen Preis und einem niedrigeren würde einen Arbitragevorteil bestimmen, der allerdings keinen Bestand hätte. Die Erörterung derartiger Käufer- und Verkäuferpreise für zeitpunktbezogene Ansprüche geht auf *El Karoui/Quenez* (1991, 1995) zurück[356].

Karatzas/Kou (1998) entwickeln darüber hinaus Preisgrenzen auch für amerikanische Ansprüche. Beinhaltet der Anspruch somit ein zeitliches Ausübungswahlrecht, muss der Verkäufer in der Lage sein, mit dem Gegenwartspreis ein Portfolio aus Kapitalmarktpapieren aufzubauen, das ihm zu jedem möglichen Ausübungszeitpunkt eine Bedienung des Anspruches erlaubt. Umgekehrt wird ein Erwerber des bedingten Anspruches, welcher einen Verlust aus dem Erwerb ausschließen möchte[357], höchstens so viel bezahlen (Untergrenze), dass die hierfür einzugehende Verschuldung derart (dynamisch) strukturierbar ist, dass sie mit dem Rückfluss aus dem Anspruch (vollständig) beglichen werden kann. Vorauszusetzen ist dabei, dass von ggf. vorhandenen zeitlichen Ausübungswahlrechten geeignet Gebrauch gemacht wird. Können Wertentwicklungen des Anspruches somit nicht exakt mit Marktpapieren dupliziert werden, wird ein Verkäufer, der bei keiner Umweltentwicklung durch den Verkauf des Anspruches einen Vermögensverlust erleiden möchte, so viel verlangen, dass er in jedem Umweltzustand mindestens den Wert des Anspruches innehat. Der Käufer hingegen wird gerade noch so viel zu zahlen bereit sein, dass er bei geeigneter Strukturierung der Verschuldung für jede Umweltentwicklung (mit positiver Eintrittswahrscheinlichkeit) einen Ausübungszeitpunkt wählen kann, in dem der Rückfluss aus dem gekauften Anspruch zur vollständigen Begleichung seiner Schuld ausreicht. Im Folgenden werden diese Überlegungen formalisiert und die zur Ermittlung der Preisgrenzen vorhandenen, wesentlichen Ergebnisse, teilweise erweiternd, wiedergegeben. Die formale Beschreibung lehnt sich an den Weiterentwicklungen von *El Karoui/Quenez* (1991, 1995) durch *Cvitanić/Karatzas* (1993), *Karatzas/Kou* (1996, 1998), *Broadie/Cvitanić/Soner* (1998) und *Karatzas/Shreve* (1998) an.

Es wird allgemein das folgende Intervall zwischen dem Käuferpreis $h_{low}(K_-)$ und dem Verkäuferpreis $h_{up}(K_+)$ im zuvor beschriebenen Sinne betrachtet[358]:

$$[h_{low}(K_-), h_{up}(K_+)]\,.$$

Hierbei kennzeichnen K_- bzw. K_+ Restriktionenmengen für zulässige Portfolio-Prozesse in Relativbeträgen.

[356] Vgl. jedoch bereits *Harrison/Kreps* (1979), S. 404.
[357] Allerdings im stochastischen Sinne von „fast sicher".
[358] Vgl. zum Folgenden *Karatzas/Kou* (1998), S. 220 ff. Da von nicht negativen Ansprüchen ausgegangen wird, kann die Definition zulässiger Prozesse dort (Def. 2.4) durch Setzen von $\Lambda \equiv 0$ abgeändert werden. Somit ist auf die bereits eingeführten Mengen unrestringierter bzw. restringierter zulässiger Portfolio-Prozesse $\mathcal{A}(x)$ bzw. $\mathcal{A}(x;K)$ abzustellen; vgl. S. 162. Die Restriktionsmenge K erfährt dabei im Weiteren eine Konkretisierung. Als spezieller Fall soll die Möglichkeit eingeschlossen sein, dass das angegebene Intervall auf einen Punkt zusammenfällt, also $h_{low}(K_-) = h_{up}(K_+)$ gilt.

Zunächst ist anzumerken, dass in der Unterscheidung eines Käufer- und eines Verkäuferpreises durch den Bezug auf die zweierlei Mengen K_- bzw. K_+ auch eine mögliche Verschiedenheit in den zugrunde liegenden Restriktionen zum Ausdruck kommt. Durch K_- bzw. K_+ wird somit danach differenziert, ob ein hedgendes Portfolio aus Käufer- oder aus Verkäufersicht gebildet werden soll[359]. Beide Mengen werden jeweils als nicht leere, abgeschlossene und konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ vorausgesetzt. Die Menge der aus Verkäufersicht zulässigen Portfolio-Prozesse $\mathcal{A}(x; K_+)$ ist gleich wie die bisher eingeführte Menge zulässiger Portfolio-Prozesse (in Relativbeträgen) $\mathcal{A}(x; K)$ mit $K_+ \equiv K$ definiert. Dabei wird der Tatsache Rechnung getragen, dass auf einem arbitragefreien Markt ein den bedingten, nicht negativen Anspruch $B(.)$ (super-)replizierendes Portfolio (fast immer, fast sicher) einen nicht negativen Vermögensprozess aufweist. Demgegenüber wird der Portfolio-Prozess, der aus Käufersicht den Erwerb des bedingten Anspruches finanzieren und durch diesen gehedgt sein soll, einen negativen Vermögensprozess, d.h. eine Netto-Verschuldung, mit sich bringen. Beginnend mit einer Verschuldung $-x$ $(x \geq 0)$ wird hierfür die Menge zulässiger Portfolio-Prozesse aus Käufersicht definiert als[360]:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_-(-x; K_-) \quad := \quad & \{(c,p) \mid p(t) \in K_-,\, X^{-x,c,p}(t) \leq 0,\, X^{-x,c,p}(t) \\ & \text{nach unten beschränkt}, \forall t \in [0,T], \text{ fast sicher}\} \end{aligned}$$

Mit Blick auf eine spätere Anwendung der Aussagen dieses Abschnittes werden im Folgenden die Restriktionstypen eines Leerverkaufsverbotes sowie eines unvollständigen Kapitalmarktes i.e.S., jeweils bezogen auf die durch $L \subseteq \{1, \ldots, n\}$ gekennzeichnete Indexmenge der restringierten Underlyings, näher betrachtet. Die Underlyings werden wiederum stellvertretend als Aktien bezeichnet. O.B.d.A. wird davon ausgegangen, dass die der Beschränkung unterliegenden Aktien die Indizes $1, \ldots, \mid L \mid$ besitzen. Zu den in *Abschnitt 3.2* gegebenen Spezifikationen der Restriktionsmenge aus Verkäufersicht: $K_+^{LV} = [0, \infty)^{|L|} \times (-\infty, \infty)^{n-|L|}$ für das Leerverkaufsverbot bzw. $K_+^{UM} = \{p \in \mathbb{R}^n \mid p_i = 0, i = 1, \ldots, \mid L \mid\}$ für die Unvollständigkeit des Marktes i.e.S. ergeben sich die zugehörigen Formulierungen für die Restriktionsmenge aus Käufersicht als[361]:

$$\begin{aligned} K_-^{LV} &= (-\infty, 0]^{|L|} \times (-\infty, \infty)^{n-|L|}, \text{ (Leerverkaufsverbot,)} \\ K_-^{UM} &= \{p \in \mathbb{R}^n \mid p_i = 0, i = 1, \ldots, \mid L \mid\} = K_+^{UM} \text{ (unvollständiger Markt i.e.S.).} \end{aligned}$$

---

[359] In Anwendungen der Restriktionenmengen aus Käufer- bzw. Verkäufersicht dient die Differenzierung zumeist lediglich dazu, eine gegebene Marktrestriktion an die Tatsache anzupassen, dass der (super-)replizierende Prozess bei der Bestimmung des Käuferpreises eine Short-Position (Verschuldung), für den Verkäufer hingegen eine Long-Position repräsentiert; vgl. das Folgende. Grundsätzlich können damit aber durchaus in Bezug auf die zugrunde liegenden Objekte sich unterscheidende Restriktionen zwischen Käufer- und Verkäufersicht abgebildet werden; vgl. *Karatzas/Kou* (1996), S. 335, 355 ff. Dies wird im Schrifttum jedoch nicht weiter vertieft. Dieser Aspekt erfährt demgegenüber hier eine eigenständige Behandlung, welche allerdings nicht unmittelbar auf die Differenzierung zwischen K_- und K_+ zurückgreift; die diesbezügliche Untersuchung erfolgt im Zusammenhang der Behandlung von Realoptionen auf unvollständigen Märkten (vgl. *Abschnitt 3.3.4*).

[360] Insofern hat sich im Falle einer Verschuldung die Zulässigkeit von Prozessen (vgl. S. 65) auf nicht positive Vermögensprozesse zu erstrecken, welche weiterhin als nach unten beschränkt anzunehmen sind.

[361] Im Weiteren werden die Superskripte jedoch weggelassen; sie ergeben sich aus dem Zusammenhang.

Hinsichtlich der Restriktionsmenge für das Leerverkaufsverbot ist zu beachten, dass $p_i(.)$ den Anteilsprozess des Investitionsbetrages in die Aktie i am negativen Gesamtvermögen $X^{\cdot}(.)$ bezeichnet. Da ein Leerverkaufsverbot lediglich nicht negative Investitionsbeträge zulässt, darf folglich zu keiner Zeit eine Ausprägung des Anteilsprozesses $p_i(.)$ für eine restringierte Aktiengattung positiv sein.

Ohne weitere Einschränkung in Bezug auf die Unterschiedlichkeit der Mengen K_+ und K_- ist analog zur Funktion $\zeta(.) \equiv \zeta_+(.)$ auch bezüglich der Menge K_- eine Funktion $\zeta_- : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ wie folgt zu definieren:

$$\zeta_-(\nu) := \inf_{p \in K_-} (-p'\nu).$$

Ferner sei $\tilde{K}_- := \{\nu \in \mathbb{R}^n \mid \zeta_-(\nu) > -\infty\}$. Legt man für bel. $p_+ \in K_+$, $p_- \in K_-$ die folgenden (technischen) Bedingungen $\mathcal{B}1$ zugrunde:

$$\begin{aligned} &\lambda p_+ + (1-\lambda)p_- \quad \in \quad \begin{cases} K_+, & \text{für } \lambda \geq 1, \\ K_-, & \text{für } \lambda \leq 0, \end{cases} \\ &\{\mathbf{0}_d\} \in K_- \cap K_+, \end{aligned}$$

so ist[362]:

$$\tilde{K}_+ = \tilde{K}_- = \tilde{K} \text{ und } \zeta(\nu) = \zeta_-(\nu), \, \forall \nu \in \tilde{K}.$$

(Für ein Leerverkaufsverbot und einen unvollständigen Markt i.e.S. ergeben sich Verkäufer- und Käuferpreis dann allein in Abhängigkeit von $K_+ = K$.)

Es wird im Weiteren unterschieden in bedingte Ansprüche amerikanischen und solche europäischen Typs. *Amerikanische* bedingte Ansprüche (Optionen) gestatten dem Inhaber eine Ausübung während eines vorgegebenen Zeitraumes, welcher hier dem Planungszeitraum $[0, T]$ entsprechen soll. Demgegenüber können Ansprüche *europäischen* Typs lediglich zu einem bestimmten Zeitpunkt, welcher hier als T bezeichnet werde, ausgeübt werden. Zur Modellierung der Ausübung amerikanischer Ansprüche wird deshalb noch eine Menge von Stoppzeiten $\mathcal{S}_{s,t} := \{\tau : \Omega \to [s,t] \mid \tau \text{ ist Stoppzeit}\}$, mit $\mathcal{S} := \mathcal{S}_{0,T}$, eingeführt. Hiermit bezeichne, ausgehend von der Menge zulässiger, unrestringierter Portfolio-Prozesse (in Relativbeträgen) $\mathcal{A}(x)$ ($\mathcal{A}_-(-x)$[363]) bei Anfangsvermögen (Anfangsverschuldung) x, die Menge $\mathcal{A}(x,\tau)$ ($\mathcal{A}_-(-x,\tau)$) die zulässigen Portfolio-Prozesse (in Relativbeträgen), für welche der gestoppte Vermögensprozess $X^{(-)x,c,p}(. \wedge \tau) \geq \ (\leq) \, 0$ ist. Für *restringiert zulässige* Portfolioprozesse $p(.)$ gilt dann $p(.) \in \mathcal{A}(x,\tau) \wedge p(t) \in K_+$, $t \in [0,T]$ (bzw. $p(.) \in \mathcal{A}_-(-x,\tau) \wedge p(t) \in K_-$, $t \in [0,T]$). Die zugehörigen Mengen restringiert zulässiger Portfolio-Prozesse zu gestoppten Vermögensprozessen werden mit $\mathcal{A}(x,\tau;K_+)$ bzw. $\mathcal{A}_-(-x,\tau;K_-)$ bezeichnet. Ohne Berücksichtigung einer Stoppzeit gelten die bereits eingeführten Bezeichnungen $\mathcal{A}(x;K_+)$ bzw.

---

[362] Vgl. *Karatzas/Kou* (1996), S. 348 f. Dies ist der für Optionspreisgrenzen im Schrifttum vorwiegend zu findende Fall.

[363] Dieser Menge liege eine Modifikation der Zulässigkeitsbedingung analog der Definition der Menge $\mathcal{A}_-(-x;K_-)$ zugrunde; vgl. diesbezüglich S. 200.

$\mathcal{A}_-(-x; K_-)$. Das Intervall zwischen Käufer- und Verkäuferpreis eines bedingten nicht negativen Anspruches $B(.)$ *amerikanischen Typs* ist dann wie folgt definiert[364]:

$$\begin{aligned} h^A_{low}(K_-) &:= \sup\{x \geq 0 \mid \exists \check{\tau} \in \mathcal{S}, \exists(\check{c}, \check{p}) \in \mathcal{A}_-(-x, \check{\tau}; K_-), \\ &\qquad \text{s.d.f.s. } X^{-x,\check{c},\check{p}}(\check{\tau}) \geq -B(\check{\tau})\}, \\ h^A_{up}(K_+) &:= \inf\{x \geq 0 \mid \exists(\hat{c}, \hat{p}) \in \mathcal{A}(x; K_+), \text{ s.d.f.s. } X^{x,\hat{c},\hat{p}}(\tau) \geq B(\tau), \ \forall \tau \in \mathcal{S}\}. \end{aligned}$$

Das entsprechende Intervall zu einem bedingten nicht negativen Anspruch $B(T)$ *europäischen Typs* ist wie folgt bestimmt[365]:

$$\begin{aligned} h^E_{low}(K_-) &:= \sup\{x \geq 0 \mid \exists(\check{c}, \check{p}) \in \mathcal{A}_-(-x; K-), \text{ s.d.f.s. } X^{-x,\check{c},\check{p}}(T) \geq -B(T)\}, \\ h^E_{up}(K_+) &:= \inf\{x \geq 0 \mid \exists(\hat{c}, \hat{p}) \in \mathcal{A}(x; K_+), \text{ s.d.f.s. } X^{x,\hat{c},\hat{p}}(T) \geq B(T)\}. \end{aligned}$$

Für die damit festgelegten Käufer- und Verkäuferpreise gilt folgende Aussage.

Satz 3.4 *Intervall arbitragefreier Preise (Karatzas/Kou)*[366]
Sowohl für einen amerikanischen als auch für einen europäischen Anspruch ist der Bereich arbitragefreier Preise gegeben durch das Intervall:

$$[h_{low}(K_-), h_{up}(K_+)].$$

Zum *Beweis* vgl. die angegebenen Quellen.

Dies bedeutet, dass die als Käufer- bzw. Verkäuferpreise im Hinblick auf ihre Möglichkeit des Hedgens definierten Werte zugleich die arbitragefreien Preise eingrenzen. Da Käufer- und Verkäuferpreise also mit den arbitragefreien Preisgrenzen übereinstimmen, kann vermutet werden, dass für diejenigen Ansprüche, welche auf einem vollständigen Kapitalmarkt aus Käufer- und/oder Verkäufersicht jeweils mit Konsum-/Portfolio-Prozessen erreicht werden, die auch restringiert zulässig sind, die Käufer- bzw. Verkäuferpreise den Preisen auf dem vollständigen Markt entsprechen. Betrachtet man hierzu einen europäischen Anspruch $B(T)$, so lässt sich aus der Beziehung zwischen den Mengen zulässiger Portfolio-Prozesse für einen vollständigen und einen unvollständigen Markt diesbezüglich die folgende Aussage ableiten.

Satz 3.5 *Käufer- und Verkäuferpreise für erreichbare Ansprüche*[367]
Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.16 sei der bedingte Anspruch $B(T) \geq 0$ *gegeben; ferner sei* $x = E_0\left[\frac{B(T)}{S_0(T)}\right] < \infty$ *und* $\frac{B(t)}{S_0(t)}$ *sei nach oben beschränkt* $(t \in [0, T])$. *Es werden integrierbare Portfolio-Prozesse in Relativbeträgen* $p(.)$,

[364] Vgl. *Karatzas/Kou* (1998), S. 224. Die Superskripte A und nachfolgend E werden im Weiteren wiederum weggelassen, sofern sie sich aus dem Zusammenhang ergeben.

[365] Vgl. *Karatzas/Kou* (1996), S. 331.

[366] Vgl. *Karatzas/Kou* (1998), S. 225 (Theorem 4.3), und *Karatzas/Kou* (1996), S. 333 (Theorem 5.2, Korollar 5.1).

[367] Vgl. zu der im Folgenden behandelten Identität des Preises auf einem vollständigen Kapitalmarkt und dem Verkäuferpreis von erreichbaren Ansprüchen bereits *El Karoui/Quenez* (1995), S. 35 f.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

so dass $\int_0^T \|p(t)\|^2\,dt < \infty$ gilt, betrachtet; die Portfolio-Prozesse $p(.)$ müssen zulässig, der diskontierte Gewinn-/Verlustprozess $\frac{G(.)}{S_0(.)} = \frac{X^{0,0,p}(.)}{S_0(.)}$ somit nach unten beschränkt sein.

- *Ist $B(T)$ mit einem Konsum-/Portfolio-Prozesspaar $(0,\bar{p})$ erreichbar, so dass*
  $(0,\bar{p}) \in \mathcal{A}(x; K_+)$ ist, dann gilt:

$$h_{up}^E(K_+) = x.$$

- *Ist $-B(T)$ mit einem Konsum-/Portfolio-Prozesspaar $(0,\hat{p})$ erreichbar — d.h. gilt $X^{-x,0,\hat{p}}(T) = -B(T)$ (fast sicher) —, für welches $(0,\hat{p}) \in \mathcal{A}_-(-x; K_-)$ ist, dann gilt:*

$$h_{low}^E(K_-) = x.$$

Beweis:
1. Wegen der Erreichbarkeit des Anspruches $B(T)$ gilt unmittelbar $x \in H_+ := \{\bar{x} \geq 0 \mid \exists(\hat{c},\hat{p}) \in \mathcal{A}(\bar{x}),$ so dass fast sicher $X^{\bar{x},\hat{c},\hat{p}}(T) \geq B(T)\}$. (Darüber hinaus ist $(0,\bar{p})$ der sogar restringiert zulässige Konsum-/Portfolio-Prozess, mit dem $X^{x,0,\bar{p}}(T) = B(T)$ gilt.) Angenommen $\exists\tilde{x} : \tilde{x} < x \wedge \tilde{x} \in H_+$, dann führt dies nach *Karatzas/Shreve* (1998), S. 23, auf folgenden Widerspruch: Da $\tilde{x} \in H_+$ gelten soll, gibt es $(\tilde{c},\tilde{p}) : X^{\tilde{x},\tilde{c},\tilde{p}}(T) \geq B(T)$. Hierfür muss, um Arbitrage auszuschließen, zudem $\frac{X^{\tilde{x},\tilde{c},\tilde{p}}(t)}{S_0(t)} \geq 0\,(\forall t)$ gelten; der (diskontierte) Vermögensprozess muss also nach unten begrenzt sein. Da dieser Vermögensprozess gemäß Gl. (2.28) eine Darstellung:

$$\frac{X^{\tilde{x},\tilde{c},\tilde{p}}(t)}{S_0(t)} + \int_0^t \frac{\tilde{c}(s)}{S_0(s)}\,ds = \tilde{x} + \int_0^t \frac{X^{\tilde{x},\tilde{c},\tilde{p}}(s)}{S_0(s)}\tilde{p}'(s)\sigma(s)\,dW_0(s), t \in [0,T],$$

besitzt, ist der Term der linken Seite dieser Gleichung ein nach unten beschränktes lokales Martingal und folglich ein Super-Martingal. Damit ergibt sich der folgende Widerspruch:

$$x = E_0\left[\frac{B(T)}{S_0(T)}\right] \leq E_0\left[\frac{X^{\tilde{x},\tilde{c},\tilde{p}}(T)}{S_0(T)}\right] \leq E_0\left[\frac{X^{\tilde{x},\tilde{c},\tilde{p}}(T)}{S_0(T)} + \int_0^t \frac{\tilde{c}(s)}{S_0(s)}\,ds\right] \leq \tilde{x}.$$

x muss somit der minimale Betrag sein, mit welchem der Anspruch $B(T)$ unrestringiert (mindestens) erreichbar ist. Da der Anspruch mit x jedoch auch restringiert erreichbar ist, muss $x = \inf\{\bar{x} \geq 0 \mid \exists(\hat{c},\hat{p}) \in \mathcal{A}(\bar{x}; K_+),$ so dass fast sicher $X^{\bar{x},\hat{c},\hat{p}}(T) \geq B(T)\} = h_{up}^E(K_+)$ sein.

2. Hinsichtlich der Preisuntergrenze gilt zunächst ebenfalls $x \in H_- := \{x \geq 0 \mid \exists(\check{c},\check{p}) \in \mathcal{A}_-(-x),$ so dass fast sicher $X^{-x,\check{c},\check{p}} \geq -B(T)\}$. x ist also eine Ausgangsverschuldungshöhe, welche in geeigneter Weise dynamisch strukturiert, mit dem erworbenen (bedingten) Anspruch $B(T)$ im Fälligkeitszeitpunkt beglichen werden kann. Es werde nun angenommen, dass

ein $\breve{x} \in H_- : \breve{x} > x$ existiert. Dann gibt es ein zulässiges Konsum-/Portfolio-Prozesspaar $(\breve{c}, \breve{p})$ mit $X^{-\breve{x},\breve{c},\breve{p}}(T) \geq -B(T)$. Die Betrachtung richtet sich somit auf ein Prozesspaar, welches auf einem vollständigen Markt zulässig ist. Es soll zunächst gezeigt werden, dass für den Vermögensprozess $X^{-\breve{x},0,\breve{p}}(.)$ (≤ 0), welcher bei einem Ausgangsvermögen von $-\breve{x}$ durch den Konsum-/Portfolioprozess $(0, \breve{p})$ entsteht, gilt: $X^{-\breve{x},0,\breve{p}}(t) \geq X^{-\breve{x},\breve{c},\breve{p}}(t)$, $t \in [0,T]$[368]. Damit kann für jedes $\tilde{x} \in H_-$ ein Konsum-/Portfolio-Prozesspaar betrachtet werden, nach welchem nie etwas konsumiert wird. Für die Vermögensprozesse gelten die folgenden stochastischen Differentialgleichungen für $t \in [0,T]$[369]:

$$dX^{-\breve{x},\breve{c},\breve{p}}(t) = -\breve{c}(t)\,dt + X^{-\breve{x},\breve{c},\breve{p}}(t)\left(r(t)\,dt + p'(t)\sigma(t)\,dW_0(t)\right), \quad (3.91)$$
$$dX^{-\breve{x},0,\breve{p}}(t) = X^{-\breve{x},0,\breve{p}}(t)\left(r(t)\,dt + p'(t)\sigma(t)\,dW_0(t)\right). \quad (3.92)$$

Es sei nun $(t \in [0,T])$:

$$\Delta(t) := X^{-\breve{x},0,\breve{p}}(t) - X^{-\breve{x},\breve{c},\breve{p}}(t),$$

so dass mit $d\left(\frac{1}{S_0(t)}\right) = -\frac{1}{S_0(t)}r(t)\,dt$ folgt:

$$d\left(\frac{\Delta(t)}{S_0(t)}\right) = \frac{1}{S_0(t)}\left[c(t)\,dt + \Delta(t)p'(t)\sigma(t)\,dW_0(t)\right].$$

Ferner werde der Prozess:

$$J(t) := e^{-\int\limits_0^t p'(s)\sigma(s)\,dW_0(s) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|p'(s)\sigma(s)\|^2\,ds},$$

so dass:

$$dJ(t) = J(t)\left(-p'(t)\sigma(t)\,dW_0(t) + \|p'(t)\sigma(t)\|^2\,dt\right)$$

für $t \in [0,T]$ gilt, eingeführt. Damit ergibt sich mit Hilfe der Itô-Formel und wenigen Umformungen:

$$d\left(\frac{\Delta(t)}{S_0(t)}J(t)\right) = \frac{1}{S_0(t)}J(t)c(t)\,dt.$$

Integrieren führt unter Berücksichtigung von $\Delta(0) = 0$ auf:

$$\Delta(t) = \frac{S_0(t)}{J(t)}\int\limits_0^t \frac{1}{S_0(s)}J(s)c(s)\,ds \geq 0,\ t \in [0,T].$$

Damit gilt: $X^{-\breve{x},0,\breve{p}}(t) \geq X^{-\breve{x},\breve{c},\breve{p}}(t)$, $t \in [0,T]$. Es werde nun die Vermögensgleichung zum Prozess $X^{-\breve{x},0,\breve{p}}(.)$ betrachtet. Sie lautet:

$$\frac{X^{-\breve{x},0,\breve{p}}(t)}{S_0(t)} = -\breve{x} + \int\limits_0^t \frac{X^{-\breve{x},0,\breve{p}}(s)}{S_0(s)}\breve{p}'(s)\sigma(s)\,dW_0(s),\ t \in [0,T].$$

[368] Die Beweisidee ist im Grundsatz *Karatzas/Shreve* (1998), S. 267 f., entlehnt.
[369] Vgl. Gl. (2.15) i.V.m. der *Girsanov*-Transformation $dW_0(t) = dW(t) + \theta(t)\,dt$.

Da das Konsum-/Portfolio-Prozesspaar $(\breve{c}, \breve{p})$ zulässig war, muss auch das Paar $(0, \breve{p})$ zulässig sein, d.h. $X^{-\breve{x},0,\breve{p}}(.)$ muss nach unten beschränkt sein. Damit ist auch die linke Seite der vorausgehenden Vermögensgleichung nach unten beschränkt. Nach Satz 2.5 ist dann der Ausdruck der rechten Seite der Vermögensgleichung ein Super-Martingal, so dass gilt:

$$-x = E_0\left[\frac{-B(T)}{S_0(T)}\right] \leq E_0\left[\frac{X^{-\breve{x},0,\breve{p}}(T)}{S_0(T)}\right] \leq -\breve{x} \;\Leftrightarrow\; x \geq \breve{x},$$

was im Widerspruch zur Annahme steht. Somit gibt es kein unrestringiert zulässiges Konsum-/Portfolio-Prozesspaar $(\breve{c}, \breve{p})$ zu einer Ausgangsverschuldung im Betrag von $\breve{x} > x$, mit welchem der Käufer des Anspruches $B(T)$ (fast) sicher keinen Verlust in $t = T$ erleidet. Damit aber gibt es auch kein entsprechendes, restringiert zulässiges Paar. Demgegenüber ist nach Voraussetzung $(0, \hat{p})$ ein restringiert zulässiges Paar zur Ausgangsverschuldung in betragsmäßiger Höhe von x, mit welchem ein Verlust aus dem Erwerb des Anspruches (fast sicher) vermieden werden kann, so dass dies zugleich die Höhe des Käuferpreises ist. $\square$

Es werden nun allgemeine, insbesondere auch nicht erreichbare Ansprüche behandelt. Die Preisgrenzen amerikanischer und europäischer bedingter Ansprüche können mit Hilfe der in *Abschnitt 3.3.1* eingeführten fiktiven Hilfsmärkte dargestellt werden. Ausgehend von der dort definierten Menge $\mathcal{D} = \left\{\nu : [0,T] \times \Omega \to \tilde{K} \;\middle|\; E\left[\int_0^T (\| \nu(t) \|^2 + \zeta(\nu(t)))\, dt\right] < \infty\right\}$ wird zusätzlich verlangt, dass der Schattenpreisprozess $\nu(.)$ endlich ist. Es wird deshalb die folgende Menge für die zu betrachtenden Schattenpreise zugrunde gelegt:

$$\mathcal{D}^b := \left\{\nu(.) \in \mathcal{D} \;\middle|\; \sup_{(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega} \| \nu(t,\omega) \|^2 < \infty\right\}.$$

Darauf basierend werden die durch die Gl. (3.14)-(3.19) bestimmten Prozesse des Schattenmarktes $\mathcal{M}_\nu$ verwendet. Bei verschiedenen Mengen $\tilde{K}_{+/-}$ sind die entsprechenden Mengen $\mathcal{D}_+^{(b)}$ bzw. $\mathcal{D}_-^{(b)}$ von Schattenpreisprozessen und die sich daraus über die Gl. (3.14)-(3.19) ableitenden Markt- und Bewertungs-Prozesse zu unterscheiden. Es soll generell unterstellt werden, dass die Koeffizientenprozesse $b(.), r(.), \sigma(.)$ und $\delta(.)$ gleichmäßig beschränkt sind, mithin auch der Prozess $\theta(.)$ — bei entsprechender Invertierbarkeit von $\sigma(.)$ und Beschränktheit der Inversen. Aus der Beschränktheit von $\nu(.) \in \mathcal{D}^b$ folgt dann, dass $Z_\nu(.)$ nach Gl. (3.18) ein Martingal ist und $W_\nu(.)$ gemäß Gl. (3.19) ein Wiener-Prozess[370]. Für den betrachteten Anspruch $B(.)$ gelte: $E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\frac{B(t)}{S_0(t)}\right)^\gamma\right] < \infty$ für ein $\gamma > 1$, so dass auf dem vollständigen Kapitalmarkt ein duplizierender Konsum-/Portfolio-Prozess und folglich ein endlicher Preis des bedingten Anspruches existiert. Es wird zudem von $B(.) \geq 0$ (fast

[370] Vgl. *Karatzas/Kou* (1998), S. 228, mit leicht modifizierter Definition von $\mathcal{D}^b$.

sicher, fast immer) ausgegangen. Mit den Definitionen:

$$
\begin{aligned}
u_\nu^E &:= E_\nu\left[\frac{B(T)}{S_0^\nu(T)}\right], \\
\breve{u}^E &:= \inf_{\nu(.)\in\mathcal{D}^b} u_\nu^E, \\
\hat{u}^E &:= \sup_{\nu(.)\in\mathcal{D}^b} u_\nu^E, \\
u_\nu^A &:= \sup_{\tau\in\mathcal{S}} E_\nu\left[\frac{B(\tau)}{S_0^\nu(\tau)}\right], \\
\breve{u}^A &:= \inf_{\nu(.)\in\mathcal{D}^b} u_\nu^A, \\
\hat{u}^A &:= \sup_{\nu(.)\in\mathcal{D}^b} u_\nu^A
\end{aligned}
$$

gilt die nachfolgende Aussage.

Satz 3.6 *Allgemeine Arbitragegrenzen europäischer und amerikanischer Optionen*
Sei $B(.)$ ein nicht negativer, bedingter Anspruch mit den zuvor bezeichneten Eigenschaften. Ferner gelten die Bedingungen $\mathcal{B}1$, so dass $\zeta(\nu) = \zeta_-(\nu)$ für jede Ausprägung des Prozesses $\nu(.) \in \mathcal{D}^b$ im Planungszeitraum gilt und insbesondere $\zeta_-(\nu)$ nach unten beschränkt ist sowie $\tilde{K}_+ = \tilde{K}_- = \tilde{K}$ ist.

- *Ist der Anspruch europäischen Typs, so gilt:*

$$
\begin{aligned}
h_{up}^E(K_+) &= \hat{u}^E, && (3.93)\\
h_{low}^E(K_-) &= \breve{u}^E. && (3.94)
\end{aligned}
$$

- *Ist der Anspruch amerikanischen Typs, so sind:*

$$
\begin{aligned}
h_{up}^A(K_+) &= \hat{u}^A, && (3.95)\\
h_{low}^A(K_-) &\leq \breve{u}^A. && (3.96)
\end{aligned}
$$

Ungleichung (3.96) ist mit Gleichheit erfüllt, falls $h_{up}^A(K_+) < \infty$ oder $\breve{u}^A = 0$ gilt.

Zu Satz und *Beweis*: Die Aussage zu europäischen bedingten Ansprüchen entspricht einer Spezialisierung von *Karatzas/Kou* (1996), S. 337 (Theorem 6.1). Deren Theorem erlaubt eine Differenzierung zwischen $\tilde{K}_+$ und $\tilde{K}_-$ und setzt für die Bestimmung von h_{low}^E nur voraus, dass $\zeta_-(.)$ nach unten durch eine reelle Konstante beschränkt ist. Zum Beweis des diesbezüglichen Aussagenteils sei auf *Karatzas/Kou* (1996), S. 337 ff., und auf *Cvitanić/Karatzas* (1993), S. 662 ff., verwiesen. Der Aussagenteil zu amerikanischen bedingten Ansprüchen findet sich mit Beweis in *Karatzas/Kou* (1998), S. 229 ff. (Theorems 5.12 und 5.13).

Bei *konstanten Koeffizientenprozessen* können die Ausdrücke vereinfacht werden, da Bewertungsverfahren für „gewöhnliche" Optionen anwendbar werden. In dieser Hinsicht leiten *Broadie/Cvitanić/Soner* (1998) den Verkäuferpreis eines europäischen Anspruches her und erweitern ihr Ergebnis unter

Verwendung der allgemeinen Resultate von *Karatzas/Kou* (1998) auf einen amerikanischen bedingten Anspruch. *Karatzas/Kou* (1998), S. 235-245, greifen die Spezialisierung für den Fall eines amerikanischen Anspruches auf und entwickeln darüber hinaus den zugehörigen Käuferpreis. Schließlich behandeln *Karatzas/Shreve* (1998), S. 254-257, einen europäischen Anspruch aus Käufersicht. Die folgende Darstellung schließt sich diesen Quellen an[371]. Im Einzelnen ist für das (unmittelbar) Folgende vorauszusetzen:

Die Koeffizientenprozesse seien *konstant* $\sigma(.) \equiv \sigma, \delta(.) \equiv \delta$ und $r(.) \equiv r$ mit $r \geq 0$. Ferner sei der Prozess $\theta_0(.)$[372] beschränkt. Für den betrachteten Anspruch $B(.)$ gelten die bereits formulierten Bedingungen; zudem besitze er eine Darstellung:

$$B(t) = \vartheta(S_1(t), \ldots, S_n(t)),\ 0 \leq t \leq T,$$

wobei $\vartheta : (0, \infty)^n \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion sei[373]. Die Restriktionen erfüllen die Bedingungen $\mathcal{B}1$, so dass mit $\tilde{K}_+ = \tilde{K}_- = \tilde{K}$ und $\zeta(\nu) = \zeta_-(\nu)$ die folgenden Funktionen definiert werden können:

$$\vartheta^V(z) := \sup_{\nu \in \tilde{K}} \left[e^{-\zeta(\nu)} \vartheta(z_1 e^{-\nu_1}, \ldots, z_n e^{-\nu_n}) \right],\ z \in (0, \infty)^n, \tag{3.97}$$

$$\vartheta^K(z) := \inf_{\nu \in \tilde{K}} \left[e^{-\zeta(\nu)} \vartheta(z_1 e^{-\nu_1}, \ldots, z_n e^{-\nu_n}) \right],\ z \in (0, \infty)^n. \tag{3.98}$$

Es gelten dann die Aussagen des folgenden Satzes.

---

[371] Der Dividendenprozess wird in den angegebenen Quellen großteils vernachlässigt, wobei lediglich von einer Darstellungsvereinfachung auszugehen ist. Bei *Broadie/Cvitanić/Soner* (1998), S. 61 (Fn. 4), findet sich ein Hinweis auf die Gültigkeit der Aussagen auch bei dessen Nichtvernachlässigung. Vor dem hier gegebenen Hintergrund ist es sachgerecht, Dividenden einzubeziehen. Die Wirkung des Dividendenvektors besteht in einer Änderung des Aktienkursprozesses *nach* dem Maßwechsel sowie des Maßwechselprozesses $\theta(.)$, welche für das Folgende jedoch als eher unwesentlich zu bezeichnen ist. Bis auf notationelle Modifikationen sind davon auch die den Aussagen zugrunde liegenden Beweise, für die auf die Originalarbeiten verwiesen wird, nicht betroffen. Auf eine entsprechende Darstellung wird deshalb verzichtet.

[372] Dieser ist identisch mit dem Prozess $\theta(.)$ des vollständigen Marktes.

[373] Für die im Folgenden wiedergegebenen Aussagen von *Broadie/Cvitanić/Soner* (1998) genügt auch eine „lower semi-continuous function"; vgl. *Broadie/Cvitanić/Soner* (1998), S. 62. Eine Funktion $f : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}_+$ ist lower semi-continuous, wenn

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^k :\ f(x) \leq \lim \inf_{\substack{y \to x \\ y \in \mathbb{R}_+^k}} f(y)$$

(vgl. *ebd.* (Fn. 5) oder *Carter* (2001), S. 216 f.). *Karatzas/Shreve* (1998), S. 254, gehen von einer „upper semi-continuous function" bei der Bestimmung des Käuferpreises, welche einer analogen Definition unterliegt, sowie allgemein von einer Funktion aus, die bestimmten Wachstumsbedingungen genügt — dies allerdings nur, um die hier ohnehin vorausgesetzte Bedingung für die Erreichbarkeit des Anspruches unter unbeschränkten Marktbedingungen zu gewährleisten. Da die Funktion $\vartheta(.)$ im Weiteren verwendet wird, um das Auszahlungsprofil einer (ggf. indizierten) Kaufoption abzubilden, ist eine Differenzierung hier unnötig.

Satz 3.7 *Preisgrenzen für Optionen bei konstanten Koeffizienten*
Unter den gerade beschriebenen Voraussetzungen gilt

- *für einen europäischen Anspruch $B(.)$:*

  - *Der Verkäuferpreis ist (Broadie/Cvitanić/Soner (1998, S. 63; Theorem 2)):*
  $$h_{up}^{E}(K_{+}) = E_0\left[e^{-rT}\vartheta^{V}(S_1(T),\ldots,S_n(T))\right]. \tag{3.99}$$

  - *Der Käuferpreis beträgt (Karatzas/Shreve (1998, S. 254; Theorem 5.10.1)):*
  $$h_{low}^{E}(K_{-}) = E_0\left[e^{-rT}\vartheta^{K}(S_1(T),\ldots,S_n(T))\right]. \tag{3.100}$$

- *für einen amerikanischen Anspruch $B(.)$:*

  - *Der Verkäuferpreis ist gegeben durch (Karatzas/Kou (1998, S. 236; Theorem 6.1), Broadie/Cvitanić/Soner (1998, S. 64; Corollary 1)):*
  $$h_{up}^{A}(K_{+}) = \sup_{\tau\in\mathcal{S}} E_0\left[e^{-r\tau}\vartheta^{V}(S_1(\tau),\ldots,S_n(\tau))\right]. \tag{3.101}$$

  - *Hinsichtlich der den Käuferpreis nach oben beschränkenden Größe $\breve{u}^A$ gilt (Karatzas/Kou (1998, S. 236; Theorem 6.2)):*
  $$\breve{u}^{A} \geq \sup_{\tau\in\mathcal{S}} E_0\left[e^{-r\tau}\vartheta^{K}(S_1(\tau),\ldots,S_n(\tau))\right], \tag{3.102}$$

    wobei die Bedingung (3.102) im Fall $\breve{u}^A = 0$ mit Gleichheit erfüllt ist. Bei $\hat{u}^A < \infty$ kann die Ungleichung strikt sein.

Zum *Beweis* der Aussagenteile siehe die angegebenen Quellen.

Eine bedeutende Vereinfachung bei der Ermittlung von Unter- und Obergrenzen ist mit Satz dadurch gegeben[374], dass die Optimierung nicht über einen Schattenpreis*prozess* $\nu(.)$, sondern lediglich noch über einen Vektor $\nu \in \tilde{K}$ zu erfolgen hat — im Fall von amerikanischen Ansprüchen jedoch weiterhin auch über die Stoppzeit τ. Das gemischte Optimale-Stopp-und-Kontroll-Problem hat sich auf ein Optimales-Stopp-Problem reduziert. Die Vereinfachung gelingt für europäische Ansprüche allgemein und amerikanische Ansprüche aus Verkäufersicht. Für einen amerikanischen Anspruch, der aus Käufersicht zu bewerten ist, kann, falls sich ein endlicher Verkäuferpreis ($< \infty$) ermitteln lässt, nur eine Untergrenze für den Käuferpreis angegeben werden, da in diesem Fall zwar $h_{low}^{A} = \breve{u}^{A}$ gilt, trotzdem jedoch $\breve{u}^{A} > \sup_{\tau\in\mathcal{S}} E_0\left[e^{-r\tau}\vartheta^{K}(S_1(\tau),\ldots,S_n(\tau))\right]$ sein kann. Hilfreich mag in diesem Fall die folgende Aussage sein.

[374] Vgl. den Hinweis bei *Karatzas/Kou* (1998), S. 235 f.

Satz 3.8 *Preisgrenzen nach Restriktionscharakteristika*
Es seien $S_i(.)$ $(i = 1,2)$ Aktienkursprozesse mit $dS_i(t) = S_i(t)(b_i(t)\,dt + \sigma_{i1}(t)\,dW_1(t) + \sigma_{i2}(t)\,dW_2(t))$ und $S_i(0) := S_{i,0}$. Auf $S_1(.)$ werde eine kontinuierliche Dividende, beschrieben durch den Prozess der Rate $\delta(.) \geq 0$, ausgeschüttet. Die Parameterprozesse $b_i(.)\,(i = 1,2), \delta(.)$ und $r(.) \geq 0$ seien beschränkt; ebenso sei $\sigma(.) := (\sigma_{ij}(.))_{i=1,2;j=1,2}$ beschränkt und invertierbar. Des Weiteren erfüllen die Restriktionenmengen K_+ und K_- das Bedingungssystem $\mathcal{B}1$. Über die Preisgrenzen einer amerikanischen (indizierten) Kaufoption auf den Anspruch mit Auszahlungsprofil $B(t) = \max\left[S_1(t) - S_2(t), 0\right]$ $(t \in [0, \mathcal{T}])$ kann dann Folgendes gesagt werden:

- *Gilt*
$$\zeta(\nu) + \nu_1 \textit{ ist nicht negativ auf } \tilde{K}, \tag{3.103}$$
dann ist:
$$h^A_{up}(K_+) \leq S_1(0). \tag{3.104}$$

- *Gelten*
$$\begin{aligned}&\zeta(\nu) + \nu_1 \; (\nu_2 \textit{ bel., mit } (\nu_1, \nu_2) \in \tilde{K}) \textit{ ist nach oben nicht durch}\\ &\textit{eine reelle Zahl beschränkt und } \forall \nu_1 \exists \nu_2 : \; \nu_2 + \zeta(\nu) \leq 0,\end{aligned} \tag{3.105}$$
dann ist:
$$h^A_{low}(K_-) = B(0) = \max\left[S_1(0) - S_2(0), 0\right]. \tag{3.106}$$

Dieser Satz und der dazugehörige Beweis sind an *Karatzas/Kou* (1998), S. 234 f. (Proposition 5.21), S. 238 f. (Example 5.4), angelehnt. In *Karatzas/Kou* (1998), S. 234 f. (Proposition 5.21), wird eine amerikanische Kaufoption mit $S_2(.) \equiv q \in \mathbb{R}_+$, d.h. mit festem Basispreis, sowie ohne Dividendenzahlungen auf das Underlying betrachtet. Ein unvollständiger Kapitalmarkt i.e.S. wird in *Karatzas/Kou* (1998), S. 238 f., behandelt. Der in dieser Quelle angegebene Satz wird hier angemerkt:

Anmerkung 3.3 *(Karatzas/Kou (1998))*[375]
Unter den Bedingungen des Satzes 3.8 gilt bei einem konstanten Basispreis ($b_2 = \sigma_{21} = \sigma_{22} = 0$; dann mit $\nu_2(.) \equiv 0$) und ohne Dividendenausschüttung auf das Underlying ($\delta(.) \equiv 0$):

- *Falls darüber hinaus $\zeta(\nu) + \nu_1$ größergleich null und nach oben unbeschränkt auf $\tilde{K}$ ist, dann sind Preisober- und Preisuntergrenze durch die Bedingungen (3.104) und (3.106) gegeben.*

- *Auf einem unvollständigen Kapitalmarkt i.e.S. bezüglich des Underlyings ist die Preisuntergrenze durch Gl. (3.106) gegeben.*

[375] Vgl. *ebd.*, S. 234 f. (Proposition 5.21), S. 238 f. (Example 5.4; verkürzt).

Den zweiten Teil von Bedingung (3.105) erfüllen insbesondere Restriktionen, für die $\zeta(\nu) \equiv 0$ gilt, da grundsätzlich $\mathbf{0}_2 \in \tilde{K}$ ist. Die Aussage von Anmerkung gilt ebenso für einen nicht-verschwindenden Dividendenprozess, welcher hier als deterministisch und beschränkt vorausgesetzt wird[376]. Im Folgenden wird ein Beweis des Satzes 3.8 angegeben, dessen Struktur aus der angegebenen Quelle übernommen und durch die notwendigen Anpassungen aufgrund der hier betrachteten indizierten Option und weiterer Verallgemeinerungen abgeändert ist.

Beweis: zu Satz 3.8
Es werde zunächst der folgende Prozess betrachtet, welcher aus dem Aktienkursprozess $S_1(.)$ (des Originalmarktes) durch Diskontierung mit dem risikolosen Bond des Schattenmarktes $\mathcal{M}_\nu$ nach Gl. (3.14) hervorgeht; ferner erfolgt mit Hilfe der *Girsanov*-Transformation ein Übergang auf den Wiener-Prozess $W_\nu(.)$ gemäß Gl. (3.19)[377]:

$$\begin{aligned} d\tfrac{S_1(t)}{S_0^\nu(t)} &= \tfrac{S_1(t)}{S_0^\nu(t)}\left((b_1(t)-r(t)-\zeta(\nu(t)))\,dt+\sigma_{1.}(t)\,dW(t)\right) \\ &= \tfrac{S_1(t)}{S_0^\nu(t)}\left((-\zeta(\nu(t))-\nu_1(t)-\delta(t))\,dt+\sigma_{1.}(t)\,dW_\nu(t)\right), \end{aligned}$$

wobei $\sigma_{i.}(t) := (\sigma_{i1}(t), \sigma_{i2}(t))$ $(i = 1, 2)$ ist und den den i-ten Zeilenvektor der Matrix $\sigma(t)$ $(t \in [0, T])$ repräsentiert. Der Prozess hat nun folgende Darstellung:

$$\frac{S_1(t)}{S_0^\nu(t)} = S_1(0)e^{-\int_0^t(\zeta(\nu(s))+\nu_1(s)+\delta(s))\,ds}\underbrace{e^{-\frac{1}{2}\int_0^t\|\sigma_{1.}(s)\|^2\,ds-\int_0^t\sigma_{1.}(s)\,dW_\nu(s)}}_{=:\,M_\nu(t)},\quad t\in[0,T], \tag{3.107}$$

wobei der hierdurch definierte Prozess $M_\nu(.)$ ein P_ν-Martingal ist.

Zur Herleitung der Beziehung (3.104):
Aus Gl. (3.107) folgt unter der Bedingung $\zeta(\nu) + \nu_1 \geq 0$, $\delta(.) \geq 0$, dass der Prozess $\frac{S_1(.)}{S_0^\nu(.)}$ ein P_ν-Super-Martingal $(\forall \nu(.) \in \mathcal{D}^b)$ ist. Gemäß Gl. (3.95) (Satz 3.6) mit Gl. (3.107) gilt dann:

$$\begin{aligned} h^A_{up}(K_+) &= \hat{u}^A = \sup_{\tau\in\mathcal{S}} E_\nu\left[\frac{B(\tau)}{S_0^\nu(\tau)}\right] = \sup_{\tau\in\mathcal{S}} E_\nu\left[\frac{\max\left[S_1(\tau)-S_2(\tau),0\right]}{S_0^\nu(\tau)}\right] \\ &\leq \sup_{\tau\in\mathcal{S}} E_\nu\left[\frac{S_1(\tau)}{S_0^\nu(\tau)}\right] = \frac{S_1(0)}{S_0^\nu(0)} = S_1(0), \end{aligned}$$

wobei Satz 2.3 („optional sampling“) verwendet wurde. Ferner ist zu berücksichtigen, dass $S_2(.) \geq 0$ (fast sicher, fast immer) gilt.

[376] Dies ergibt sich aus den Beweisen in *Karatzas/Kou* (1998), auf die bezüglich Anmerkung 3.3 verwiesen wird.
[377] Es sei daran erinnert, dass Parameterprozesse unterstellt werden, für die $Z_\nu(.)$ ein Martingal ist.

Zur Herleitung der Gl. (3.106):
Es werden nun beliebige $0 < \epsilon < T, \tau \in \mathcal{S}$ und beliebige Prozesse $\nu(.) \in \mathcal{D}^b$, die deterministisch sind und so gewählt werden, dass für die Ausprägung ν zu einem beliebigen Zeitpunkt in $[0,T]$ $\zeta(\nu) + \nu_1 \geq 0$[378] ist und ν_2 den zweiten Teil der Bedingung (3.105) erfüllt, betrachtet. Damit ist insbesondere $\nu(.) \equiv \mathbf{0}_2$ möglich, so dass mindestens ein Schattenpreisvektor existiert, der diese Bedingungen erfüllt. Dann gilt mit Gl. (3.107):

$$
\begin{aligned}
&E_\nu \left[(S_0^\nu(\tau))^{-1} \max\left[S_1(\tau) - S_2(\tau), 0\right]\right] \\
&\leq E_\nu \left[(S_0^\nu(\tau))^{-1} S_1(\tau) 1_{\{\tau > \epsilon\}}\right] \\
&\quad + E_\nu \left[\max\left[(S_0^\nu(\tau))^{-1} S_1(\tau) - (S_0^\nu(\tau))^{-1} S_2(\tau), 0\right] 1_{\{\tau \leq \epsilon\}}\right] \\
&\leq \underbrace{E_\nu \left[\left(S_1(0) e^{-\int_0^\tau (\zeta(\nu(s)) + \nu_1(s) + \delta(s))\, ds} M_\nu(\tau) \right) 1_{\{\tau > \epsilon\}} \right]}_{=:\, A} \\
&\quad + \underbrace{E_\nu \left[\max\left[(S_0^\nu(\tau))^{-1} S_1(\tau) - (S_0^\nu(\tau))^{-1} S_2(\tau), 0\right] 1_{\{\tau \leq \epsilon\}}\right]}_{=:\, B}.
\end{aligned}
$$

Für den Ausdruck A ergibt sich mit obigen Voraussetzungen die folgende Abschätzung:

$$
A \leq S_1(0) e^{-\int_0^\tau (\zeta(\nu(s)) + \nu_1(s)(s))\, ds} E_\nu \left[M_\nu(\tau) \right] = S_1(0) e^{-\int_0^\epsilon (\zeta(\nu(t)) + \nu_1(t))\, dt}. \tag{3.108}
$$

Stellt man im Ausdruck B die Aktienkursprozesse in Abhängigkeit ihrer Parameter dar, dann ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
B = E_\nu \Bigg[\Bigg(\max \Bigg[& S_{1,0} e^{\int_0^\tau \left(-(r(t) + \zeta(\nu(t))) + r(t) - \delta(t) - \nu_1(t) - \frac{1}{2}(\sigma_{11}^2(t) + \sigma_{12}^2(t)) \right) dt + \int_0^\tau \sigma_{1.}(t)\, dW_\nu(t)} \\
& - S_{2,0} e^{\int_0^\tau \left(-(r(t) + \zeta(\nu(t))) + r(t) - \nu_2(t) - \frac{1}{2}(\sigma_{21}^2(t) + \sigma_{22}^2(t)) \right) dt + \int_0^\tau \sigma_{2.}(t)\, dW_\nu(t)}, 0 \Bigg] \Bigg) 1_{\{\tau \leq \epsilon\}} \Bigg].
\end{aligned}
$$

Es wird nun ein Maßwechsel über den wie folgt definierten Prozess:

$$
dZ_I(t) = -Z_I(t) \theta_I'(t)\, dW(t) \text{ mit } \theta_I(t) := -\sigma_{2.}'(t) + \theta_\nu(t),\ t \in [0,T],
$$

durchgeführt. $Z_I(.)$ stellt die *Radon-Nikodỳm*-Ableitung $\frac{dP_I}{dP}$ dar. Es gelten die folgenden Beziehungen zwischen den Wiener-Prozessen, die den hier betrachteten Maßen zuzuordnen sind:

$$
dW_I(t) = dW(t) + \theta_I(t)\, dt = dW_\nu(t) - \theta_\nu(t)\, dt + \theta_I(t)\, dt = dW_\nu(t) - \sigma_{2.}'(t)\, dt.
$$

[378] Zu beachten ist, dass generell $\mathbf{0}_2 \in \tilde{K}$ ist.

Damit lässt sich der Ausdruck B wie folgt umformen:

$$
\begin{aligned}
&B\\
&= E_I\left[\frac{Z_\nu(\tau)}{Z_I(\tau)}\left(\max\left[S_{1,0}e^{\int_0^\tau\left(-\zeta(\nu(t))-\delta(t)-\nu_1(t)-\frac{1}{2}\|\sigma_{1.}(t)\|^2\right)dt+\int_0^\tau \sigma_{1.}(t)\,dW_\nu(t)}\right.\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\left.-S_{2,0}e^{\int_0^\tau\left(-\zeta(\nu(t))-\nu_2(t)-\frac{1}{2}\|\sigma_{2.}(t)\|^2\right)dt+\int_0^\tau \sigma_{2.}(t)\,dW_\nu(t)},0\right]\right)1_{\{\tau\le\epsilon\}}\right]\\
&= E_I\left[e^{\int_0^\tau\|\sigma_{2.}(t)\|^2\,dt}\left(\max\left[S_{1,0}e^{\int_0^\tau\left(-\zeta(\nu(t))-\delta(t)-\nu_1(t)-\frac{1}{2}\|\sigma_{1.}(t)\|^2-\frac{1}{2}\|\sigma_{2.}(t)\|^2+\sigma_{1.}\sigma_{2.}'\right)dt}\right.\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\left.e^{\int_0^\tau(\sigma_{1.}(t)-\sigma_{2.}(t))\,dW_I(t)}-S_{2,0}e^{\int_0^\tau(-\zeta(\nu(t))-\nu_2(t))\,dt},0\right]\right)1_{\{\tau\le\epsilon\}}\right].
\end{aligned}
$$

Mit dem P_I-Martingal:

$$
M_I(t):=e^{-\frac{1}{2}\int_0^t\|\sigma_{1.}(s)-\sigma_{2.}(s)\|^2\,ds+\int_0^t(\sigma_{1.}(s)-\sigma_{2.}(s))\,dW_I(s)}
$$

erhält der Ausdruck B die Gestalt:

$$
\begin{aligned}
B \quad = \quad & E_I\left[e^{\int_0^\tau\|\sigma_{2.}(t)\|^2\,dt}\left(\max\left[S_{1,0}e^{\int_0^\tau(-\zeta(\nu(t))-\delta(t)-\nu_1(t))\,dt}M_I(\tau)\right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.-S_{2,0}e^{\int_0^\tau(-\zeta(\nu(t))-\nu_2(t))\,dt},0\right]\right)1_{\{\tau\le\epsilon\}}\right].
\end{aligned}
$$

Da Schattenpreise mit $\zeta(\nu(.))+\nu_1(.)\ge 0$ betrachtet werden und $\delta(.)\ge 0$ vorausgesetzt ist, ergibt sich die Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
&B\\
&\le E_I\left[\underbrace{e^{\int_0^\tau\|\sigma_{2.}(t)\|^2\,dt}}_{=:\,C}\left(\max\left[S_{1,0}M_I(\tau)-\underbrace{S_{2,0}e^{\int_0^\epsilon\max[-\zeta(\nu(t))-\nu_2(t),0]\,dt}}_{=:\,\bar{S}_2(\epsilon)},0\right]\right)1_{\{\tau\le\epsilon\}}\right].
\end{aligned}
$$

Aufgrund von *Jensen's* Ungleichung[379], der Konvexität der Funktion $\max[.,0]$ sowie mit $C\ge 0$ gilt $\forall t\in[0,T]$:

$$
\begin{aligned}
&E_I\left[C\max\left[S_{1,0}M_I(t)-\bar{S}_2(\epsilon),0\right]\right]\\
&\ge\max\left[S_{1,0}E_I\left[M_I(t)\right]-\bar{S}_2(\epsilon),0\right]=\max\left[S_{1,0}M_I(0)-\bar{S}_2(\epsilon),0\right]\\
&=\max\left[S_{1,0}E_I\left[\underbrace{M_I(0)}_{\equiv 1}\right]-\bar{S}_2(\epsilon),0\right]=E_I\left[\max\left[S_{1,0}M_I(0)-\bar{S}_2(\epsilon),0\right]\right],
\end{aligned}
$$

[379] Vgl. *Elliott* (1982), S. 4. *Jensen's* Ungleichung besagt Folgendes: Sind $\Psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine konvexe Abbildung und Y eine integrierbare Zufallsvariable, so dass auch $\Psi(Y)$ integrierbar ist, dann gilt (fast sicher):

$$
\Psi(E[Y])\le E[\Psi(Y)].
$$

so dass der Prozess $\max\left[S_{1,0}M_I(.) - \bar{S}_2(\epsilon), 0\right]$ ein P_I-Sub-Martingal ist. Damit gilt:

$$B \leq \underbrace{E_I\left[\max\left[S_{1,0}M_I(\epsilon) - \bar{S}_2(\epsilon), 0\right]\right]}_{=: B_\nu(\epsilon)}.$$

Nunmehr ist:

$$A + B \leq S_1(0)e^{-\int_0^\epsilon (\zeta(\nu(t)) + \nu_1(t))\, dt} + B_\nu(\epsilon).$$

Da $\zeta(\nu(.)) + \nu_1$ nach oben nicht durch eine reelle Zahl begrenzt ist und da es nach Voraussetzung zu jedem ν_1 ein $\nu_2 \in \tilde{K}$ gibt mit $\nu_2 + \zeta(\nu) \leq 0$, ergibt sich Folgendes:

$$\begin{aligned} h_{low}^A(K_-) &\leq \inf_{\nu(.)\in\mathcal{D}^b} \sup_{\tau\in\mathcal{S}} \left[(S_0^\nu(\tau))^{-1} \max\left[S_1(\tau) - S_2(\tau), 0\right]\right] \\ &\leq \inf_{\nu(.)\in\mathcal{D}^b} \left[B_\nu(\epsilon) + S_1(0)e^{-\int_0^\epsilon (\zeta(\nu(t))+\nu_1(t))\, dt}\right] \\ &\leq B_0(\epsilon) + S_1(0) \inf_{\nu(.)\in\mathcal{D}^b} e^{-\int_0^\epsilon (\zeta(\nu(t))+\nu_1(t))\, dt} = B_0(\epsilon). \end{aligned}$$

Mit $\epsilon \in (0, T)$ beliebig und geeigneter Konvergenz kann geschrieben werden:

$$h_{low}^A(K_-) \leq \limsup_{\epsilon\downarrow 0} B_0(\epsilon) = \max\left[S_1(0) - S_2(0), 0\right] = \max\left[S_{1,0} - S_{2,0}, 0\right].$$

Die Untergrenze ist also höchstens so groß wie der Optionswert bei sofortiger Ausübung. Andererseits ist die sofortige Ausübung möglich, so dass die Preisuntergrenze auch größergleich dem Ausübungswert in $t = 0$ sein muss. Damit muss Gleichheit in obiger Beziehung herrschen. □

Die Ermittlung von Preisober- und -untergrenzen bedingter Ansprüche wird in *Abschnitt 3.3.4* aufgegriffen werden und zur Eingrenzung von Werten für Realoptionen Anwendung finden. Dort werden derartige Preisgrenzen insbesondere für verschiedene Typen von Kaufoptionen berechnet. Es kann deshalb an dieser Stelle auf die Angabe von Beispielen verzichtet werden.

Nachfolgend wird noch eine Vorgehensweise angesprochen, welche eine weitere Eingrenzung des Intervalles arbitragefreier Preise zu bedingten Ansprüchen zum Gegenstand hat. So genannte „good-deal asset price bounds" beruhen auf der Annahme, dass das Preisgefüge gerade auf unvollständigen Märkten dergestalt ist, dass (von allen Marktteilnehmern) *wünschenswerte Ansprüche*, welche über eine entsprechend zu definierende Anspruchsmenge eingeführt werden, nicht umsonst zu haben sind. Dies entspricht einer Verallgemeinerung des Arbitragekonzeptes, welches insofern enthalten ist, als jeder nicht-negative Anspruch mit positiver Wahrscheinlichkeit einer echt positiven Auszahlung als wünschenswerter Anspruch betrachtet werden kann.

3.3.3.1.2 Good-Deal Asset Price Bounds

Cochrane/Saá-Requejo[380] wenden das Konzept der „good-deals bounds" an, um Preise bedingter Ansprüche einzugrenzen, welche zum einen Arbitragefreiheit bedingen, zum anderen aber auch abnormale Überrenditen ausschließen. Eine Beschränkung von Überrenditen erfolgt durch die Vorgabe einer maximalen *Sharpe ratio*[381]. Es wird folglich davon ausgegangen, dass der Markt keine (Zustands-)Preise erlaubt, auf Basis derer Ansprüche mit einer *Sharpe ratio* größer einer vorgegebenen Grenze möglich sind. Etwaige Überrenditen würden durch Anpassungsmaßnahmen sofort bereinigt werden. In dem hierdurch eingeschränkten Raum möglicher Zustandspreise können beliebige bedingte Ansprüche bewertet werden. Es soll im Folgenden das Konzept der „good-deal bounds" anhand des Ansatzes von *Cochrane/Saá-Requejo* skizziert werden. Um die Konzeptidee darzustellen, genügt es hierbei, das Optimierungsproblem auf Basis der diskreten, einperiodigen Modellformulierung wiederzugeben.

Der Ansatz von *Cochrane/Saá-Requejo* basiert, in der zustandsdiskreten Formulierung für eine Periode[382], auf folgendem Optimierungsproblem zur Bestimmung einer Preisuntergrenze $\underline{C}$ für einen bedingten Anspruch mit zustandsabhängigem Auszahlungsprofil $x^C \in \mathbb{R}^k$[383]:

$$\begin{array}{lrcl} & \underline{C} & := & \min\limits_{m=(m_1,\ldots,m_d)\in\mathbb{R}^k} \sum\limits_{i=1}^{d} p_i m_i x_i^C \\ \text{unter} & s_j & = & \sum\limits_{i=1}^{d} p_i m_i x_i^j \, (j=1,\ldots,n)\,(*),\ \sum\limits_{i=1}^{d} p_i m_i^2 \leq A^2\,(**),\ m \geq \mathbf{0}_d\,(***) \end{array}$$

mit $A^2 = \frac{1+h^2}{(1+r)^2}$ und h als obere Grenze der *Sharpe ratio*, ab welcher „good-deals" beginnen. Hierbei bezeichnen d die Zahl der Umweltzustände, n die Anzahl der am Markt vorhandenen Wertpapiere sowie $m_i\,(i=1,\ldots,d)$ den Diskontierungsfaktor einer Zahlung der Höhe eins im Umweltzustand i, welcher noch mit der (tatsächlichen) Eintrittswahrscheinlichkeit p_i dieses Umweltzustandes zu gewichten ist, um den Barwert der Zahlung zu erhalten. $m_i\,(i=1,\ldots,d)$ kann als Grenzrate einer intertemporalen Substitution von Konsum interpretiert werden[384]. Das Bedingungssystem (*) stellt sicher, dass

[380] Vgl. zu deren im Folgenden dargestellten Konzept *Cochrane/Saá-Requejo* (2000).

[381] Als Maß der Performance eines Portfolios (bzw. Wertpapieres) bezeichnet die *Sharpe ratio* den Quotienten aus erwarteter Rendite des betrachteten Portfolios zu dessen Risiko, gemessen an der Standardabweichung der Rendite; vgl. ursprünglich *Sharpe* (1966); vgl. hierzu und zu weiteren Maßen *Sharpe* (1970), S. 152 ff., *Breuer/Gürtler/Schuhmacher* (1999), S. 142 ff.

[382] Vgl. zum Folgenden *Cochrane/Saá-Requejo* (2000), S. 80 ff., 87 ff.; erläuternd auch *Bernardo/Ledoit* (2000), S. 145, 147 f. Die Erweiterung zum diskreten Mehrperiodenmodell sowie zur kontinuierlichen Modellformulierung findet sich in *Cochrane/Saá-Requejo* (2000), S. 93 ff.

[383] Vereinfachend wird eine endliche Zahl von Umweltzuständen unterstellt. Das Modell kann dadurch mit explizit berechneten Erwartungswerten gegenüber der Darstellung in *Cochrane/Saá-Requejo* (2000), S. 81, 87, wiedergegeben werden.

[384] Vgl. *Hansen/Jagannathan* (1991), S. 226, 229 f.

m so gewählt wird, dass sich für alle am Markt gehandelten Wertpapiere $j\,(\in \{1,\ldots,n\})$ deren beobachtbarer Preis s_j einstellt. Die zweite Bedingung (**) ist äquivalent einer Begrenzung der Standardabweichung $\sigma(m)$ zu dem eine Zufallsvariable repräsentierenden Diskontierungsvektor m. Die diesbezüglich äquivalente Formulierung ist $\sigma(m) \leq \frac{h}{1+r}$, wobei r für den risikolosen Zinssatz steht[385]. Die Variabilität der Diskontierungsfaktoren ist also durch die vorgegebene Obergrenze h für die *Sharpe ratio* begrenzt[386]. Das Bedingungssystem (***) schließlich grenzt Arbitragemöglichkeiten (im üblichen Sinne) aus. Die Lösung dieses Optimierungsproblems führt somit auf einen Preis für den betrachteten Anspruch x^C, der in den für das Preissystem gesetzten Rahmenbedingungen mindestens anzusetzen ist. Die Preisobergrenze ergibt sich in analoger Weise, indem in der Zielfunktion der Minimum- durch den Maximumoperator ersetzt wird. Im Rahmen der zeitkontinuierlichen Formulierung wenden *Cochrane/Saá-Requejo* ihren Ansatz auch auf die Bepreisung einer Realoption an, welche sich auf ein nicht gehandeltes Auszahlungsprofil bezieht, das mit demjenigen eines gehandelten Gegenstandes korreliert ist[387].

Bernardo/Ledoit (2000) grenzen die betrachteten Portfolios durch die Vorgabe einer Obergrenze für ein *Gewinn-/Verlust*-Verhältnis ein. Gewinn ist der mit einer Pseudowahrscheinlichkeit ermittelte Erwartungswert positiver Auszahlungen des Anspruches, der Verlust entspricht dem erwarteten Betrag der negativen Auszahlungen. Die Pseudowahrscheinlichkeiten hängen von zustandsabhängigen Grenznutzen ab[388]. Durch Variation der Obergrenze für das *Gewinn-/Verlust*-Verhältnis zwischen eins und unendlich sind extreme Marktsituationen (zwischen Vollständigkeit und lediglich Arbitragefreiheit) abbildbar.

Eine Erörterung allgemeiner Restriktionenmengen zur Abgrenzung von „no-good-deals"-Preisen gegenüber den (nicht bestandsfähigen und deshalb auszuschließenden) „good-deals"-Preisen findet sich bei *Černý/Hodges* (2002). „Good-deals" verallgemeinern danach den Arbitragebegriff: Auch ohne dass

---

[385] Dies ergibt sich aus Folgendem: Zunächst gilt $\sum_{i=1}^{d} p_i m_i^2 = E[m^2]$. Da ferner $E[m^2] = \sigma(m)^2 + (E[m])^2$, ergibt sich aus Bedingung (**) unmittelbar $\sigma(m)^2 + (E[m])^2 \leq \frac{1+h^2}{(1+r)^2}$, daraus $\sigma(m)^2 \leq \frac{h^2}{(1+r)^2}$ und somit die angegebene Beziehung. Anzumerken ist, dass die Existenz eines risikolosen Wertpapieres die Beziehung $E[m] = \frac{1}{1+r}$ impliziert.

[386] Vgl. im Einzelnen *Cochrane/Saá-Requejo* (2000), S. 82, insbesondere in Verbindung mit *Hansen/Jagannathan* (1991), S. 235 f. Als Illustration sei angemerkt, dass danach für das durch m repräsentierte Preissystem Folgendes gilt: Für jeden Anspruch z mit $E[mz] = 0$ ist $\frac{\sigma(m)}{E[m]} \geq \frac{E[z]}{\sigma(z)}$, d.h. $\frac{\sigma(m)}{E[m]}$ stellt eine Obergrenze der *Sharpe ratio* dar. Werden folglich nur Preissysteme $\frac{\sigma(m)}{E[m]} \leq h$ betrachtet, sind auch die am Markt zu beobachtenden *Sharpe ratios* eingeschränkt.

[387] Vgl. *Cochrane/Saá-Requejo* (2000), S. 111 ff.

[388] Vgl. im Einzelnen *Bernardo/Ledoit* (2000), S. 150 f.

die Ansprüche der „good-deals“ eine nicht stets nicht-negative, in Umweltzuständen mit positiver Eintrittswahrscheinlichkeit sogar positive Auszahlung versprechen, kann dabei verlangt werden, dass diese Ansprüche einen positiven Preis haben müssen. Ansonsten würden „good-deals“ entstehen bzw. bestehen, die der Markt sofort wie bei einer Arbitragemöglichkeit ausnutzen würde. Zu verwirklichen ist diese Bedingung über die Eingrenzung möglicher Zustandspreise, die jedoch mit beobachtbaren Preisen am Markt gehandelter Ansprüche kompatibel sein müssen. Dabei muss die Menge der „good-deal-“Ansprüche nicht notwendig sämtliche Arbitragemöglichkeiten im herkömmlichen Sinne enthalten.

Die Verallgemeinerung von Arbitragegrenzen durch „good-deal bounds“ erweitert die Möglichkeiten, Einschätzungen über die möglichen Marktzustände in eine Grenzpreisbestimmung bedingter Ansprüche einfließen zu lassen. Dabei ist die Wahl der Restriktionen stets mit einer gewissen Willkür bzw. Subjektivität verbunden. Es sollte dann jedoch nicht übersehen werden, dass den entstehenden Preisgrenzen nicht dieselbe Aussagekraft wie den auf dem Arbitrageargument basierenden zukommt; insbesondere beruhen die Preisgrenzen nicht darauf, dass eine hedgende Gegenposition eingenommen werden könnte. Auf der anderen Seite mag in diesem Zusammenhang auch deutlich werden, dass die bisher ermittelten Arbitragegrenzen auch auf speziellen Annahmen hinsichtlich der Marktbeschaffenheit beruhen, im Besonderen eine zeitkontinuierliche, transaktionskostenfreie Handelbarkeit unterstellen. Die Ermittlung von „good-deal bounds“ wird je nach zu berücksichtigender Restriktion(enmenge) unter Umständen nur numerisch durchführbar sein. Spezifikation und Auswertung des Modells erfordern für eine Anwendung in der Praxis deshalb einen ggf. nicht unbeachtlichen Aufwand in personeller und materieller Hinsicht.

Nachdem die bisherigen Ausführungen der Ermittlung von Grenzen für die Preise bedingter Ansprüche gewidmet waren, soll im Folgenden ein Überblick über die Ansätze gegeben werden, welche der Bestimmung eines eindeutigen Preises auf einem unvollständigen Kapitalmarkt dienen. Die Ansätze benötigen ein Kriterium zur Auswahl eines Preises (aus dem arbitragefreien Preisintervall). Hierfür wird eine Nutzenvorstellung vorausgesetzt, so dass sich ein präferenzabhängiger Wert ergibt. Beispielhaft für eine präferenzorientierte Bewertung wird nachfolgend der Ansatz von *Davis* ausführlicher vorgestellt. Darüber hinaus werden weitere, hierfür vorliegende Ansätze sowie solche, welche sich auf das Hedgingproblem beziehen, kurz skizziert. Eine Verbindung von Hedging- und Bepreisungsproblem stellen in unterschiedlicher Weise die Konzepte des lokalen Nutzens und der Bestimmung varianz-optimaler Portfolios her. Auch sie sind Gegenstand der weiteren Ausführungen.

3.3.3.2 Präferenzabhängige Optionswerte und Hedgingansätze

3.3.3.2.1 Der „faire Optionspreis" nach *Davis*

Von *Davis*[389] wird ein nutzenorientierter Grenzpreis für einen bedingten, nicht negativen Anspruch $B \equiv B(T)$ ermittelt. Stellt sich der Preis so ein, dass die Änderung des Erwartungsnutzens aus einer marginalen Investition in den bedingten Anspruch zu Lasten der Investition in das sonstige Portfolio gerade null ist, so ist nach *Davis* ein „fairer Optionspreis"[390] gefunden. Hierbei ist hinsichtlich des sonstigen Portfolios von einem aus einer optimalen Handelsstrategie hervorgehenden Endvermögen auszugehen. Darüber hinaus ist der bedingte Anspruch als hinzukommende Investitionsmöglichkeit zu betrachten, so dass die marginale Änderung des Erwartungsnutzens an der Stelle einer Investition von null in den neuen Anspruch zu berechnen ist.

Vorausgesetzt wird eine im Innern des Definitionsbereiches zweimal stetig differenzierbare Nutzenfunktion $U : [0, \infty) \to [-\infty, \infty)$ mit den Eigenschaften, wie sie in *Abschnitt 2.2.3.1* eingeführt worden ist, wobei speziell $\lim_{k \downarrow 0} U'(k) = \infty$ sein soll. ($U(0)$ erhalte den Wert $-\infty$ zugewiesen.) Es sei daran erinnert, dass für die eingeführten Nutzenfunktionen auch $\lim_{k \to \infty} U'(k) = 0$ sowie $U'(.) > 0$ im Innern des Definitionsbereiches gelten. Zunächst soll eine Spezifikation des zugrunde liegenden Marktes, wie sie bereits formuliert worden ist (in *Abschnitt 2.1.2*, S. 60, für den vollständigen Markt und in *Abschnitt 3.1*, S. 144, für den unvollständigen Markt) noch nicht vorausgesetzt werden.

Auf Basis einer solchen Nutzenfunktion, welche den Nutzen des Endvermögens zum Zeitpunkt T beschreibt, wird die folgende Funktion definiert:

$$W(\varepsilon, x, h) := \sup_{p(.) \in \mathcal{T}} E\left[U\left(X^{x-\varepsilon,p}(T) + \frac{\varepsilon}{h}B\right)\right]; \tag{3.109}$$

diese ist wie folgt zu verstehen: Ausgehend von einem Anfangsvermögen x, wird ein (nahezu verschwindend geringer) Betrag ε verwandt, um Einheiten des Anspruches B zu erwerben, dessen aktueller Preis h sei. Für ε wird somit ein Anspruch der Höhe $\frac{\varepsilon}{h}B$ erworben. Auf Basis des verbleibenden Vermögens $x - \varepsilon$ ist eine Portfolio-Optimierung durchzuführen. Hierbei ist der Erwartungsnutzen aus dem Endvermögen (unter Einbeziehung des stochastischen Rückflusses B) über alle Portfolio-Prozesse $p(.)$ zu maximieren[391]. Die Portfolio-Prozesse müssen hierbei der Menge $\mathcal{T}$ angehören. ($\mathcal{T}$ kann als Menge aller (restringiert) zulässigen Portfolio-Prozesse betrachtet werden.) Der faire Optionspreis $\hat{h}$ nach *Davis* ist wie folgt definiert:

[389] Vgl. zum Folgenden *Davis* (1997). Die Ausarbeitung geht auf eine erste Version aus dem Jahr 1994 zurück, vgl. die Zitation *Karatzas/Shreve* (1998), S. 258. Eine Darstellung des Ansatzes von *Davis* ist auch in *Bingham/Kiesel* (2004), S. 289-292, zu finden.

[390] Vgl. *Davis* (1997), S. 217.

[391] Hier und im Folgenden soll, sofern keine Notwendigkeit besteht, (sprachlich) nicht zwischen einem Maximum und einem Supremum unterschieden werden.

Ist für jedes Paar (x, p) die Funktion $\varepsilon \to W(\varepsilon, x, p)$ an der Stelle $\varepsilon = 0$ differenzierbar und existiert eine eindeutige Lösung $\hat{h}$ der Gleichung:

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}(0, x, h) = 0, \tag{3.110}$$

dann ist $\hat{h}$ der gesuchte Optionspreis.

$V(x)$ bezeichne nun den mit einem Ausgangsvermögen in Höhe von x maximal erreichbaren Erwartungsnutzen ohne einen Handel im Anspruch B; es gelte also:

$$V(x) = \sup_{p \in \mathcal{T}} E\left[X^{x,p}(T)\right],$$

wobei $X^{x,p}(.)$ für den Vermögensprozess zum Portfolio-Prozess $p(.)$ beim Ausgangsvermögen x steht. Konsumprozesse werden generell nicht betrachtet ($c(.) \equiv 0$), so dass auch der Vermögensprozess entsprechend verkürzt charakterisierbar ist. Dann gilt Folgendes:

Satz 3.9 *Fairer Optionspreis nach Davis*[392]
Ist $V(.)$ auf $\mathbb{R}_{++}$ differenzierbar mit $V'(.) < 0$ und existiert zu jedem Ausgangsvermögen $\bar{x} \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$ $(\epsilon > 0)$ ein maximierender Portfolio-Prozess $\hat{p} \in \mathcal{T}$, dann ist:

$$\hat{h} = \frac{E\left[U'\left(X^{x,\hat{p}}(T)\right) B\right]}{V'(x)}. \tag{3.111}$$

Beweis:
Eine *Taylor*-Entwicklung von $U(.)$ um den Punkt $X^{x-\varepsilon,p}(T)$ führt auf:

$$U\left(X^{x-\varepsilon,p}(T) + \frac{\varepsilon}{h}B\right) = U\left(X^{x-\varepsilon,p}(T)\right) + \frac{\varepsilon}{h}BU'\left(X^{x-\varepsilon,p}(T)\right) + o(\varepsilon).$$

Vernachlässigt man den Term $o(\varepsilon)$ mit den Werten höherer Ableitungen als eins, so ergibt die Bildung des Erwartungswertes:

$$E\left[U\left(X^{x-\varepsilon,p}(T) + \frac{\varepsilon}{h}B\right)\right] = E\left[U\left(X^{x-\varepsilon,p}(T)\right)\right] + \frac{\varepsilon}{h}E\left[BU'\left(X^{x-\varepsilon,p}(T)\right)\right].$$

Aus der Existenz eines optimalen Portfolio-Prozesses in einer geeigneten Umgebung von x folgt für beliebiges $\varepsilon : 0 \leq \varepsilon \leq \epsilon$ mit *Davis* (1997), S. 217 f. (Lemma 2):

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial}{\partial \varepsilon} \sup_{p \in \mathcal{T}} E\left[U\left(X^{x-\varepsilon,p}(T) + \tfrac{\varepsilon}{h}B\right)\right] \\
&= \tfrac{\partial}{\partial \varepsilon} E\left[U\left(X^{x-\varepsilon,\hat{p}}(T) + \tfrac{\varepsilon}{h}B\right)\right] \\
&= \tfrac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\underbrace{E\left[U\left(X^{x-\varepsilon,\hat{p}}(T)\right)\right]}_{=V(x-\varepsilon)} + \tfrac{\varepsilon}{h}E\left[U'\left(X^{x-\varepsilon,\hat{p}}(T)\right)B\right]\right).
\end{aligned}$$

[392] Vgl. zu Satz und Beweis *Davis* (1997), S. 217, 218 (Theorem 3); vgl. auch *Bingham/Kiesel* (2004), S. 291 f., und *Karatzas/Kou* (1996), S. 349 f.

Daraus ergibt sich in Verbindung mit der Bedingung (3.110) für den gesuchten Optionspreis:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}W(\varepsilon,x,h)\big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad = \quad -V'(x) + \tfrac{1}{h}E\left[U'\left(X^{x-\varepsilon,\hat{p}}(T)\right)B\right]\Big|_{\varepsilon=0} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{h}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}E\left[U'\left(X^{x-\varepsilon,\hat{p}}(T)\right)B\right]\Bigg|_{\varepsilon=0}}_{=0}$$

und somit auch die im Satz angegebene Bedingung. □

Für das Weitere werden nun wieder die allgemein zugrunde liegenden Marktbedingungen vorausgesetzt, wie sie in den *Abschnitten 2.1.2* und *3.1* eingeführt wurden. Gemäß *Abschnitt 3.3.2* ist die Endvermögensoptimierung auf einem diesbezüglichen Kapitalmarkt, welcher unvollständig ist, als Spezialfall der Konsum- und Endvermögensoptimierung auf diesem Kapitalmarkt zu betrachten, indem ein Konsum von null unterstellt wird. Es kann somit auf die Ausführungen in *Abschnitt 3.3.2.1* zurückgegriffen werden. Mit den dort verwendeten Bezeichnungen ist nach Gl. (3.30) hierfür der folgende Zielfunktionswert zugrunde zu legen:

$$V(x;K) := \sup_{(0,p)\in\mathcal{A}(x;K)} E\left[U(X^{x,0,p}(T))\right], \tag{3.112}$$

wobei x wiederum das Ausgangsvermögen kennzeichnet. Satz 3.1 stellt eine Verbindung, mithin unter bestimmten Bedingungen, eine Identität her zwischen $V(x;K)$ und $V_{\hat{\nu}}(x)$ als dem Zielfunktionswert auf dem Schattenmarkt $\mathcal{M}_{\hat{\nu}}$, welcher bereits durch die Wahl eines optimalen Schattenpreisprozesses $\hat{\nu}(.)$ gekennzeichnet ist. Damit kann auch im Falle, dass ein dergestalt optimaler Schattenpreisprozess bestimmbar ist, der Optionspreis nach *Davis* angegeben werden.

Satz 3.10 *„Fairer Optionspreis" für K_+ nach Karatzas/Kou (1996)*[393]
Gibt es zu jedem Anfangsvermögen $x > 0$ einen Schattenpreisprozess $\hat{\nu}(.) \in \mathcal{D}^b$ und ein Paar $(0,\hat{p}) \in \mathcal{A}(x;K_+)$, mit dem das optimale Endvermögen erreicht wird, dann gilt:

$$\hat{h}(x) = E_{\hat{\nu}}\left[\frac{B}{S_0^{\hat{\nu}}(T)}\right]. \tag{3.113}$$

Beweis: Siehe die angegebene Quelle.

Satz 3.10 besagt, dass der Optionspreis nach *Davis* mit dem Preis des zu bewertenden Anspruches auf dem dual-optimalen Schattenpreismarkt $\mathcal{M}_{\hat{\nu}}$ übereinstimmt. Im Spezialfall eines vollständigen Marktes ist grundsätzlich $\hat{\nu}(.) \equiv 0$, so dass der Optionspreis nach *Davis* dem arbitragefreien Preis des Anspruches auf diesem Markt entspricht. Ob sich ein vom Ausgangsvermögen abhängiger Optionspreis einstellt, bestimmt sich danach, ob der optimale

[393] Vgl. *ebd.*, S. 351, zu Satz und Beweis. Vgl. zu dieser Aussage auch *Davis* (1997), S. 219.

Schattenpreisprozess hiervon abhängt. Nach *Abschnitt 3.3.2.1* ergeben sich für eine logarithmische Nutzenfunktion[394] und unter der Voraussetzung deterministischer Koeffizientenprozesse für Nutzenfunktionen des „power type“[395] die optimalen Schattenpreisprozesse unabhängig vom Anfangsvermögen[396]. Dies kann auf den allgemeinen Fall deterministischer Koeffizientenprozesse bei Restriktionen, für welche $\zeta(K_+) \equiv 0$ gilt, ausgedehnt werden.

Insofern führt der Ansatz von *Davis* für zahlreiche hier interessierende Nutzenfunktionen bzw. Restriktionstypen zu einem berechenbaren Optionspreis, wenn auch ggf. nur unter Rückgriff auf die in *Abschnitt 3.3.2.2* angegebenen Algorithmen, also unter Umständen aufwendig und nur näherungsweise. Unter den wenig restriktiven Bedingungen des Systems $\mathcal{B}1$[397] ist der Optionspreis stets im Intervall $[h_{low}(K_-), h_{up}(K_+)]$ arbitragefreier Preise[398]; allgemein kann dies jedoch nicht behauptet werden[399]. Kritisch zu sehen ist, dass nicht für sämtliche, nach den Prämissen zulässige Nutzenfunktionen oder Restriktionstypen, also nicht stets, ein Optionspreis angegeben werden kann. Ferner wird von einer Vermögenssituation des Investors ausgegangen, in welcher der Wert des Anspruches vernachlässigbar gegenüber dem sonstigen Vermögen ist. Es ist allerdings anzunehmen, dass der subjektive Wert der Option für den Investor häufig auch durch das Ausmaß bestimmt wird, in dem durch den Erwerb des bedingten Anspruches seine Vermögenssituation in $t = T$ beeinflusst wird. Wird demgegenüber B als Derivat aus den für die Portfolio-Bildung in Frage kommenden Basiswertpapieren betrachtet, so gewinnt der Ansatz von *Davis* an Plausibilität dadurch, dass unter der Annahme von Investoren mit identischen Charakteristika eine Markträumung dergestalt erfolgt, dass ein repräsentativer Investor eine Derivateposition gleich null in seinem Portfolio hält[400]. In dieser Weise sich einstellende Derivatepreise werden auch als *neutral* bezeichnet. Es ist dann allerdings zu fragen, weshalb Derivate dann noch existieren.

Der Bestimmung eines nutzenbasierten Optionspreises auf Basis geometrisch Brown'scher Bewegungen und unter der Bedingung eines unvollständigen Kapitalmarktes i.e.S. widmet sich speziell *Henderson*[401]. Sie unterstellt in ähnlicher Weise eine vernachlässigbare Quantität des Optionspreises im Verhältnis zum Vermögen des Investors sowie logarithmische oder „Power-type“-Nutzenfunktionen.

---

[394] Vgl. *Beispiel 3.2.*
[395] Vgl. Satz 3.3.
[396] Vgl. hierzu sowie zur folgenden Aussage *Karatzas/Kou* (1996), S. 352 f.
[397] Vgl. S. 201.
[398] Vgl. *Karatzas/Kou* (1996), S. 351 (Remark 7.3).
[399] Vgl. den Hinweis in *Davis* (1997), S. 225.
[400] Vgl. hierzu und zur folgenden Bezeichnung *Kallsen* (2002a), S. 325 ff., insbesondere S. 326 f.
[401] Vgl. *Henderson* (2001).

3.3.3.2.2 Das Konzept der lokalen Nutzenoptimierung nach *Kallsen*

Kallsen[402] führt das Konzept einer *lokalen Nutzenoptimierung* ein. Zugrunde gelegt werden Handelsprozesse $\varphi(t) = (\varphi^1(t), \dots, \varphi^d(t))$ $(t \in [0, T])$, welche die jeweils von einer Aktiengattung oder auch einem Derivat bzw. mehreren Derivaten gehaltene Stückzahl beschreiben. Der Markt beinhalte hierbei d riskante Wertpapiere. Betrachtet werden nun intergrierbare Handelsprozesse, die durch die Zugehörigkeit zu einer Menge $\mathcal{M}$ restringiert sind. Diese Handelsprozesse sollen als restringiert zulässig bezeichnet werden. Danach muss die Ausprägung eines Handelsprozesses zu jedem Zeitpunkt einer Menge $M := \{\varphi \in \mathbb{R}^d \,|\, g_i(\varphi) \leq 0,\, i = 1, \dots, k,\; g_i(\varphi) = 0,\, i = k+1, \dots, l\}$ auf Basis differenzierbarer, konvexer Funktionen $g_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, und affiner Funktionen $g_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $i = k+1, \dots, l$, angehören. Unter Einbeziehung der vom Bond gehaltenen Stückzahl, welche in die Optimierung nicht integriert ist, ergibt sich insgesamt eine selbst-finanzierende Handelsstrategie[403] (Portfolio-Strategie). Eine restringiert zulässige Handelsstrategie $\varphi(.)$ heißt „u-optimal“, wenn sie im zeitdiskreten Fall die folgende Bedingung erfüllt:

$$E\left(\sum_{t=1}^{T} U(\Delta G_t(\varphi))\right) \geq E\left(\sum_{t=1}^{T} U(\Delta G_t(\tilde{\varphi}))\right),\ \forall \tilde{\varphi}(.)\ \text{restringiert zulässig},$$

wobei $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte, durch $U(0) = 0, U'(0) = 1$ normierte, zweimal stetig differenzierbare Nutzenfunktion mit sonst üblichen Eigenschaften repräsentiert. $\Delta G_t(\varphi) := G_t(\varphi) - G_{t-1}(\varphi)$ mit $G_t(\varphi) := \sum_{s=1}^{t} \varphi_s \Delta \hat{S}_s$ beschreibt den barwertig berechneten einperiodigen Gewinn aus dem risikobehafteten Portfolio. Hierbei beschreibt $\hat{S}$ den Vektor der Wertpapierpreise (außer dem risikolosen Bond), die durch Division mit dem Wert des risikolosen Bonds normiert bzw. verbarwertet sind. Der damit wiedergegebene Ansatz ist ein Spezialfall einer allgemeinen, von *Kallsen* betrachteten Prozessmodellierung, welche insbesondere kontinuierliche Prozesse mit einschließt. Für den allgemeinen Fall wird ein komplexer Ausdruck für den „periodigen“ Nutzenbeitrag entwickelt[404].

Das Konzept der lokalen Nutzenoptimierung unterstellt, dass der kontinuierlich bzw. in jeder Periode anfallende barwertige Gewinn unmittelbar konsumiert wird. Es wird dann diejenige Handelsstrategie gewählt, welche den höchsten Erwartungsnutzen aus den aggregierten Nutzenbeiträgen dieses Konsums erbringt. Wesentlicher Vorteil[405] dieses Optimierungskonzeptes ist, dass die optimale Strategie zeitlich lokal ermittelt werden kann und keine simultane Betrachtung des gesamten (Rest-)Planungszeitraumes bis T zu erfolgen hat. Dadurch vereinfacht sich die Berechnung im Vergleich zur bisher beschriebenen nutzenorientierten dynamischen Portfolio-Optimierung. Zudem wird die Fehleranfälligkeit gegenüber Modell-Miss-Spezifikationen reduziert.

[402] Vgl. zum Folgenden *Kallsen* (1999).
[403] Vgl. *Kallsen* (1998), S. 3, 7.
[404] Siehe hierzu *Kallsen* (1999), S. 325.
[405] Vgl. *Kallsen* (1999), S. 322, 324, 326 f.

Darüber hinaus erweist sich bei rein kontinuierlichen Prozessen die u-optimale Strategie als lediglich vom Wert $U''(0)$ — neben Charakteristika der Wertpapierprozesse — abhängig[406].

Einen Beitrag zum *Hedging* bedingter Anspüche liefert das Konzept der lokalen Nutzenmaximierung bei geeigneter Spezifikation der Restriktionenmenge. Für das Hedging von Derivaten ist bspw. von Portfolien auszugehen, welche die betreffenden Derivate stets in fixierter Stückzahl beinhalten, und unter dieser Bedingung ist die Zahl der hinzuzuerwerbenden bzw. zu veräußernden Aktien zu bestimmen.

Zur *Bepreisung* von Derivaten ist das Konzept des lokalen Nutzens ebenfalls anwendbar[407]. Hierzu ist zu einer u-optimalen Handelsstrategie ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß zu definieren, in Bezug auf welches die Wertpapierpreise Martingale sind. Wird aus diesen nun dasjenige Wahrscheinlichkeitsmaß $P^\star$ gewählt, für das die zugrunde liegende u-optimale Handelsstrategie eine Position von null im Derivat vorsieht, so ergibt der Erwartungswert der diskontierten stochastischen Auszahlung des Derivates bezüglich dieses Wahrscheinlichkeitsmaßes den Derivatepreis. Dieser wird folglich als *neutraler* Preis ermittelt[408]. Dahinter steht, wie bereits erwähnt, die Vorstellung, dass sich die Derivatepreise so einstellen, dass die Marktteilnehmer nicht in untereinander verschiedener Weise Derivate nachfragen und insofern auch kein Handel darin mit dem Ergebnis zeitweilig positiver (negativer) Bestände zustande kommt. Ergänzend kann ein *Sensitivitätsprozess* abgeleitet werden, mit dem sich Derivatepreisänderungen abbilden lassen, welche auf von dem beschriebenen Gleichgewicht abweichenden Nachfrage-/Angebotssituationen beruhen[409]. Angewandt auf die ursprünglichen Derivatepreise lässt sich damit ein Preisintervall konstruieren, das eine Abschätzung der Robustheit der Derivatepreise gegenüber geringfügig von null abweichenden Derivate-Positionen gestattet[410].

Zum Konzept des lokalen Nutzens ist anzumerken, dass die Zerlegung eines ursprünglich intertemporalen Nutzenoptimierungsproblems in lokale Einzelprobleme insbesondere hinsichtlich der Nutzenvorstellungen des Investors starke Vereinfachungen impliziert. So gesehen erscheint die Zerlegung einer Gesamt-Nutzenfunktion in Einzelfunktionen über die zu unterschiedlichen Zeitpunkten anfallenden Konsumbeträge als nicht unproblematisch[411]. Die Festlegung des Konsums auf den Barwertzuwachs ist nicht nur im Hinblick auf die üblicherweise vorhandene Verteilungsmöglichkeit des Konsums über den

[406] Vgl. *Kallsen* (1999), S. 326 (Theorem 3.5).
[407] Vgl. *Kallsen* (2002b), insbesondere S. 120 ff.
[408] Vgl. S. 220.
[409] Vgl. hierzu *Kallsen* (2002b), S. 125 ff.
[410] Hierbei wird auch eine Verbindung zu den „good-deal bounds“ gesehen, vgl. *Kallsen* (2002), S. 125, 128.
[411] Vgl. diesbezüglich bereits die Anmerkung in Fn. 162, S. 83.

Planungszeitraum hinweg als kritisch zu erachten[412], sie bedeutet, zumindest für den diskreten Fall, auch die Notwendigkeit der Definition der Nutzenfunktion auf $\mathbb{R}$, also unter Einschluss negativer Konsumbeiträge. Diesbezüglich erscheint jedoch die Aussagekraft der Nutzenfunktion als zweifelhaft, wenn darüber hinaus die Zielfunktion in einer lediglich additiven Aggregation der perioden Nutzenbeiträge besteht, über welche schließlich noch eine Erwartungswertbildung erfolgt. Darüber hinaus ist die Bewertung von Derivaten mittels neutraler Preise kritisch hinsichtlich ihrer eigenen Annahme zu betrachten. Schließlich liefert sie keine Erklärung für das Halten eines (nicht verschwindenden) Derivatebestandes, dessen Bepreisung sie zum Ziel hat, so dass sie doch nachgerade die Existenz eines Derivates zur Voraussetzung hat. Auf der anderen Seite stehen die bereits erwähnten Vorteile, die das Nutzenoptimierungsproblem wesentlich handhabbarer machen und verschiedene Anwendungen erlauben. Insbesondere im Rahmen spezieller Gestaltungen ergibt sich ein das Hedging- und Bepreisungsproblem vereinigender Ansatz, der zudem Verbindungen zu weiteren Ansätzen aufweist[413].

3.3.3.2.3 Der „Sicherheitsäquivalent-Ansatz“ von *Fritelli*

Fritelli[414] stellt einen Ansatz vor, welcher der Bestimmung eines Sicherheitsäquivalentes vergleichbar ist. Zugrunde liegt eine — zumeist partielle — Präferenzordnung des Marktes, die besagt, dass für zwei nach unten beschränkte, $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariablen z und w gilt: $z \preceq w \Leftrightarrow E_Q\left[z\left(S_0(T)\right)^{-1}\right] \leq E_Q\left[w\left(S_0(T)\right)^{-1}\right], \; \forall Q \in \mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ bezeichnet nunmehr die Menge aller zu P äquivalenten Martingalmaße[415]. Ferner sei die Präferenzordnung des Marktes auch auf Skalare anwendbar. Mit Hilfe der Präferenzordnung ist eine Budgetmenge $\Theta(z) := \{y \mid y \preceq z, \; y \text{ nach unten beschränkt}\}$ für verschiedene Ausgangsvermögen bzw. zukünftige bedingte Ansprüche definiert. Darüber hinaus sei eine auf einer Teilmenge der reellen Zahlen definierte Nutzenfunktion $U(.)$ vorausgesetzt. Der Preis $\pi(B)$ des bedingten Anspruches B, der nach unten beschränkt und $\mathcal{F}_T$-messbar ist, muss nun Folgendes erfüllen: Mit geeignet definierten Funktionen $V_0(.)$ und $V(.)$, so dass $V_0(x) = \sup_{z\in\Theta(0)} E\left[U\left(xS_0(T) \;\; +z\right)\right]$ (für $x \in \mathbb{R}$) und $V(B) = \sup_{z\in\Theta(0)} E\left[U\left(B+z\right)\right]$ gelte[416]:

$$V_0(\pi(B)) = V(B).$$

Damit entspricht der Preis eines bedingten Anspruches dem Gegenwartsvermögen, welches (mindestens) nötig ist, um in $t = T$ ein Nutzenniveau,

[412] *Kallsen* sieht selbst einen Kritikpunkt darin, dass es ein „less natural concept“ ist; vgl. *Kallsen* (1998), S. 8.

[413] Vgl. *Kallsen* (1998), S. 17 ff.

[414] Vgl. hierzu *Fritelli* (2000a).

[415] Bezüglich der hier nicht interessierenden Abwandlung der Maßmenge sei lediglich auf *Fritelli* (2000a), S. 280, verwiesen.

[416] Vgl. *Fritelli* (2000a), S. 282.

gemessen am Erwartungsnutzen, zu erreichen, das demjenigen entspricht, welches mit dem bedingten Anspruch unter Berücksichtigung sämtlicher am Markt möglichen kostenneutralen Modifikationen des Auszahlungsprofils ebenfalls im günstigsten Fall erlangt werden kann. Die Menge der „kostenneutralen Modifikationen“ ist als Budget-Menge zum Budget null zu interpretieren. Sie stimmt (i.d.R.) mit der Menge kostenlos superreplizierbarer Ansprüche überein[417].

Der von *Fritelli* vorgeschlagene Preis bezieht sich auf eine fixierte, nicht verschwindende Position im bedingten Anspruch und unterscheidet sich von daher von den zuvor beschriebenen Ansätzen einer „neutralen“ Bepreisung[418]. Es erfolgt jedoch, analog zu diesen Ansätzen, keine Bepreisung im Kontext einer Optimierung des gesamten Portfolios, innerhalb derer auch der Anteil des Derivates gegebenenfalls dynamisch anzupassen wäre. Dies erstreckt sich auch auf Situationen, in denen Interdependenzen zwischen verschiedenen, zu bepreisenden Derivaten Einfluss auf die Nutzensituation des Investors haben können. In dieser Hinsicht mag sich auch die i.d.R. bestehende Unvollständigkeit der Präferenzordnung auswirken. Als Partialmodell zur Ermittlung eines investorspezifischen Derivatewertes, welche nicht notwendig in einen Marktgleichgewichtskontext einzubetten ist, erscheint der Ansatz von *Fritelli* verwendbar.

Im Folgenden werden Ansätze skizziert, welche auf die Minimierung eines durch die Unvollständigkeit des Marktes bedingten „Hedgingfehlers“ abzielen und sich folglich nicht (unmittelbar) auf in einer Nutzenfunktion repräsentierte Präferenzen des Investors stützen — oder allenfalls eine in gewissem Sinne extreme Nutzenvorstellung zugrunde legen. Gemeinsames Charakteristikum ist der Rückgriff auf die *Föllmer/Schweizer*-Zerlegung[419] bei der Ableitung einer optimalen Hedgingstrategie[420].

3.3.3.2.4 Risiko- und varianzminimierende Strategien

Ausgangspunkt für die Ableitung *risikominimierender Strategien*, welche für den hier eingeführten Marktrahmen beschrieben werden sollen[421], ist ein

[417] Vgl. *Fritelli* (2000a), S. 285.

[418] Vgl. *Branger* (2002), S. 109. Ohne weitere Modifikation des Ansatzes ist die nutzenbewertete Vermögenssituation sogar auf das Budget beschränkt, welches letztlich dem abgeleiteten Wert des bedingten Anspruches entspricht.

[419] Vgl. *Föllmer/Schweizer* (1991), S. 396; vgl. hierzu auch *Grünewald* (1998), S. 75.

[420] Da bereits diverse Aufarbeitungen dieser *Hedgingansätze* über die Originalquellen hinaus existieren, ist eine ausführliche Beschreibung an dieser Stelle entbehrlich. Mit einem Verweis auf die entsprechende Literatur werden somit lediglich die Grundzüge der Ansätze wiedergegeben. Vgl. zum Folgenden deshalb auch *Bingham/Kiesel* (2004), S. 295 ff., *Grünewald* (1998), insbesondere S. 61 ff., sowie *Holtrode* (2000), S. 87 ff.

[421] Daraus wird die Allgemeinheit der in den Originalquellen zugrunde liegenden Gegebenheiten zwar beschränkt; insbesondere werden lediglich stetige Wertpapierprozesse un-

bedingter Anspruch B in $t = T$, welcher $\mathcal{F}_T$-messbar ist[422]. Gesucht ist eine Handelsstrategie, welche einen Vermögensprozess generiert, der „möglichst geringe, quadrierte Abweichungen“ zu einem den Anspruch duplizierenden, jedoch wegen der Unvollständigkeit des Marktes ggf. nicht realisierbaren Prozess aufweist. In der genauen Spezifikation dieser Abweichungen sowie bestimmten Rahmenbedingungen unterscheiden sich die im Weiteren formulierten Optimierungsprobleme.

Es wird nun von folgendem „Duplikations“-Prozess ausgegangen:

$$V_t(\varphi) = \int\limits_0^t \varphi'(s) \frac{1}{S_0(s)}\, dS(s) + C_t(\varphi) = \int\limits_0^t \varphi'(s)\, dZ(s) + C_t(\varphi),\ t \in [0, T], \quad (3.114)$$

für den $V_T(\varphi) = \frac{B}{S_0(T)}$ gelten soll. Hierbei bezeichnen $\varphi(.)$ einen Handelsprozess, der

$$E\left[\sum_{i=1}^n \left(\int_0^T \varphi_i^2(t) S_i^2(t) \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2(t)\, dt\right) + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^T |\varphi_i(t)||S_i(t)\,(b_i(t) - r(t))\,|\right)^2\right] < \infty$$

erfüllt, sowie $DS(t) := \dfrac{1}{S_0(t)}\, S(t)$, $t \in [0, T]$, den Vektor der diskontierten Aktienkursprozesse. $C_.(\varphi)$ bezeichnet einen Prozess kumulierter und verbarwerteter Kosten mit $E\left[\int_0^T (dC_t)^2\, dt\right] < \infty$ und rechtsstetigen Pfaden; der Prozess $V_.(\varphi)$ hat diese Bedingungen ebenfalls zu erfüllen. Dividendenprozesse werden als identisch null angenommen. Zudem wird $\bar{B} := \frac{B}{S_0(T)}$ gesetzt.

Hinweis: Um die Darstellung zu vereinfachen, soll im Folgenden lediglich von einer Aktie (neben dem Bond), d.h. von $n = 1$, ausgegangen werden.

Gl. (3.114) besagt, dass der zu hedgende Anspruch $B\,(\bar{B})$ mit einem Prozess $V_.(\varphi)S_0(.)$ $(V_.(\varphi))$ erreicht wird, der zunächst auf Barwert-Gewinnen/Verlusten aus der Investition bzw. Verschuldung in verfügbare Aktien beruht. Des Weiteren setzt sich dieser Prozess aus zusätzlichen, barwertig repräsentierten Zu- bzw. Abflüssen dC_t zusammen[423]. Dieser Kostenprozess kann als notwendige Ergänzung des mit den am Markt vorhandenen Aktien generierbaren Portfolios angesehen werden, um den Anspruch B zu erreichen. Die Ergänzung repräsentiert dann eine durch Markttransaktionen nicht zu schließende Lücke. Insofern macht es Sinn, einen Portfolio-Prozess $\varphi(.)$ zu suchen, bei welchem diese Lücke in gewisser Weise minimal wird. Hierzu wird der folgende Risikoprozess betrachtet[424]:

$$R_t(\varphi) := E\left[(C_T(\varphi) - C_t(\varphi))^2 \mid \mathcal{F}_t\right]. \quad (3.115)$$

terstellt. Im Hinblick auf eine Skizzierung der Grundstruktur des Hedgingansatzes erscheint dies jedoch vertretbar.

[422] Es soll ferner $E\left[\left(\frac{B}{S_0(T)}\right)^2\right] < \infty$ gelten.

[423] Durch den Bezug auf Barwerte kann auf die Berücksichtigung des Handels-Prozesses im risikolosen Bond verzichtet werden.

[424] Vgl. *Föllmer/Schweizer* (1991), S. 394.

Gesucht ist nun ein Handelsprozess $\varphi^\star(.)$ aus der Menge Φ der Handelsprozesse, die Gl. (3.114) mit den angeführten Regularitätsbedingungen erfüllen, dergestalt, dass für jeden Zeitpunkt $t \in [0,T]$ gilt[425]:

$$R_t(\varphi^\star) \leq R_t(\varphi),\ \forall \varphi(.) \in \Phi,\ \text{und } \varphi(.) \text{ ist Fortsetzung von } \varphi^\star(.) \text{ in } t.$$

Ist der Anspruch B bereits mit den Kapitalmarktpapieren, d.h. im hier vereinfachten Fall durch Handel in Bond und Aktie, erreichbar, ergibt sich ein Kostenprozess von null, mithin gilt $R_t(\varphi^\star) = 0\,(\forall t)$ und $\varphi^\star(.)$ ist der B duplizierende Prozess. Ein nicht erreichbarer Anspruch wird hingegen zu $R_0(\varphi^\star) > 0$ führen[426].

Für den Spezialfall, dass der diskontierte Aktienkurs ein Martingal bezüglich des ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmaßes P ist — dies ist bei $b(.) \equiv r(.)$ der Fall —, zeigen *Föllmer/Sondermann*[427], dass der Kostenprozess im *Mittel selbst-finanzierend* ist; das heißt, es gilt:

$$E\left[C_T - C_t \mid \mathcal{F}_t\right] = 0,\ t \in [0,T].$$

Der Kostenprozess und der minimierende Handelsprozess sind aus der *Kunita/Watanabe*-Zerlegung[428] des $\bar{B}$ duplizierenden Prozesses $V_.(\varphi)$ zu ermitteln. Danach besitzt der Duplikations-Prozess die folgende Darstellung:

$$V_t(\varphi) = B_0 + \int_0^t \varphi^B(s)\, dDS(s) + L^B(t),\ t \in [0,T], \tag{3.116}$$

wobei B_0 $\mathcal{F}_0$-messbar ist und $L^B(.)$ ein quadrat-integrierbares Martingal mit Anfangswert $L(0) = 0$ darstellt, das orthogonal zum Martingal $DS(.)$ ist. $V_t(\varphi) = E\left[\bar{B} \mid \mathcal{F}_t\right]$ $(t \in [0,T])$ ist ein P-Martingal. Der Kostenprozess C_t kann folglich identifiziert werden als $C_t = B_0 + L^B(t)\,(t \in [0,T])$. Der minimierende Handelsprozess ist gemäß $\varphi^\star(t) = \varphi^B(t)\,(t \in [0,T])$, also durch den Integranden des stochastischen Integrals in der obigen Darstellung, (eindeutig) gegeben. Unter Ausnutzung der Othogonalität zwischen den Prozessen $DS(.)$ und $L^B(.)$ kann durch Bildung des vorhersehbaren quadratischen Kovariationsprozesses zwischen V_t und $DS(.)$ der minimierende Handelsprozess

[425] Hierbei wird der Begriff der „Fortsetzung" von Handelsprozessen verwendet. Im Wesentlichen ist ein Prozess $a(.)$, welcher Fortsetzung eines anderen Prozesses $b(.)$ im Zeitpunkt t ist, dadurch charakterisiert, dass er bis t fast sicher mit dem Prozess $b(.)$ übereinstimmt. Im gegebenen Kontext ist lediglich eine Abweichung in der Stückzahl der in t gehaltenen risikolosen Bonds möglich. Vgl. genauer *Föllmer/Sondermann* (1986), S. 212, *Holtrode* (2000), S. 89.

[426] Vgl. *Föllmer/Schweizer* (1991), S. 394, *Holtrode* (2000), S. 88 (Bemerkung 6.1.1).

[427] Vgl. *Föllmer/Sondermann* (1986), S. 213.

[428] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 180 f. Danach besitzt jedes quadrat-integrierbare Martingal M_1 eine bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutige Zerlegung: $M_1(.) = M_2(.) + M_3(.)$ in die quadrat-integrierbaren Martingale $M_2(.)$ und $M_3(.)$, welche orthogonal zueinander sind. $M_2(.)$ kann sogar als stochastisches Integral dargestellt werden durch $M_2(t) = \int_0^t X(s)\, dW(s)$ $(t \in [0,T])$ mit $X(.) \in \mathcal{L}$ — vgl. S. 48. Dabei sind zwei Martingale $M_2(.)$ und $M_3(.)$ orthogonal zueinander, wenn ihr quadratischer Kovariationsprozess fast sicher gleich null ist $(\forall t \in [0,T])$; vgl. *Karatzas/Shreve* (1991), S. 31.

auch durch[429]:

$$\varphi^\star(t) = \frac{d\,\langle V_t, DS(t)\rangle}{d\,\langle DS(t), DS(t)\rangle}, \quad t \in [0,T],$$

beschrieben werden. Der im Bond zu haltende Betrag ergibt sich aus $\varphi_0^\star(t) = V_t(\varphi^\star) - \varphi^\star(t)DS(t)\,(t \in [0,T])$.

Im allgemeinen Fall, dass der Aktienkurs bezüglich des ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmaßes kein (bzw. nicht notwendig ein) Martingal, sondern lediglich ein spezielles Semimartingal ist, leiten *Föllmer/Schweizer*[430] eine lokal-risikominierende Hedgingstrategie her. Allgemeine Voraussetzung ist danach, dass $DS(.)$[431] dargestellt werden kann gemäß:

$$DS(t) = ds_0 + M(t) + A(t),\, t \in [0,T], \tag{3.117}$$

wobei ds_0 $\mathcal{F}_0$-messbar sowie $M(.)$ ein lokal quadrat-integrierbares Martingal[432] mit $M(0) = 0$ sind und $A(.)$ einen Prozess endlicher Variation mit $A(0) = 0$ repräsentiert. Zudem muss die Bedingung $E\left[ds_0^2 + [DS]_T + |A(T)|^2\right] < \infty$ erfüllt sein[433].

Eine *lokal-risikominimierende* Hedgingstrategie ist danach dann gegeben, wenn sie sich gegenüber (zeitlich-)lokalen Störungen als optimal im Sinne von minimierend für $R_.(.)$ nach Gl. (3.115) erweist. Hierbei wird der Handelsprozess $\{\varphi(t)\}_{\{0\leq t\leq T\}}$ im Zeitpunkt t_i $(i = 0,\ldots,m)$ verglichen mit dem Prozess $\varphi(t) + \eta(t)1_{(t_i,t_{i+1}]}\,(t \in [0,T])$, wobei $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[0,T]$ ist, deren Weite gegen null strebt[434]; ferner stellt $\eta(.)$ einen

[429] Der Unterschied zwischen dem vorhersehbaren quadratischen Kovariationsprozess $\langle X,Y\rangle$ und dem bisher verwendeten quadratischen Kovarianzprozess $[X,Y]$ in Bezug auf die Prozesse $X(.)$ und $Y(.)$ sei anhand des zeit-zustandsdiskreten Falles veranschaulicht. Danach gilt (vgl. *Dothan* (1990), S. 94 f.) für $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}[X,Y]_t &= X_0Y_0 + \textstyle\sum_{s=1}^t (X(s) - X(s-1))\,(Y(s) - Y(s-1))\,, \\ \langle X,Y\rangle_t &= E\,[X_0Y_0] + \textstyle\sum_{s=1}^t E\,[(X(s) - X(s-1))\,(Y(s) - Y(s-1))\;|\,\mathcal{F}_{s-1}]\,.\end{aligned}$$

Das Inkrement des vorhersehbaren quadratischen Kovariationsprozesses beinhaltet somit eine *erwartete* Kovarianz zwischen den Prozessinkrementen und folglich einen vorhersehbaren Zuwachs aus Sicht des unmittelbar vorausgehenden Zeitpunktes (vorhersagbarer Prozess). Demgegenüber ist das Inkrement des quadratischen Kovariationsprozesses eine Zufallsvariable aus Sicht des jeweils vorausgehenden Zeitpunktes. Bezüglich zeit-zustandskontinuierlicher Prozesse vgl. *Dothan* (1990), S. 259 ff. Da für stetige Martingale der vorhersehbare quadratische Kovariationsprozess und der quadratische Kovariationsprozess übereinstimmen (vgl. *v. Weizsäcker/Winkler* (1990), S. 101, 148), soll die Unterscheidung nicht vertieft werden.

[430] Vgl. zum Folgenden *Föllmer/Schweizer* (1991); vgl. auch bereits *Schweizer* (1988; 1991).

[431] Bei mehrwertigen Aktienkursprozessen hat dies entsprechend für jede Komponente zu gelten.

[432] Die Lokalisierung bedeutet, dass das gestoppte Martingal $M(\tau_n)$ quadrat-integrierbar sein muss, wobei τ_n eine beliebige nicht-fallende Folge von Stoppzeiten mit $\lim_{n\to\infty}\tau_n \to \infty$, fast sicher, ist.

[433] Zu den Bedingungen siehe insbesondere *Föllmer/Schweizer* (1991), S. 391, *Holtrode* (2000), S. 162.

[434] Eine genaue Beschreibung findet sich bei *Grünewald* (1998), S. 77 f., *Holtrode* (2000), S. 94 f., vgl. auch *Schweizer* (1988), S. 43. Zum hier verwendeten Zerlegungsbegriff vgl. S. 41.

beschränkten vorhersagbaren Prozess dar. Daraus lässt sich die folgende Bedingung für den Kostenprozess zum optimalen Handelsprozess ableiten[435]:

C_t $(t \in [0, T])$ ist ein quadrat-integrierbares Martingal, das orthogonal zur Martingalkomponente $M(.)$ des Semimartingales $DS(.)$ (gemäß Gl. (3.117)) unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P ist.

Ferner gibt es eine optimale Handelsstrategie genau dann, wenn es eine *Föllmer/Schweizer*-Zerlegung[436] zum Anspruch B mit folgender Gestalt gibt:

$$\bar{B} = B_0 + \int_0^t \varphi^B(s)\, dDS(s) + L^B(t),\ t \in [0, T], \tag{3.118}$$

wobei $\varphi^B(.)$ die bereits eingeführten Regularitätsbedingungen erfüllen muss und $L^B(.)$ (wiederum) ein quadrat-integrierbares Martingal repräsentiert, welches orthogonal zu $M(.)$ ist. Der optimale Kostenprozess ist dann wiederum durch $C_t = B_0 + L^B(t)\,(0 \le t \le T)$, der optimale Handelsprozess durch $\varphi^\star(.) = \varphi^B(.)$ mit $\varphi_0^\star(.) = V_t(\varphi^\star) - \varphi^\star(.)DS(.)$ gegeben. Eine Zerlegung gemäß Gl. (3.118) kann über eine zweifache *Kunita/Watanabe*-Zerlegung des Aktienkursprozesses gesucht werden[437]. Ausgehend von den Zerlegungen des zu hedgenden Anspruches:

$$\bar{B} = \tilde{B}_0 + \int_0^T \tilde{\mu}(s)\, dM(s) + (\tilde{B}(T) - \tilde{B}_0)$$

und des Integralterms über den Prozess endlicher Variation in der Zerlegung des Semimartingales $DS(.)$:

$$\int_0^T \varphi^B(s)\, dA(s) = \bar{A}_0 + \int_0^T \bar{\mu}(s)\, dM(s) + (\bar{A}(T) - \bar{A}_0),$$

muss mit der Darstellung des zu hedgenden Anspruches nach Gl. (3.118) gelten:

$$\bar{B} = B_0 + \bar{A}_0 + \int_0^T \left(\varphi^B(s) + \bar{\mu}(s)\right)\, dM(s) + (L^B(T) + \bar{A}(T) - \bar{A}_0)$$

sowie

$$\varphi^B(.) + \bar{\mu}(.) = \tilde{\mu}(.) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^B(.) = \tilde{\mu}(.) - \bar{\mu}(.).$$

Für den hier zugrunde liegenden Fall stetiger Aktienkursprozesse entspricht der Duplikationsprozess dem Erwartungswert des zu duplizierenden Anspruches unter einem bestimmten, (fast sicher, fast immer) eindeutig gegebenen

435 Vgl. *Holtrode* (2000), S. 95, mit Hinweisen auf die Primärliteratur.
436 Vgl. auch *Grünewald* (1998), S. 75.
437 Vgl. *Schweizer* (1991), S. 397. Vgl. auch *Grünewald* (1998), S. 76, sowie zur Existenz einer solchen Zerlegung *Schweizer* (1995), S. 590 ff.

Wahrscheinlichkeitsmaß $\hat{P}$[438]. $\hat{P}$ heißt *minimales* Martingalmaß und besitzt die Eigenschaft, dass jedes unter P quadrat-integrierbare und zu $M(.)$ orthogonale Martingal ein Martingal unter $\hat{P}$ bleibt. Da $\hat{P}$ Martingalmaß ist, ist insbesondere auch $DS(.)$ ein $\hat{P}$-Martingal. Die Dichte von $\hat{P}$ kann beschrieben werden durch die Einführung des Maßwechselprozesses:

$$\hat{Z}(t) = e^{-\int\limits_0^t \alpha(s)\, dM(s) - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \alpha^2(s)\, d\langle DS\rangle}, \quad t \in [0,T].$$

Hierbei ergibt sich der vorhersagbare Prozess $\alpha(.)$ aus der Darstellung $A(t) = \int_0^t \alpha(s)\, d\langle DS\rangle$. Die Existenz eines eindeutigen Maßes $\hat{P}$ ist damit äquivalent dazu, dass $\hat{Z}(.)$ ein Martingal ist. Es gilt dann: $d\hat{P} = \hat{Z}(T)dP$. Der Duplikationsprozess besitzt nunmehr eine Darstellung als $\hat{P}$-Martingal:

$$V_t(\varphi^\star) = E_{\hat{P}}\left[\bar{B} \mid \mathcal{F}_t\right], \quad t \in [0,T].$$

Die optimale Strategie ergibt sich damit aus:

$$\varphi^\star(t) = \frac{d\,\langle V_t, DS(t)\rangle}{d\,\langle DS(t), DS(t)\rangle}, \quad t \in [0,T],$$

sowie mit $\varphi_0^\star(t) = V_t - \varphi^\star(t)DS(t)$ ($t \in [0,T]$).

Die für die Ermittlung risiko-minimierender Strategien betrachtete Funktion $R_.(.)$ — in Verbindung mit dem Duplikationsprozess $V_.(.)$ — stellte auf die Minimierung quadratischer Abweichung von Zu- und Abflüssen ab, welche für die Duplikation des Anspruches B (bzw. barwertig $\bar{B}$) unumgänglich sind. Sobald der Anspruch B folglich nicht durch Kapitalmarkttransaktionen erreicht werden kann und somit ein nicht-verschwindender Kostenprozess notwendig ist, wird auch die duplizierende Handelsstrategie $(\varphi_0(.), \varphi'(.))$ nicht selbst-finanzierend sein. So gesehen kann aber auch alternativ das Risiko minimiert werden, welches als erwartete quadratische Abweichung zwischen dem betrachteten Anspruch B und Endwerten von Portfolien besteht, die gerade durch selbst-finanzierende Handelsstrategien erzeugt werden können. Eine diesbezügliche Optimierung wird als *varianz-minimierendes Hedging*[439] bezeichnet.

Für das Folgende werden Handelsstrategien $\varphi(.)$ aus der Menge $\tilde{\Phi}$ betrachtet, die die Regularitätsbedingungen der Handelsstrategien aus der Menge Φ erfüllen, für die eine Verbindung zur Gl. (3.114) nun allerdings nicht mehr besteht. Stattdessen werden die folgenden Optimierungsprobleme bezüglich des zu hedgenden Anspruches $\bar{B}$[440] betrachtet:

$$(\mathcal{H}1): \quad \min_{\varphi(.)\in\tilde{\Phi}} E\left[(\bar{B} - c - G_t(\varphi))^2\right], \quad c > 0,$$
$$(\mathcal{H}2): \quad \min_{(c,\varphi)\in\mathbb{R}\times\tilde{\Phi}} E\left[(\bar{B} - c - G_T(\varphi))^2\right],$$

[438] Vgl. zum Folgenden *Föllmer/Schweizer* (1991), S. 398 ff.
[439] Vgl. hierzu die Beiträge von *Duffie/Richardson* (1991), *Schweizer* (1992, 1996), *Pham/Rheinländer/Schweizer* (1998).
[440] Es wird wiederum von barwertig formulierten Prozessen ausgegangen.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

wobei $G_t(\varphi) = \int_0^t \varphi(s)\, dDS(s)\,(t \in [0,T])$ wiederum den (barwertigen) Gewinn-/Verlust-Prozess zur Handelsstrategie $\varphi(.)$ bezeichnet. (Der Einfachheit halber sei weiterhin von nur einer gehandelten Aktie mit diskontiertem Kurs-Prozess $DS(.)$ ausgegangen.) Das Problem $(\mathcal{H}1)$ beinhaltet die Minimierung des Hedgefehlers in $t = T$, der bei einem gegebenen Ausgangsvermögen c in $t = 0$ über einen selbst-finanzierenden Handelsprozess[441] entsteht[442]. Demgegenüber wird im Problem $(\mathcal{H}2)$ das Anfangsvermögen (bzw. die Anfangsverschuldung) in die Optimierung einbezogen. Ein sich danach ergebender optimaler Wert $\hat{c}$ kann als Preis für den bedingten Anspruch in $t = 0$ betrachtet werden[443].

In *Schweizer* (1992) wird das Problem $(\mathcal{H}1)$ unter den folgenden zusätzlichen Annahmen bzw. Umformungen gelöst: Betrachtet sei ein durch zwei Wiener-Prozesse $(W_1(.), W_2(.))$ charakterisierter Wahrscheinlichkeitsraum. Zunächst wird der Wiener-Prozess $W_3(.)$ definiert über:

$$W_3(t) := \int_0^t \rho(s)\, dW_1(s) + \int_0^t \sqrt{1 - (\rho(s))^2}\, dW_2(s), \quad t \in [0,T],$$

wobei dem Prozess $\rho(.)$ mit $|\rho(t)| \leq 1\,(t \in [0,T])$ die Interpretation einer Korrelation zukommt, welche dadurch als Prozess eingeführt wird. Auf dem Markt wird eine Aktie gehandelt, deren (diskontierter) Kursprozess durch:

$$dDS(t) = DS(t)\left(\mu_d(t)\, dt + \sigma_d(t)\, dW_3(t)\right), \quad t \in [0,T],\ DS_0 > 0,$$

beschrieben ist. Hierbei muss gelten: $\left\{\dfrac{\mu_d(t)}{\sigma_d(t)}\right\}_{0 \leq t \leq T}$ ist ein *deterministischer* Prozess. Der optimale Handelsprozess ergibt sich aus der Lösung einer stochastischen Differentialgleichung[444]. Sei hierzu $G_t^\star$ die Lösung der stochastischen Differentialgleichung:

$$dG_t^\star = \Theta(G_t^\star)\, dDS_t, \quad G_0^\star = 0,$$

mit

$$\Theta(G_t^\star) = \hat{\varphi}(t) + \alpha(t)(V_t(\hat{\varphi}) + c - G_t^\star).$$

Hierbei ist $\alpha(t) := \dfrac{\mu_d(t)}{\sigma_d^2(t) DS(t)}\,(t \in [0,T])$. $\hat{\varphi}(.)$ ist der lokal-risikominimierende Handelsprozess und $V_t(\hat{\varphi})$ der zugehörige Duplikationsprozess, welcher mit dem minimalen Wahrscheinlichkeitsmaß $\hat{P}$ verbunden ist. Die Lösung $\varphi^\star(.)$ des Optimierungsproblems $(\mathcal{H}1)$ ist dann durch:

$$\varphi^\star(t) = \Theta(G_t^\star) = \hat{\varphi}(t) + \alpha(t)(V_t(\hat{\varphi}) + c - G_t^\star), \quad t \in [0,T], \tag{3.119}$$

[441] Hierbei muss allerdings nicht $X(t) = G(t)\,(t \in [0,T])$ gelten — mit $X(.)$ als dem zugehörigen Vermögensprozess. Vielmehr ist für den Vermögensprozess die aufgrund der Diskontierung im Gewinn-/Verlust-Prozess nicht zu beachtende Anlage/Verschuldung im risikolosen Bond zu berücksichtigen.

[442] Vgl. zu diesem Problem insbesondere *Schweizer* (1992).

[443] Vgl. hierzu *Schweizer* (1996); vgl. zum Problem der Preisbestimmung bereits *Schäl* (1994).

[444] Vgl. *Schweizer* (1992), S. 175.

gegeben. Gl. (3.119) zeigt — in Gestalt des zweiten Summanden auf der rechten Seite — damit zugleich die Abweichung der optimalen Strategie im Verhältnis zur optimalen Strategie des lokal-risikominierenden Problems. Das Optimierungsproblem ($\mathcal{H}2$) kann ebenfalls über ein besonderes Maß gelöst werden. Hierfür ist zunächst der folgende Begriff einzuführen:

Ein *signed Φ-martingale measure* auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ ist ein „signed measure“[445], welches die Bedingungen: $Q[\Omega] = 1$, $Q \ll P$ mit $E\left[\left(\frac{dQ}{dP}\right)^2\right] < \infty$ sowie $E\left[\frac{dQ}{dP} G_T(\varphi)\right] = 0$, $\forall \varphi(.) \in \Phi$ erfüllt. $\mathbb{P}_s(\Phi)$ bezeichne die Menge aller signed Φ-martingale measures.

Ein besonderes signed Φ-martingale measure ist das so genannte *varianz-optimale* Maß $\tilde{P}$. Dieses ist wie folgt definiert:

$$\tilde{P} := \arg \min_{Q \in \mathbb{P}_s(\Phi)} Var\left[\frac{dQ}{dP}\right] = \arg \min_{Q \in \mathbb{P}_s(\Phi)} E\left[\left(\frac{dQ}{dP}\right)^2\right] - 1.$$

Über das varianz-optimale Maß $\tilde{P}$ ist der Gegenwarts-Preis $\hat{c}$ des Anspruches $\bar{B}$ in der Lösung des Problems ($\mathcal{H}2$) gegeben durch[446]:

$$\hat{c} = E_{\tilde{P}}\left[\bar{B}\right].$$

Sofern die entsprechenden Voraussetzungen erfüllt sind, ist die optimale Strategie dann durch Gl. (3.119) mit $c = \hat{c}$ bestimmt.

Das varianz-optimale Maß kann auch über einen so genannten „Anpassungsprozess“ hergeleitet werden, auf den hier jedoch nicht vertiefend eingegangen werden soll[447]. Zudem ist zu beachten, dass das varianz-optimale Maß nicht generell ein Wahrscheinlichkeitsmaß repräsentiert. Für stetige Prozesse wird eine so genannte *Strukturbedingung* formuliert, so dass $\hat{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist — mit der Konsequenz, dass erst dadurch die Arbitragefreiheit des abgeleiteten Preises für den bedingten Anspruch sichergestellt ist[448]. Darüber hinaus stimmen varianz-optimales und risikominimierendes Maß nur unter bestimmten Bedingungen bezüglich der Komponenten der Aktienkursprozesse überein[449]. Grundsätzlich sind die Maße somit zu trennen. Für stetige Semimartingale ist das varianz-optimale Maß stets äquivalent zum ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmaß P[450].

Die vorgestellten Hedgingansätze der Ermittlung (lokal-)risikominimierender Handelsstrategien implizieren extrem risikoaverses Verhalten. Vor dem Hintergrund verschiedener Nutzenvorstellungen, welche zur Abbildung von

---

[445] Ein solches Maß kann einen der Werte ∞ oder $-\infty$ annehmen; vgl. Billingsley (1995), S. 427, *Taylor* (1997), S. 61.
[446] Vgl. *Schweizer* (1996), S. 211.
[447] Vgl. hierzu *Schweizer* (1996), S. 218 ff., *Grünewald* (1998), S. 81 f. i.V.m. S. 40.
[448] Vgl. *Schweizer* (1996), S. 222 f.
[449] Vgl. zu Bedingungen, wann denen die Maße gleich, *Schweizer* (1996), S. 217, 226.
[450] Vgl. *Delbaen/Schachermayer* (1996).

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Investorenverhalten bereits betrachtet wurden[451], erscheint eine derart extreme Risikoneigung als wenig plausibel. Allerdings betrifft diese Kritik letztlich alle auf Hedging abzielenden finanzwirtschaftlichen Ansätze, welche die dem Risiko gegenüberstehende positive Erfolgskomponente (erwarteter Erlös, Rendite o.a.) außer Acht lassen. Der varianz-optimale Ansatz mit vorgegebenem Anfangsvermögen kann diesbezüglich als Maximierung des Erwartungsnutzens auf Basis einer quadratischen Nutzenfunktion angesehen werden[452]. Eine quadratische Nutzenfunktion weist jedoch eine zunehmende absolute und relative Risikoaversion auf und wird deshalb nicht als Abbildung einer plausiblen Nutzenvorstellung betrachtet[453].

Damit zusammenhängend ist auch die Ermittlung eines Optionspreises im varianz-optimalen Ansatz unter Einbeziehung des Anfangsvermögens als zu optimierende Variable kritisch zu sehen. Die auf dem vollständigen Markt abgeleiteten Optionspreise erhielten ihre Rechtfertigung durch Arbitragemöglichkeiten, die sich bei einer nach oben oder nach unten abweichenden Bewertung ergeben. Somit ist lediglich ein monoton mit dem Vermögen ansteigender Nutzenverlauf zu unterstellen, um die Bewertung in einen Nutzenkontext stellen zu können, der dazu noch kaum eingeschränkt ist. Diese Interpretation ist für den aus dem varianz-optimalen Ansatz abgeleiteten Preis nicht mehr gegeben, da dieser Preis keinen entsprechenden Fixpunkt mehr repräsentiert, welcher durch Marktreaktionen etabliert wird. Die Eindeutigkeit des Preises ergibt sich nur dann, wenn extreme Nutzenvorstellungen gelten, die — bspw. im Unterschied zur Preisermittlung nach *Davis* — für einen potentiellen Käufer und einen Verkäufer in jeweils identischer Weise zu unterstellen sind. Mit Ausnahme gewisser Regularitätsbedingungen sind die Handelsprozesse in den beschriebenen Hedgingansätzen nicht restringiert. Folglich ist ein unvollständiger Markt stets als unvollständig im engeren Sinne vorauszusetzen. Hiervon abweichende Gestaltungen der Unvollständigkeit, wie Leerverkaufs- oder sonstige Verschuldungsrestriktionen, sind nicht abbildbar. Die Hedgingansätze sind also auch bezüglich der Restriktionen, welche berücksichtigt werden können, beschränkt.

Schließlich setzt eine weitere, anschließend skizzierte Vorgehensweise der Bepreisung bedingter Ansprüche an der Auswahl eines mit der Arbitragefreiheit des Marktes zu vereinbarenden Wahrscheinlichkeitsmaßes an. Dieses wird herangezogen, um den Wert des Anspruches als Erwartungswert seiner Auszahlung, ggf. korrigiert durch einen Numeraire-Titel (Diskontierung), zu bestimmen. Hierfür wird das Wahrscheinlichkeitsmaß mit der maximalen Entropie bzw. der minimalen Cross-Entropie aus einer durch A-priori-Informationen eingeschränkten Menge zulässiger Wahrscheinlichkeitsmaße ausgewählt.

---

[451] Vgl. hierzu *Abschnitt 2.2.3.1.*

[452] Vgl. *Duffie/Richardson* (1991), S. 6, *Schweizer* (1992), S. 173.

[453] Vgl. ebenfalls *Abschnitt 2.2.3.1.* Einschränkend bereits *Schweizer* (1992), S. 173. Zu einer kurzen Diskussion der Verwendung quadratischer Nutzenfunktionen, insbesondere im Kontext des Hedging bedingter Ansprüche, vgl. *Breuer/Gürtler* (2001), S. 602 ff.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

3.3.3.2.5 Bepreisung bedingter Ansprüche mittels Entropie

Der Optionspreisermittlung mit Hilfe der Entropie liegt folgender Gedanke zugrunde[454]: Geht man zunächst davon aus, dass sich die Preise der am Markt beobachteten Wertpapiere jeweils als Erwartungswert ihrer Auszahlung[455] ergeben, kann unter den danach möglichen äquivalenten Martingalmaßen dasjenige ausgewählt werden, welches statistisch am häufigsten auftritt. Ohne über die vorhandenen Wertpapierkurse hinausgehende Informationen wird dadurch schlicht die wahrscheinlichste Wahrscheinlichkeitsverteilung genommen, wenn a priori von gleich wahrscheinlichen Ereignissen ausgegangen wird. Dies entspricht der Maximierung der *Entropie*, welche für das Wahrscheinlichkeitsmaß Q definiert ist als[456]:

$$H(Q) = -\sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) \ln Q(\omega) = -E_Q \left[\ln Q\right].$$

Ohne jedwede Vorabinformation weist die Gleichverteilung den höchsten Entropiewert auf. Wäre somit bspw. die Gleichverteilung per se bereits mit den beobachteten Wertpapierkursen i.o.S. vereinbar, wie dies der Fall ist, wenn *keine* relevanten Wertpapierpreise vorliegen, würde die Gleichverteilung auch zur Bepreisung eines (insbesondere nicht duplizierbaren) bedingten Anspruches herangezogen.

Liegt demgegenüber eine weitergehende Information in Gestalt einer A-priori-Wahrscheinlichkeitsverteilung, repräsentiert durch das Wahrscheinlichkeitsmaß P, über die möglichen Umweltzustände vor, ohne dass jedoch die beobachteten Wertpapierpreise bereits Martingale unter diesem Wahrscheinlichkeitsmaß wären, so kann ein äquivalentes Martingalmaß gewählt werden, welches unter P am wahrscheinlichsten ist[457]. Ist P selbst ein Martingalmaß, so ist auch P selbst unter P am wahrscheinlichsten. Das Wahrscheinlichkeitsmaß mit der höchsten Wahrscheinlichkeit unter P ist dasjenige, für welches die *Cross-Entropie* minimal ist. Diese wiederum ist in Bezug auf ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q definiert durch[458]:

$$H(Q \mid P) = -\sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) \ln \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -E_Q \left[\ln \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right].$$

Für sich betrachtet, erscheint die Auswahl eines in gewisser Weise „häufigsten" Wahrscheinlichkeitsmaßes aus einer durch die Unvollständigkeit des Wissensstandes bestimmten Menge nicht zwingend; die Vorgehensweise ist insbesondere nicht entscheidungstheoretisch begründet. Erst durch eine Verbindung zur Erwartungsnutzenmaximierung gewinnt sie ökonomischen Gehalt.

[454] Es soll hier lediglich die Grundidee wiedergegeben werden. Eine ausführliche Erörterung mit weiterführenden Literaturhinweisen findet sich in *Branger* (2002), deren Ausführungen auch der im Folgenden gegebenen Darstellung zugrunde liegen; vgl. hier insbesondere *ebd.*, S. 114 ff.

[455] Der Aspekt der Diskontierung bzw. des Numerairebezuges wird im Folgenden vernachlässigt.

[456] Vgl. *Branger* (2002), S. 115.

[457] Vgl. *Branger* (2002), S. 129.

[458] Vgl. *Branger* (2002), S. 118.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Diese besteht darin, dass die Minimierung der Cross-Entropie einer Maximierung des Erwartungsnutzens zu einer exponentiellen Nutzenfunktion entspricht[459]. Damit besteht aber lediglich ein beschränkter Nutzenbezug, für den zudem die gegenüber anderen Nutzenfunktionen vergleichsweise ungünstigen Eigenschaften der exponentiellen Nutzenfunktion hinsichtlich der implizierten Risikoaversionscharakteristika zu beachten sind[460]. Darüber hinaus erstreckt sich die Verbindung zwischen der Minimierung der Cross-Entropie und der Maximierung des exponentiellen Nutzens nicht auf über unvollständige Märkte i.e.S. hinausgehende, komplexere Portfolio-Restriktionen, wie bspw. Leerverkäufe[461].

Fasst man nunmehr sämtliche bisher besprochenen Ansätze zusammen, kann festgehalten werden, dass noch kein voll befriedigendes Konzept für die Bepreisung bedingter Ansprüche vorliegt. Insofern bleibt es dem jeweiligen Anwender überlassen, einen situationsabhängig geeigneten Ansatz auszuwählen. Hierbei ist sicherlich auch die Komplexität der Umsetzung dieser Lösungskonzepte zu erwägen. Aus entscheidungstheoretischer Perspektive zumindest erscheinen die primär am Erwartungsnutzenprinzip ausgerichteten und auf diesbezüglich plausible Nutzenvorstellungen rekurrierenden Ansätze einen Vorzug zu besitzen. Zu berücksichtigen ist ferner, dass die vorgestellten Ansätze teilweise in der Abbildung komplexer Unvollständigkeitssituationen wesentlich eingeschränkt sind.

Vor dem Hintergrund der gerade getroffenen Feststellung soll im Folgenden die Ermittlung von Wertgrenzen zu bedingten Ansprüchen weiterverfolgt werden. Hierbei wird eine realoptionstheoretische Fragestellung zugrunde gelegt. Es geht nachfolgend mithin um die Untersuchung einer speziellen Realoptionsproblematik auf einem unvollständigen Kapitalmarkt, wobei die Unvollständigkeit des Kapitalmarkts in Bezug auf die involvierten Wirtschaftssubjekte einer differenzierten Betrachtung unterzogen wird.

3.3.4 Realoptionen auf unvollständigen Märkten

3.3.4.1 Vorbemerkungen zum untersuchten Aspekt

Die Bewertung von Handlungsmöglichkeiten im Bereich von Sachinvestitionen, welche gemeinhin als Realoptionen bezeichnet werden, erfolgt bis dato nahezu ausschießlich unter den idealen Bedingungen eines vollkommenen und vollständigen Kapitalmarktes oder, im Ergebnis diesen Bedingungen gleichkommend, unter der Vorgabe eines exogenen Diskontierungszinssatzes nach

[459] Vgl. hierzu insbesondere *Branger* (2002), S. 186 ff., *Fritelli* (2000a) sowie zur Verbindung mit dem minimalen Martingalmaß *Delbaen/Grandits/Rheinländer/Samperi/Schweizer/Stricker* (2002), *Bellini/Fritelli* (2002).

[460] Vgl. diesbezüglich *Abschnitt 2.2.3.1.*

[461] Zumindest entzieht sich eine derartige Erweiterung meiner Kenntnis.

Entscheidungsregeln unter Unsicherheit[462]. Der Preis eines bedingten Anspruches ist dann auf einem arbitragefreien Markt *eindeutig*. Die hierfür erforderliche Duplikationsmöglichkeit beliebiger Zahlungsmuster ist für die in Sachinvestitionen liegende Unsicherheit eine hehre Forderung, beinhalten doch gerade sie oft Unsicherheitsquellen, die am Kapitalmarkt gar nicht oder nur beschränkt gehandelt werden.

Es soll deshalb eine Bewertung von Realoptionen untersucht werden, welche auf die für unvollständige Kapitalmärkte i.w.S. entwickelte Bewertung bedingter Ansprüche zurückgreift. Diesbezüglich besteht die Möglichkeit, den Wert eines bedingten Anspruches subjektiv, d.h. über die durch eine Nutzenfunktion zum Ausdruck kommenden Präferenzen des Investors, zu bestimmen oder aber eine arbitragefreie Bewertung durchzuführen. Der erste Weg führt zu einem eindeutigen Preis aus Sicht eines Investors und i.d.R. unterschiedlichen Preisen zwischen verschiedenen Investoren. Lediglich wenige Ansätze greifen diesen Aspekt auf, indem sie auf die nutzenorientierte Bewertung bedingter Ansprüche auf unvollständigen Kapitalmärkten — in der Regel im engeren Sinne — rekurrieren. Das dabei behandelte Problem besteht in der Bepreisung eines Anspruches, dessen Underlying zwar nicht selbst gehandelt wird, wohl aber ein Gut/Finanzinstrument, dessen Wert durch einen stochastischen (Kurs-)Prozess bestimmt wird, welcher mit demjenigen des Underlyings korreliert ist („Substitut“)[463]. Bei der nutzenbezogenen Bewertung einer Realoption im Rahmen der Bewertung des gesamten Unternehmens entstehen unterschiedliche Preise aus Käufer- bzw. Verkäufersicht, die zwar im Zusammenhang bspw. eines Unternehmenskaufes ein positives Verhandlungsintervall eröffnen mögen, i.d.R. aber ohne spezifische Kenntnis der Nutzenvorstellungen, die der jeweiligen Bewertungssicht zugrunde liegen, nicht eingegrenzt werden können. Es kann folglich seitens des Optionsinhabers kein „objektiver“ Mindestwert abgeleitet werden, den jeder Käufer aufbringen muss. Unter anderem diesem Aspekt gilt die Eingrenzung von Werten bedingter Ansprüche durch die arbitragefreie Bewertung auf unvollständigen Kapitalmärkten, welche den Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen bildet. Dabei verhindert die Marktunvollständigkeit, den Bereich arbitragefreier Preise auf einen einzigen Wert zu beschränken; es verbleibt vielmehr ein *Intervall* derartiger Preise. Dieses Intervall wird bestimmt durch einen Käufer- und einen Verkäuferpreis, wie sie in *Abschnitt 3.3.3.1.1* behandelt wurden.

Eine Erklärung für den Befund, dass das Schrifttum Realoptionen bisher kaum unter dem Blickwinkel der arbitragefreien Bewertung auf unvollständigen Märkten betrachtet hat, mag neben der Nicht-Eindeutigkeit des Preises u.a. darin liegen, dass für viele Restriktionen nicht einmal aussagefähige Grenzen entstehen. In dem von *Hubalek/Schachermayer*[464] betrach-

[462] Vgl. bereits *Abschnitt 2.2.4*.

[463] Vgl. *Henderson* (2002) sowie allgemeiner die nutzen- und hedgingorientierten Ansätze des *Abschnittes 3.3.3.2*.

[464] Vgl. *Hubalek/Schachermayer* (2001).

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

teten Fall einer (gewöhnlichen) europäischen Kaufoption auf ein nicht gehandeltes Gut, dessen Risikoprofil mit einem gehandelten Gut sehr hoch, jedoch nicht vollständig positiv korreliert ist, können nur triviale Wertgrenzen aus der Arbitragefreiheitsbedingung abgeleitet werden. Auch hier soll dies später anhand einer amerikanischen Kaufoption, mittels welcher die Möglichkeit der Wahl eines Anfangs-Zeitpunktes für eine Sachinvestition abgebildet werden kann (Warteoption), und, in einem erweiterten Restriktionenkontext, einer als europäische, indizierte Kaufoption spezifizierten Realoption veranschaulicht werden. Zu Letzterer wird — unter der Annahme konstanter Koeffizientenprozesse — dargelegt, dass bereits für „einfache“ Restriktionen in der Art, wie sie im Schrifttum Verwendung finden, die Wertobergrenze der inhärenten Wahlmöglichkeit unendlich, die Wertuntergrenze hingegen null ist, sofern die Beschränkungen binden. Das heißt, dass der Bereich arbitragefreier (nicht negativer) Preise für die Realoption nicht einschränkbar ist. Im Falle der amerikanischen Kaufoption zeigt sich dies, indem die Untergrenze gleich dem Investitionswert bei sofortiger Ausübung ist, so dass als Wertuntergrenze für das „eigentliche Optionselement“[465] null anzusetzen ist. „Realoption“, Für die als europäische Kaufoption interpretierte Realoption lässt sich demgegenüber das „Wahlelement“ von einem Referenzwert für die Investition ohne Wahlmöglichkeit nicht sinnvoll trennen. In diesem Fall stellen sich die extremen Wertgrenzen in Bezug auf das gesamte Investitionsprojekt ein. Wirken die Restriktionen demgegenüber aus Käufer- und/oder Verkäufersicht nicht bindend, ergeben sich diesbezüglich die Werte des vollständigen Kapitalmarktes. Für einfache europäische Kaufoptionen auf komplexer modellierte Prozesse des Underlyings, wie insbesondere solchen mit stochastischer Volatilität, zeigen sich ebenfalls vornehmlich triviale Wertgrenzen[466].

Dem Aspekt „trivialer“ und insofern aussageloser Wert-Intervalle soll detaillierter nachgegangen werden. Es wird hierzu ein bedingter Anspruch in Gestalt einer Kaufoption zugrunde gelegt, welcher — zumindest näherungsweise — spezielle Wahlentscheidungen im Bereich von Sachinvestitionen abzubilden vermag. Hinsichtlich der Wertdeterminanten des Anspruchs werden differenzierte Konstellationen „einfacher“ Restriktionen, welche sich aus einer Kombination von Vollständigkeit, Leerverkaufsverbot und Unvollständigkeit i.e.S. in Bezug auf die Einzeldeterminanten ergeben, untersucht. Die Frage, ob es Realoptionen gibt, denen auch auf unvollständigen Kapitalmärkten unabhängig von den Präferenzen des Investors ein (echt) positiver Wert zugewiesen werden kann, ist dann zu bejahen, wenn sich ein positiver Käuferpreis i.o.S. ableiten lässt. Dies würde implizieren, dass Unternehmenswerte auch auf unvollständigen Kapitalmärkten stets unter Einbeziehung von Realoptionen in Form „noch offener“ Wahlmöglichkeiten zu berechnen sind, wobei ihr Wertbeitrag ein Verhandlungsintervall mit sich bringt. Umgekehrt würde ihre

[465] Vgl. Fn. 267, S. 133.
[466] Vgl. hierzu *Cvitanić/Pham/Touzi* (1999) und *Frey/Sin* (1999), wobei Letztere Bedingungen für das Auftreten trivialer Wertgrenzen herleiten.

Vernachlässigung einen als sicher zu betrachtenden Wertbestandteil ignorieren. Um eine Antwort auf die damit aufgebrachte Fragestellung zu geben, wird der mit Bezug auf Realoptionen neue Aspekt eingebracht, dass aus Sicht des Inhabers des bedingten Anspruches die Wertkomponenten anderen Restriktionen unterliegen können als dies für andere Marktteilnehmer, unter welche hier gerade nicht ein potentieller Käufer zu rechnen ist, gilt[467]. Es soll dann davon gesprochen werden, dass der Markt *differenziert unvollständig* ist. Eine solche Unterscheidung erscheint durchaus nahe liegend, wenn man die Annahme eines Lieferungs-/Leistungsauftrages als Eingehen einer Short-Position interpretiert und die Möglichkeit hierzu allein dem Produzenten zubilligt. Ein Unternehmen kann dann bspw. in seinem eigenen Produkt long oder short gehen, während bezüglich der von ihm nachgefragten Vorprodukte die Übernahme einer Lieferverpflichtung (Short-Position) zwar nicht für das Unternehmen selbst, aber für seine(n) Zulieferer möglich ist.

Für die weitere Erörterung wird von der in *Abschnitt 2.2.4*[468] eingeführten Warteoption ausgegangen. Um den Bezug für das Folgende zu erleichtern, werden das Auszahlungsprofil des Anspruches sowie die relevanten Kursprozesse wiederholt. Allerdings wird nunmehr von einem endlichen Planungszeitraum ausgegangen. Zugrunde liegt somit der bedingte Anspruch:

$$B(t) = \max\left[V(t) - I(t), 0\right] \quad (t \in [0,T]). \tag{3.120}$$

Die Prozesse für das Underlying $V(.)$ und den Vorleistungswert $I(.)$ werden für $t \in [0,T]$ beschrieben durch:

$$\begin{aligned} dV(t) &= V(t)\left(b_V\, dt + \sigma_V\, dW^V(t)\right), & (3.121)\\ dI(t) &= I(t)\left(b_I\, dt + \bar{\sigma}_I\, d\bar{W}^I(t)\right). & (3.122)\end{aligned}$$

Hierbei seien die Wiener-Prozesse $W^V(.)$ und $\bar{W}^I(.)$ ggf. korreliert mit dem konstanten Koeffizienten ρ_{IV}. U.U. sind auch „Dividendenprozesse" zu berücksichtigen. Die Prozesse $V(.)$ bzw. $I(.)$ mit den Anfangswerten V_0 bzw. I_0 können entsprechend der Vorgehensweise in *Abschnitt 2.2.4*[469] über stochastische Differentialgleichungen auf Basis von zwei stochastisch unabhängigen Wiener-Prozessen dargestellt werden. Hierzu ist der Wiener-Prozess $\bar{W}^I(.)$ durch den Wiener-Prozess $W^I(.)$ zu ersetzen, so dass sich über $\sigma := (\sigma_{ij})_{i,j=1,2}$ mit $\sigma_{11} := \sigma_V, \sigma_{12} := 0, \sigma_{21} := \rho_{IV}\bar{\sigma}_I$ und $\sigma_{22} := \sqrt{1-\rho_{IV}^2}\,\bar{\sigma}_I$ die bereits bekannten stochastischen Differentialgleichungen für

[467] Eine zwischen verschiedenen Marktteilnehmern differenzierende Restriktion im Rahmen eines Problems der dynamischen Portfolio-Optimierung ist in *Basak* (1995) zu finden; vgl. hierzu S. 154. Dort wird eine Mindestkapitalanforderung formuliert, die sich auf eine spezielle Gruppe von Marktakteuren und auch für diese lediglich auf einen Zeitpunkt innerhalb des Planungsintervalls bezieht. Im Blickpunkt steht dabei der Einfluss der untersuchten Markt-Restriktion auf Marktpreise. Damit unterscheidet sich der Ansatz wesentlich von der hier präsentierten Modellierung und dem ihr zugrunde liegenden Untersuchungsziel.

[468] Vgl. insbesondere S. 132.

[469] Vgl. hierzu S. 135.

den Output- und den Vorleistungswertprozess ergeben, welche dem Folgenden zugrunde liegen und der Einfachheit halber nochmals angegeben werden:

$$dV(t) = V(t)\left(b_V\,dt + \sigma_{11}\,dW^V(t)\right), \tag{2.109}$$
$$dI(t) = I(t)\left(b_I\,dt + \sigma_{21}\,dW^V(t) + \sigma_{22}\,dW^I(t)\right). \tag{2.110}$$

Im Folgenden werden Arbitragegrenzen für die angesprochenen indizierten Kaufoptionen amerikanischen und europäischen Typs bestimmt. Die Käufer- und Verkäuferpreise werden unter Rückgriff auf die hierzu vorliegenden Aussagen des *Abschnittes 3.3.3.1.1*, somit mit Bezug auf die Sätze 3.4 bis 3.8, ermittelt. Bevor dabei auf mögliche Effekte einer differenzierten Restriktionenspezifikation im Rahmen der bereits charakterisierten europäischen Kaufoption eingegangen wird, soll die Problematik eines Wertnachweises bei Unvollständigkeit des Marktes verdeutlicht werden. Hierzu wird die Warteoption, welche sich als amerikanische Kaufoption darstellt, betrachtet.

3.3.4.2 Zur Bewertung einer optionalen Wahl des Investitionsbeginns

Die Option zur Wahl des Initiierungszeitpunktes einer Investition (Warteoption) wird gemäß *Abschnitt 2.2.4* als amerikanische Kaufoption auf den bei Initiierung realisierbaren Ertragswert des Outputs unter Aufwendung des Vorleistungsbarwertes modelliert. Dabei wird zunächst der Fall eines deterministischen Prozesses für die Vorleistungswertentwicklung angenommen. Unter dieser Voraussetzung wirkt für amerikanische Calls eine positive Zeitdrift in der Wertentwicklung des Underlyings im Erwartungswert erhöhend auf den zukünftigen Ausübungswert, so dass, grob gesprochen, der Wertzuwachs dem Optionsinhaber nicht verloren geht. Anders verhält es sich hingegen, falls das Underlying Ausschüttungen an den Eigentümer mit sich bringt, welche folglich nicht zu einer Erhöhung des Underlying-Wertes führen, auf den allein sich jedoch die Option bezieht[470]. Für Realoptionen können gleichermaßen Rückflüsse durch die Nicht-Ausübung der Option, also das Warten mit dem Investitionsbeginn, entgehen. Sie werden durch den nicht realisierten Dividendenstrom einer Finanzoption modelliert. Für ökonomische Problemstellungen, die mit dem hier betrachteten Ansatz modellierbar sind, sind stets entgehende Zahlungen zu unterstellen, da die Ausübung der Option (vor Fälligkeit) sonst nie sinnvoll wäre[471]. Mit Blick auf das Darstellungziel genügt es, Optionstypen heranzuziehen, auf welche die zuvor beschriebenen, im Wesentlichen dem Schrifttum entlehnten Ergebnisse zur Ermittlung von Arbitragegrenzen angewendet werden können. Insofern wird für den Fall eines unvollständigen

[470] Mit Blick auf die Analogie zu Realoptionen sind dividendengeschützte Finanzoptionen hier nicht von Belang.

[471] Vgl. *Dixit/Pindyck* (1994), S. 149. In diesem Fall wäre der Optionswert gleich dem aktuellen Wert des Underlyings, vorausgesetzt der Barwert der Auszahlung würde durch die Diskontierung gegen null streben; vgl. zum Nachweis *Karatzas/Shreve* (1998), S. 62.

Kapitalmarktes die Warteoption als nicht dividendengeschützte, amerikanische Kaufoption mit endlicher Laufzeit modelliert. Als (bedingte) Referenz auf dem vollständigen Kapitalmarkt dient der Wert einer nicht dividendengeschützten amerikanischen Kaufoption mit unendlicher Laufzeit, da hierfür nach *Abschnitt 2.2.4* eine geschlossene Lösung vorliegt.

Zugrunde liegt die durch das Auszahlungsprofil (3.120) beschriebene Warteoption. Zudem wird hinsichtlich der Dividendenraten, wie bereits in *Abschnitt 2.2.4* von $\delta_I \equiv 0$ ausgegangen. Es werden nun die Fälle eines deterministischen und eines stochastischen Vorleistungswertprozesses separat behandelt.

1. Fall: Warteoption mit deterministischem Vorleistungswertprozess[472]; $\bar{\sigma}_I \equiv 0, \delta_I \equiv 0$

Der optierte Prozess kann für $t \geq 0$ dargestellt werden als:

$$\begin{aligned} B(t) &= \vartheta(V(t), I(t)) = \max\left[V(t) - I(t), 0\right] \\ &= e^{b_I t} \max\left[\tilde{V}(t) - I_0, 0\right] =: e^{b_I t} \tilde{\vartheta}(\tilde{V}(t)), \end{aligned} \tag{3.123}$$

wobei $\tilde{V}(t) = V(t)e^{-b_I t}$ $(t \in [0, T])$ aus den Definitionsgleichungen (2.106) entnommen ist. Mit den dargestellten Gleichheitsbeziehungen des Anspruches $B(.)$ seien zugleich die Funktionen $\vartheta(.,.)$ und $\tilde{\vartheta}(.)$ definiert. $\tilde{\vartheta}^V(.)$ und $\tilde{\vartheta}^K(.)$ sollen sich aus $\tilde{\vartheta}(.)$ analog den Funktionen $\vartheta^V(.)$ bzw. $\vartheta^K(.)$ aus der Funktion $\vartheta(.)$, wie in *Abschnitt 3.3.3.1.1* dargestellt, ergeben.

Verkäuferpreis:

Der Verkäuferpreis, und somit die Preisobergrenze, ist nach Satz gegeben durch:

$$\begin{aligned} h_{up}^A(K_+) &= \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E_0\left[e^{-r\tau} \vartheta^V(V(\tau), I(\tau))\right] = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E_0\left[e^{-(r-b_I)\tau} \tilde{\vartheta}^V(\tilde{V}(\tau))\right] \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E_0\left[e^{-(r-b_I)\tau} \sup_{\nu \in \tilde{K}}\left[e^{-\zeta(\nu)} \tilde{\vartheta}(\tilde{V}(\tau)e^{-\nu})\right]\right]. \end{aligned} \tag{3.124}$$

Leerverkaufsverbot:

Betrachtet man den Fall, dass ein Leerverkauf von $V(.)$ nicht möglich ist, so gilt zunächst $\tilde{K} = \mathbb{R}_+$ und $\zeta(\nu) \equiv 0$; damit ist $(\tau \in \mathcal{S}$ bel.):

$$\hat{\nu} := \arg\max_{\nu \in \tilde{K}}\left[e^{-\zeta(\nu)} \tilde{\vartheta}(\tilde{V}(\tau)e^{-\nu})\right] = \arg\max_{\nu \in \tilde{K}} \max\left[\tilde{V}(\tau)e^{-\nu} - I_0, 0\right] = 0$$

und es ergibt sich mit $\nu = \hat{\nu}$ ein Verkäuferpreis von:

$$h_{up}^A(K_+) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E_0\left[e^{-(r-b_I)\tau} \max\left[\tilde{V}(\tau) - I_0, 0\right]\right].$$

Dies entspricht dem Preis der amerikanischen Kaufoption auf dem unrestringierten Kapitalmarkt. Die Leerverkaufsrestriktion wirkt sich hier nicht aus, da

[472] Die nachfolgend aufgeführten Fallgestaltungen für unvollständige Kapitalmärkte sind in *Karatzas/Kou* (1998), S. 234 ff., mit $b_I = 0$ und in Bezug auf Kaufoptionen mit endlicher Laufzeit mit $\delta_V = 0$ zu finden.

das den Verkauf hedgende Portfolio eine Long-Position in $V(.)$ impliziert[473]. Als Referenzausdruck kann der Wert $h^{AC}(V_0)$ einer amerikanischen Kaufoption bei unendlicher Laufzeit herangezogen werden, wie er in *Abschnitt 2.2.4* angegeben ist.

Unvollständiger Kapitalmarkt i.e.S.:

Falls ein Handel in $V(.)$ nicht möglich ist, sind $\tilde{K} = \mathbb{R}$ sowie $\zeta(\nu) \equiv 0$. Daraus folgt:

$$\hat{\nu} := \arg\max_{\nu \in \tilde{K}} \left[e^{-\zeta(\nu)} \tilde{\vartheta}(\tilde{V}(\tau) e^{-\nu}) \right] = \arg\max_{\nu \in \tilde{K}} \max \left[\tilde{V}(\tau) e^{-\nu} - I_0, 0 \right] = -\infty.$$

Der Verkäuferpreis ist somit unbeschränkt $h_{up}(K_+) = \infty$[474]. Da ein Handel im Underlying nicht möglich ist und der Veräußerer der Kaufoption somit die zugrunde liegende Aktie bzw. den optierten Ertragswert des Outputs nicht erwerben kann, würde er im Falle eines Kursanstieges die Steigerung des Optionswertes nicht durch Kapitalmarkttransaktionen replizieren können. Bei unbegrenztem Gewinnpotential der Aktie, resp. Output-Ertragswert ist er folglich nicht bereit, die Option zu verkaufen, sofern er nicht Gefahr laufen möchte, bei bestimmten Umweltentwicklungen in Bezug auf den Aktienkurs durch Veräußerung der Option ungünstiger dazustehen als durch deren Halten.

Käuferpreis:

Zur Bestimmung des Käuferpreises, mithin der Preisuntergrenze, ist Satz wenig hilfreich. Denn für die rechte Seite der Gl. (3.102), wobei hier $\tilde{\vartheta}(.)$ an die Stelle von $\vartheta(.)$ tritt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} u(V_0) &:= \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E_0 \left[e^{-(r-b_I)\tau} \tilde{\vartheta}^K(\tilde{V}(\tau)) \right] \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E_0 \left[e^{-(r-b_I)\tau} \inf_{\nu \in \tilde{K}} \left[e^{-\zeta(\nu)} \tilde{\vartheta}(\tilde{V}(\tau) e^{-\nu}) \right] \right], \end{aligned}$$

so dass für einen Markt mit einer Leerverkaufsrestriktion und einen unvollständigen Kapitalmarkt i.e.S., für welche jeweils $\zeta(\nu) = 0$ gilt und ν wegen $\tilde{K} = \mathbb{R}_+$ bzw. $\tilde{K} = \mathbb{R}$ nicht durch eine reelle Zahl nach oben beschränkt ist, $u(V_0) = 0$ folgt. Die Untergrenze kann mit Hilfe dieses Satzes somit nicht eingegrenzt werden. Demgegenüber kann sie in beiden betrachteten Fällen eines unvollständigen Kapitalmarktes mit Anmerkung zu Satz 3.8 bestimmt werden, wobei auf die Ergänzung um einen nicht-verschwindenden Dividendenprozess abzustellen ist.

[473] Vgl. *Karatzas/Kou* (1998), S. 236, 241, die den duplizierenden Portfolio-Prozess auf dem vollständigen Kapitalmarkt aufführen.

[474] Nach *Karatzas/Kou* (1998), S. 232 (Remark 5.15), gilt zumindest für amerikanische Kaufoptionen mit endlicher Laufzeit (und ohne Dividende aus dem Underlying) $\hat{u}^A < \infty \Leftrightarrow \zeta(\nu) + \nu$ ist auf $\tilde{K}$ nach unten beschränkt; hierbei kennzeichnet ν den Schattenpreisskalar zur Aktie, auf die die Kaufoption lautet.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Leerverkaufsverbot:

Für ein Leerverkaufsverbot sind $\zeta(\nu) = 0$ und $\tilde{K} = \mathbb{R}_+$, so dass der Term $\zeta(\nu) + \nu \geq 0$ und nach oben nicht durch eine reelle Zahl beschränkt ist. Damit gilt nach dem ersten Teil der Anmerkung unmittelbar:

$$h_{low}^A(K_- = \mathbb{R}_-) = B(0) = \max\left[V_0 - I_0, 0\right].$$

Unvollständiger Kapitalmarkt i.e.S.:

Aus dem zweiten Teil dieser Anmerkung folgt für einen unvollständigen Kapitalmarkt i.e.S. dieselbe Preisuntergrenze:

$$h_{low}^A(K_- = \{0\}) = B(0) = \max\left[V_0 - I_0, 0\right].$$

In beiden Fällen ergibt sich die Preisuntergrenze somit aus dem Wert bei sofortiger Ausübung. Da der Ermittlung des Käuferpreises eine — in gewissem Sinne — pessimistische Wertentwicklung zugrunde zu legen ist, berücksichtigt der so spezifizierte Käufer, dass das optierte Objekt an Wert verliert bzw. sogar wertlos wird. Damit könnte auch eine (nicht-verschwindende) Verschuldung, die für den Erwerb des Anspruches eingegangen wird und aufgrund der Marktrestriktion nicht in einer Short-Position im Underlying bestehen kann, nicht mit Sicherheit bedient werden.

2. Fall: Warteoption mit stochastischem Vorleistungswertprozess

Unter Zugrundelegung der Prozessdefinitionen nach den Gl. (3.121) und (3.122) werde nunmehr in allgemeinerer Form die amerikanische indizierte Kaufoption betrachtet, welche im Intervall $[0, T]$ ausübbar ist und eine Auszahlung bei Ausübung in Höhe von $B(t) = \max\left[V(t) - I(t), 0\right]$ gemäß Gl. (3.120) mit sich bringt. Zudem ist von einem zweidimensionalen Schattenpreis-[prozess-]vektor $\nu[(.)] := (\nu_1[(.)], \nu_2[(.)])$ auszugehen.

Verkäuferpreis:

Für den Preis eines Verkäufers gilt nach Satz (Gl. (3.101)) Folgendes:

$$\begin{aligned} h_{up}^A(K_+) &= \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E_0\left[e^{-r\tau}\vartheta^V(V(\tau), I(\tau))\right] \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E_0\left[e^{-r\tau} \sup_{\nu \in \tilde{K}}\left[e^{-\zeta(\nu)}\vartheta(V(\tau)e^{-\nu_1}, I(\tau)e^{-\nu_2})\right]\right]. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Bei einem *Leerverkaufsverbot* bezüglich $I(.)$ sind unabhängig davon, ob ein solches auch für $V(.)$ gilt oder diesbezüglich ein vollständiger Markt vorausgesetzt werden kann, $\nu_2 \in \mathbb{R}_+$ und $\zeta(\nu) \equiv 0$. Mit $\nu_1 \in \mathbb{R}_+$ oder $\nu_1 = 0$ ist dann in beiden Fällen bezüglich $I(.)$:

$$\begin{aligned} \hat{\nu} &:= \arg\max_{\nu \in \tilde{K}}\left[e^{-\zeta(\nu)}\vartheta(V(\tau)e^{-\nu_1}, I(\tau)e^{-\nu_2})\right] \\ &= \arg\max_{\nu \in \tilde{K}} \max\left[V(\tau)e^{-\nu_1} - I(\tau)e^{-\nu_2}, 0\right] = (0, \infty)'. \end{aligned}$$

Der Verkäuferpreis lautet damit:

$$h_{up}^A(K_+) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E_0\left[\max\left[V(\tau), 0\right]\right].$$

Dies entspricht dem Preis einer amerikanischen Kaufoption mit einem Basispreis von null auf einem vollständigen Kapitalmarkt. Möchte folglich der Verkäufer dieser Kaufoption in der Lage sein, sich durch geeignete Portfolio-Bildung mit dem Veräußerungserlös zu hedgen, muss er den vollen Preis des Underlyings verlangen. Dies ergibt sich daraus, dass zur Duplikation der Wertentwicklung der Option auf einem vollständigen Markt eine Short-Position im Prozess $I(.)$ einzugehen ist, welche jedoch aufgrund des Leerverkaufsverbotes im zugrunde liegenden unvollständigen Markt ausgeschlossen ist[475]. Da die für die Duplikation nötige Verschuldung in $I(.)$ bis auf den Wert null sinken könnte, wird bei der Bestimmung des Verkäuferpreises von dieser extremen Entwicklung ausgegangen.

Der Wert der amerikanischen Kaufoption mit Basispreis null ist für eine unendliche Laufzeit gemäß Gl. (2.108) mit $I_0 = 0$ und folglich $a = 0$ gegeben durch $h_{AC}(V(t)) = V(t)$. Da eine amerikanische Kaufoption mit endlicher Laufzeit höchstens den Wert einer sonst identischen Option mit unendlicher Laufzeit haben kann, ihr Wert ferner mindestens so hoch sein muss wie bei sofortiger Ausübung, gilt:

$$h^A_{up}(K_+) = V_0.$$

Dies entspricht z.T. zudem der Aussage von Satz 3.8 bezüglich der Preisobergrenze, da hier $\zeta(\nu) + \nu_1$ nicht negativ auf $\tilde{K}$ ist.

Käuferpreis:

Bei der Bestimmung des Käuferpreises ist wiederum unmittelbar Satz 3.8 heranzuziehen. Existiert ein *Leerverkaufsverbot* für $V(.)$ bei gleichzeitigem vollständigen Markt oder auch einem Leerverkaufsverbot bezüglich $I(.)$, ist insbesondere die Zusatz-Voraussetzung des zweiten Teiles von Satz 3.8, in Gestalt der Bedingung (3.105), erfüllt. Es gilt nämlich: $\zeta(\nu) = 0, \nu_1 \in \mathbb{R}_+$, so dass $\zeta(\nu) + \nu_1$ nicht durch eine reelle Zahl nach oben beschränkt ist. Ferner existiert zu jedem ν_1 stets ein ν_2 mit $(\nu_1, \nu_2) \in \tilde{K}$, nämlich in Gestalt von $\nu_2 = 0$, so dass $\zeta(\nu) + \nu_2 \leq 0$. Die Preisuntergrenze ist damit unmittelbar durch den Wert bei sofortiger Ausübung gegeben als:

$$h^A_{low} = \max\left[V_0 - I_0, 0\right].$$

Für einen in Bezug auf $V(.)$ *unvollständigen Kapitalmarkt i.e.S.* kann mit Satz 3.8 dieselbe Preisuntergrenze abgeleitet werden, falls für $I(.)$ ebenfalls eine solche Marktrestriktion besteht. Dies gilt auch, wenn in Bezug auf $I(.)$ stattdessen von einem vollständigen Kapitalmarkt (oder einem Leerverkaufsverbot) auszugehen ist. Formal betrachtet, ist in jeder solchen Konstellation $\zeta(.) = 0$ für $\nu_1 \in \mathbb{R}$ und es kann $\nu_2 = 0$ gewählt werden, um Bedingung (3.105) zu erfüllen.

Die Ermittlung von Preisgrenzen auf unvollständigen Märkten zeigt folglich in der Weise, wie Marktrestriktionen bisher betrachtet werden, dass entweder ein Wert wie auf einem vollständigen Kapitalmarkt entsteht, nämlich dann,

[475] Vgl. zu den für die Duplikation einer europäischen indizierten Kaufoption einzunehmenden Positionen s.u., S. 247 mit dem Hinweis in Fn. 481.

wenn die Restriktion die Duplikation nicht beeinträchtigt, oder sich aber extreme Werte bilden, die letztlich eine Beurteilung der betrachteten Optionen auf Basis des Arbitrageargumentes als bedeutungslos erscheinen lassen. Für amerikanische Optionen ergeben sich dabei Preisuntergrenzen aus dem Wert bei sofortiger Ausübung, d.h. der Optionskomponente in Gestalt der Wahlmöglichkeit des Ausübungszeitpunktes wird kein (sicherer) Wert beigemessen. Für Preisobergrenzen ist vor allem die Handelbarkeit des Underlyings maßgebend; ferner beeinflusst die Unsicherheit im Vorleistungswertprozess den Optionswert.

Im Folgenden soll es darum gehen, vor dem Hintergrund ökonomisch relevanter Umstände für das Auftreten von Realoptionen unter Beschränkungen Preisgrenzen abzuleiten, denen eine diesbezügliche Aussagekraft zukommt. Es wird hierbei auf eine als europäische Kaufoption zu interpretierende Realoption abgestellt.

3.3.4.3 Wertgrenzen für eine in der Zukunft zeitpunktbezogen realisierbare Investition

Es soll eine Investitionsmöglichkeit betrachtet werden, die sich aus Sicht des Bewertungszeitpunktes $t = 0$ in der Zukunft bietet, dabei jedoch hinsichtlich ihrer Realisierbarkeit auf einen bestimmten Zeitpunkt beschränkt ist. Sie wird durch eine europäische indizierte Kaufoption auf den Wert des bedingten Anspruches $B(T)$ nach Gl. (3.120) im Zeitpunkt T repräsentiert. Dabei spiegelt sich in der Realoption eine Technologie wider, welche das betrachtete Unternehmen exklusiv innehat. Nur das Unternehmen ist imstande, aus dem Wert $I(T)$ der Vorleistungen im Verfallszeitpunkt der Option einen Output mit Wert $V(T)$ zu generieren[476]. Die Technologie kann im Ausübungszeitpunkt auch wertlos sein, sei es durch einen Anstieg des Preises der Vorleistungen oder einen Wertverfall des Outputs — oder zumindest durch Wertentwicklungen, an deren Ende dieser Zustand steht. Unter solchen Umständen wird die betrachtete Unternehmung auf eine Produktion des Outputs verzichten, so dass die Transformation wahlweise erfolgt und in der Tat eine Option ist. Vereinfachend sollen Erwerb bzw. Aufrechterhaltung der Option keine finanziellen Aufwendungen erfordern. Diesbezüglich zu treffende Vorentscheidungen, insbesondere über die Bereitstellung von Produktionsanlagen, gelten somit als zu Gunsten des Optionserwerbs erfolgt. Der Wert der Vorleistungen kommt in diesem Fall einem variablen Einsatz von Produktionsfaktoren gleich. Ggf. wird dann auch von einem Deckungsbeitrag bezüglich der Differenz zwischen Output- und Vorleistungswert gesprochen. Die Spezifität der Technologie für das betrachtete Unternehmen bedeutet natürlich nicht, dass $V(.)$ nicht auch

[476] Die hier betrachtete Realoption kann in diesem Sinne als Wechseloption europäischen Typs gesehen werden; vgl. hierzu S. 131 sowie die Anmerkung in Fn. 267, S. 133.

von Konkurrenzunternehmen am Markt angeboten wird, sie besteht allerdings in der Kombination von Output-Wert und der Kostenseite, welche sich im Wert der einzukaufenden Vorleistungen/Produktionsfaktoren wiederfindet. Da der Wertprozess sowohl des Outputs als auch der Vorleistungen als von der betrachteten Unternehmung nicht beeinflussbar modelliert wird, ist die Unternehmung diesbezüglich weiterhin als Preisnehmer zu betrachten[477]; bei einer unterstellten Handelbarkeit des jeweils betrachteten Objektes ist also gerade auch von der Existenz von Mitbewerbern auszugehen. Insbesondere soll je nach betrachteter Restriktion auch die Möglichkeit bestehen, dass der eigene Output am Markt eingekauft, also eine entsprechende Long-Position eingegangen werden kann, welche dynamisch veränderbar ist.

Die Modellierung einer Realoption als *europäische (indizierte) Kaufoption*, wie hier angegeben, ist nicht unproblematisch, da die Anwendungsfälle der gewählten Modellierung gegenüber „üblichen“ Realoptionsansätzen durch die nur punktuell mögliche Ausübung stark eingeschränkt sind. Realoptionen beinhalten zumeist ein zeitliches Auswahl- bzw. Ausübungselement, d.h. die zugrunde liegende Investitionsentscheidung umfasst auch die Wahl des Zeitpunktes für bestimmte Handlungen. Unter den möglichen Zwecken einer Identifikation und Bewertung von Realoptionen liefert die vorliegende Erörterung somit keinen Beitrag für diejenigen Anwendungen, in denen eine optimale Ausübungspolitik und der sich insbesondere daraus ableitende Optionswert gesucht sind. Sie trägt jedoch bei zur Bestimmung eines Unternehmenswertes, zu dessen Wertbestandteilen auch noch nicht realisierte Investitionsmöglichkeiten für gegebene zukünftige Zeitpunkte gehören. Gründe für erst in der Zukunft realisierbare Investitionsmöglichkeiten können sich aus auferlegten Wartefristen ergeben. Diesbezüglich ist an behördliche Genehmigungsverfahren, (Rest-)Laufzeiten von Patenten weiterer Mitbewerber, saisonale Restriktionen, bspw. die jahreszeitlich verschiedene Verfügbarkeit natürlicher Vorprodukte oder Absetzbarkeit eigener Produkte, und anderes mehr zu denken[478]. Im Rahmen einer Unternehmensbewertung sind somit auch derartige zukünftig realisierbare Wertbeiträge in geeigneter Weise einzubeziehen. Eine Option als einseitig vorteilhafter Anspruch liegt dabei allerdings nur dann vor, wenn a priori kein (faktischer) Zwang zur Realisierung der Investition besteht. Ferner sollen durch den Grund für die Wartefrist keine (ins Gewicht fallenden) Zahlungen entstehen, wie bspw. signifikante Aufwendungen für eine Genehmigung. Neben dem eher beigeordneten Zweck einer Wertbestimmung spezifischer Realoptionen zielt die nachfolgende Untersuchung primär darauf

[477] Dies schließt jedoch nicht gänzlich die Beeinflussung bspw. des Vorleistungswertes durch das Unternehmen selbst aus. Da letztlich der unternehmensindividuelle Wert der Vorleistungen relevant ist, der allerdings von externen Umweltentwicklungen wesentlich bestimmt wird, könnten sich Anstrengungen zur Kostenreduktion in einer entsprechend geringen Drift des Vorleistungswertprozesses widerspiegeln.

[478] Eine Realoption europäischen Typs wird in *Bjerksund/Ekern* (1990), S. 71, behandelt, wo auf die Möglichkeit einer Terminierung durch auslaufende Patente oder staatliche Eingriffe hingewiesen wird.

ab, Markt-(Unvollständigkeits-)Konstellationen und deren Konsequenzen für die Preisgrenzen zu untersuchen, für welche eingangs des *Abschnittes 3.3.4* bereits der Begriff des differenziert unvollständigen Marktes verwendet wurde; dieser ist wie folgt zu definieren:

Ein *differenziert unvollständiger (Kapital-)Markt* ist dadurch gekennzeichnet, dass eine Beschränkung der Handelbarkeit eines Handelsobjektes *marktteilnehmerspezifisch* ist und somit nicht für alle Marktteilnehmer (in gleicher Weise) gilt.

Die angesprochenen Konsequenzen sollen auf einem dergestalt verallgemeinerten Markt am bedingten Anspruch $B(T)$ untersucht werden, welcher sich — wie bereits angekündigt — auf die Differenz eines durch das Unternehmen realisierbaren, stochastischen Wertes $V(T)$ und den dafür aufzuwendenden Vorleistungen $I(T)$, welche ebenfalls einen stochastischen Wertverlauf aufweisen (können), bezieht. In Bezug auf die Vorleistungen ist dann bspw. der Fall denkbar, dass sich zwar das betrachtete Unternehmen einer Leerverkaufsrestriktion oder gar einer Nicht-Handelbarkeit des Vorproduktes[479] gegenübersieht, diese Beschränkungen aber für den Zulieferer nicht gelten, da er durch die Annahme eines Auftrages zur Lieferung des Vorproduktes für den Zeitpunkt T in dieser Komponente short-gehen kann; eine Möglichkeit, die für das betrachtete Unternehmen, welches kein Produzent der Vorleistungen ist, oft nicht bestehen wird[480]. Die Marktbeschränkung bezüglich der Vorleistungen besteht also nicht einheitlich für alle Marktteilnehmer. Daraus erhebt sich die Frage, ob Vertragsbeziehungen in Gestalt von Termingeschäften zwischen dem Unternehmen, das die Realoption besitzt, und seinem Zulieferer Einfluss auf den Wert(ebereich) der Realoption nehmen können. Durch Termingeschäfte könnte ggf. die ungleiche Unvollständigkeit zwischen den Marktakteuren in Form einer Steigerung des Mindest-Optionswertes (Käuferpreis) ausgenutzt werden. Dabei ist zu betonen, dass es weiterhin um die Eingrenzung *arbitragefreier* Preisintervalle geht, die schlichte Übertragung von Risiken, welche an sich bestehen bleiben oder nur durch Wechselwirkung mit anderen agglomerierten Risiken reduziert werden, also eine entsprechende Form der Finanzintermediation, ist nicht Gegenstand der hier angestellten Überlegungen. In diesem Kontext kann noch grundsätzlicher danach gefragt werden, ob sich — in Abhängigkeit der Produktionsverhältnisse des Zulieferers — durch Terminkontrakte zwischen diesem und dem industriellen Abnehmer positive Realoptionswerte erzeugen bzw. erhöhen lassen, und dies sogar in einem allgemeinen Rahmen, der auch vollständige Kapitalmärkte mit einbezieht.

[479] Die Begriffe „Input", „Vorleistungen" und „Vorprodukt" werden hier synonym gebraucht.

[480] Ggf. könnten jedoch auch Terminmärkte existieren, die das Eingehen einer durch Produktionskapazitäten nicht gedeckten Short-Position erlauben.

Die folgende Erörterung richtet sich auf die Preisgrenzen aus Verkäufer- bzw. Käufersicht und somit auf sich für verschiedene Restriktionen ergebende Intervalle arbitragefreier Preise der betrachteten indizierten Kaufoption. Diese Preisgrenzen sind für deterministische Koeffizienten, welche hier unterstellt werden, durch Satz beschrieben. Untersucht werden ausschließlich die Restriktionentypen Leerverkaufsverbot und Unvollständigkeit i.e.S., wobei die Vollständigkeit des Marktes in Bezug auf einzelne Komponenten ebenfalls in Betracht gezogen wird. Daraus folgt, dass im Weiteren stets $\zeta(\nu) \equiv 0$ vorausgesetzt werden kann. Für eine europäische indizierte Kaufoption auf $B(T) = \max[V(T) - I(T), 0]$ ergeben sich dann Verkäufer- bzw. Käuferpreis allgemein aus:

$$h^E_{up}(K_+) = E_0\left[e^{-rT} \sup_{\nu \in \tilde{K}} \max\left[V(T)e^{-\nu_1} - I(T)e^{-\nu_2}, 0\right]\right], \tag{3.126}$$

$$h^E_{low}(K_-) = E_0\left[e^{-rT} \inf_{\nu \in \tilde{K}} \max\left[V(T)e^{-\nu_1} - I(T)e^{-\nu_2}, 0\right]\right]. \tag{3.127}$$

Dabei gilt für die angesprochenen Marktrestriktionen stets $\tilde{K}_- = \tilde{K}_+ =: \tilde{K}$. Der Output- und der Vorleistungswertprozess sind durch die Gl. (2.109) und (2.110) mit den Anfangsbedingungen $V(0) = V_0$ und $I(0) = I_0$ beschrieben. Opportunitätskosten o.Ä., welche sich nicht in der Wertentwicklung des Underlyings niederschlagen, werden durch eine konstante, reelle Dividendenrate δ_V abgebildet. Für die Vorleistungen sollen ebenfalls laufende Zu- oder Abflüsse möglich sein, welche durch die reelle Dividendenrate δ_I dargestellt werden.

Bemerkung zur Notation: Anstelle von $\max[V(T) - I(T), 0]$ wird auch $(V(T) - I(T))^+$ geschrieben.

Vor dem Hintergrund des Untersuchungszieles werden nun zu verschiedenen Kombinationen von Marktbeschränkungen (zzgl. eines vollständigen Marktes) für die beiden Marktteilnehmer „(betrachtete) Unternehmung" und „(deren) Zulieferer" die Preisgrenzen ermittelt. Ein Schwerpunkt liegt in der Herleitung von Käuferpreisen und deren Erhöhung durch Vertragsgestaltungen zwischen Unternehmung und Zulieferer. Darüber hinausgehende Kontraktmöglichkeiten, bspw. mit den Kunden der Unternehmung, werden nicht betrachtet. Es wird ausschließlich auf die Restriktionstypen Leerverkaufsverbot und unvollständiger Markt i.e.S. rekurriert. Dabei werden in Bezug auf eine einzelne Wertkomponente von $B(T)$ ein unvollständiger Markt i.e.S. durch M^{unv}, ein Leerverkaufsverbot durch M^{Lv} und ein vollständiger Markt durch M^{vst} symbolisiert. $\hat{\nu}^a = (\hat{\nu}^a_1, \hat{\nu}^a_2)'$ $(a = up, low)$ steht für den extremierenden Schattenpreisvektor für die Preisober- bzw. -untergrenze, wobei $\hat{\nu}_i = \pm\infty$ $(i = 1, 2)$ gesetzt wird, falls für die Extremierung $\hat{\nu}_i \to \pm\infty$ zu wählen ist.

Für die folgende Argumentation ist es darüber hinaus hilfreich, sich die Positionen zu vergegenwärtigen, welche auf einem vollständigen Kapitalmarkt zur Duplikation der europäischen indizierten Kaufoption auf $B(T) =$

$\max[V(T) - I(T), 0]$ einzunehmen sind. Zur Identifikation von Long- bzw. Short-Positionen genügt es hierbei, auf den Handelsprozess abzustellen. Der die Option duplizierende Handelsprozess ist dann für $t \in [0, T]$ gegeben durch[481]:

$$\begin{aligned} \varphi_V(t) &= e^{-\delta_V(T-t)}\Phi(\bar{d}_1) > 0, \\ \varphi_I(t) &= e^{-\delta_I(T-t)}\Phi(\bar{d}_2) < 0, \\ \varphi_0(t) &= h^E_{Call}(V; I_h; t) - \varphi_V(t)V(t) - \varphi_I(t)I(t); \end{aligned}$$

hierbei stehen $h^E_{Call}(V; I_h; t)$ für den Wert der indizierten europäischen Kaufoption im Zeitpunkt t sowie $\Phi(.)$ für die Verteilungsfunktion zur Standardnormalverteilung und es gilt:

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 &= \frac{1}{\sigma_d\sqrt{T}}\left[\ln\frac{V_0}{I_0} + \left(\delta_I - \delta_V + \frac{1}{2}\sigma_d^2\right)T\right]; \\ \bar{d}_2 &= d_1 - \sigma_d\sqrt{T};\ \sigma_d = \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{21})^2 + \sigma_{22}^2}. \end{aligned}$$

Zur Duplikation des Auszahlungsprofiles einer indizierten europäischen Kaufoption ist folglich stets eine Long-Position im Underlying ($V(.)$) und eine Short-Position im Basispreisprozess $I(.)$ zu halten. Dies entspricht den Positionen, welche ein Verkäufer des Anspruches einzunehmen hat, um den Verkauf zu hedgen.

1. Fall: Unvollständiger Markt i.e.S. oder Leerverkaufsverbot bzgl. $V(.)$; keine Spezifikation bzgl. $I(.)$

Ein unvollständiger Markt i.e.S. bezüglich $V(.)$ kann bspw. dann gegeben sein, wenn dem Wertprozess ein neues Produkt zugrunde liegt, welches vom betrachteten Unternehmen in $t = T$ eingeführt werden soll. Ausgehend von einem fiktiven Gegenwartswert des Erlöses aus der Produkteinführung (V_0), hat die Unternehmung mögliche Veränderungen der Absatzmöglichkeiten zu berücksichtigen. Dem wird durch eine stochastische Wertentwicklung gemäß der Prozessgleichung (2.109) Rechnung getragen. Ein Leerverkaufsverbot kann dadurch existieren, dass die betrachtete Unternehmung in einen bereits bestehenden Markt eintreten möchte. Sie kann dann von „etablierten" Unternehmen das Underlying erwerben, ihm wird jedoch selbst noch nicht die Möglichkeit zur (ungedeckten) Lieferverpflichtung zugebilligt.

In dem hier betrachteten Fall ergeben sich wiederum triviale Preisgrenzen. Diese können mit Hilfe der Gl. (3.126) und (3.127) in einfacher Weise hergeleitet werden, so dass lediglich die Ergebnisse in Tabelle 3.1 zusammengefasst[482] werden; sie sind wie folgt zu interpretieren:

Um den *Verkauf einer Kaufoption* zu hedgen, muss eine Long-Position im Underlying am Markt erworben werden[483]. Auf einem bezüglich $V(.)$ unvoll-

[481] Vgl. *Knobloch* (2003), S. 166 f.; die Zuordnung der gehaltenen Stücke zu den Handelsobjekten erfolgt durch eine Indizierung mit der Prozessvariablen, wobei die vom risikolosen Bond im Zeitablauf zu haltende Stückzahl durch $\varphi_0(.)$ gegeben ist. Vgl. zudem bereits zur amerikanischen indizierten Kaufoption *Abschnitt 2.2.4*, insbesondere S. 136 f.

[482] Vgl. hierzu auch *Knobloch* (2003), S. 172, auf einem Markt mit verschwindenden Dividendenprozessen.

[483] Vgl. S. 247, insbesondere Fn. 481.

Tabelle 3.1

Preisgrenzen bei unvollständigem Markt i.e.S. oder Leerverkaufsverbot bezüglich des Underlyings

Restr. bzgl.			Obergrenze		Untergrenze	
$V(.)$	$I(.)$	$\tilde{K}$	h_{up}^E	$(\hat{\nu}_1^{up}, \hat{\nu}_2^{up})$	h_{low}^E	$(\hat{\nu}_1^{low}, \hat{\nu}_2^{low})$
M^{unv}	M^{unv}	$\mathbb{R}^2$	∞	$(-\infty, \infty)$	0	$(\infty, -\infty)$
M^{unv}	M^{Lv}	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$	∞	$(-\infty, \infty)$	0	$(\infty, 0)$
M^{unv}	M^{vst}	$\mathbb{R} \times \{0\}$	∞	$(-\infty, 0)$	0	$(\infty, 0)$
M^{Lv}	M^{unv}	$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$	$E_0\left[e^{-rT}V(T)\right] = V_0 e^{-\delta_V T}$	$(0, \infty)$	0	$(\infty, -\infty)$
M^{Lv}	M^{Lv}	$\mathbb{R}_+^2$	$E_0\left[e^{-rT}V(T)\right] = V_0 e^{-\delta_V T}$	$(0, \infty)$	0	$(\infty, 0)$
M^{Lv}	M^{vst}	$\mathbb{R}_+ \times \{0\}$	$E_0\left[e^{-rT}\left(V(T) - I(T)\right)^+\right]$	$(0, 0)$	0	$(\infty, 0)$

ständigen Markt i.e.S. ist dies nicht möglich. Da das Underlying ein nach oben unbegrenztes Gewinnpotential besitzt, ergibt sich folglich ein Verkäuferpreis von unendlich. Ein Verkäufer, der sichergehen möchte, keinen Verlust aus dem Verkauf zu erleiden, wird die Option somit nicht veräußern. Dies gilt unabhängig davon, welche Marktgestalt in Bezug auf den Vorleistungswertprozess vorliegt. Ein Leerverkaufsverbot bezüglich $V(.)$ steht einem solchen Hedge nicht entgegen. Unter einer solchen Restriktion ist der Verkäufer bereit, die Option grundsätzlich zu verkaufen. Mit dem Erlös muss er eine Long-Position im Underlying aufbauen können. Da er im Fälligkeitszeitpunkt den Wert $I(T)$ aufzubringen hätte, falls er die Option behielte, kann zur Finanzierung in $t = 0$ der Wert einer Verschuldung herangezogen werden, die sich dynamisch dergestalt strukturieren lässt, dass sie in $t = T$ den geforderten Wert aufweist. Auf einem bezüglich $I(.)$ vollständigen Kapitalmarkt ist eine solche Verschuldung ohne weiteres möglich, nämlich durch einen Leerverkauf des Vorleistungswertes, so dass der Verkäuferpreis insgesamt dem Optionswert auf einem vollständigen Markt entspricht. Ist hingegen ein Leerverkauf bzw. generell ein Handel in den Vorleistungen nicht möglich, so ist bei der Ermittlung des Verkäuferpreises davon auszugehen, dass der Wert der Vorleistungen im Fälligkeitszeitpunkt gegen null gehen kann und somit in $t = 0$ kein Finanzierungsbeitrag entsteht. Der Verkäufer wird den Betrag verlangen, der zum vollständigen Erwerb des Underlyings in der Gegenwart nötig ist.

Im Unterschied zur amerikanischen indizierten Kaufoption ist bei der europäischen eine sofortige Ausübung der Option und damit die Realisierung ihres inneren Wertes in $t = 0$ nicht möglich, so dass bei der Bestimmung des *Käuferpreises* von einem (völligen) Wertverlust des Underlyings, gegen den sich der Käufer nur durch dessen Leerverkauf schützen könnte, ausgegangen wird. Dies allein bedingt bereits auf einem durch Unvollständigkeit i.e.S. bzw. ein Leerverkaufsverbot, jeweils bezogen auf $V(.)$, gekennzeichneten Markt, dass die Preisuntergrenze auf null sinkt. Darüber hinaus besteht die

Möglichkeit, dass sich die Vorleistungen verteuern, wogegen sich der Käufer der Option auf einem diesbezüglich unvollständigen Kapitalmarkt i.e.S. nicht hedgen könnte. Hierfür müsste eine Long-Position in $I(.)$ eingegangen, also eine entsprechende Bevorratung vorgenommen werden. Ein Leerverkaufsverbot bezüglich der Vorleistungen beeinträchtigt den Optionswert insofern nicht.

2. Fall: Vollständiger Markt bzgl. $V(.)$

Ausgangspunkt für die folgenden Fälle ist, dass die betrachtete Unternehmung beliebige Long-Positionen in dem von ihm erzeugten Underlying am Markt realisieren kann; zudem ist sie in der Lage, beliebige Lieferverpflichtungen, also Short-Positionen, einzugehen, die dynamisch erweiter- und ggf. durch Zukäufe auch reduzierbar sind. Auf den Käufer der betrachteten Unternehmung — oder zumindest der Kaufoption — übertragen sich diese Möglichkeiten. Für den Verkäufer der Option sollen diese Marktgegebenheiten auch „außerhalb der Unternehmung“ gelten. Allerdings erscheint hinsichtlich der Möglichkeit des Leerverkaufes eine entsprechende Interpretation als idealisierend. Die Ermittlung des Verkäuferpreises wird insofern auch der Vollständigkeit halber wiedergegeben, während diesbezüglich realitätsnähere Gestaltungen in *Fall 1* enthalten sein dürften. Der Schwerpunkt der Betrachtung liegt jedoch auf der Bestimmung des Käuferpreises, so dass dieser Umstand nicht weiter stört.

2.1 Fall: Unvollständiger Markt i.e.S. bzgl. $I(.)$

Die Unternehmung sieht sich in diesem Fall der Situation gegenüber, dass sie zwar bezüglich ihres eigenes Produktes keinen Marktrestriktionen unterliegt, im Vorprodukt aber weder eine Lieferverpflichtung, d.h. eine Short-Position, eingehen noch das Vorprodukt vor $t = T$ einkaufen und dadurch das Preisrisiko hinsichtlich der Vorleistungen reduzieren kann. Diesbezüglich ist der Fall denkbar, dass die Vorleistung speziell auf die Unternehmensbedürfnisse, d.h. den unternehmensspezifischen Transformationsprozess in den Output $V(.)$, zugeschnitten und deshalb nicht eigenständig am Markt handelbar ist. Dabei könnte es sich um Softwareinstallationen mit unternehmensspezifischen Anpassungen handeln — oder allgemein um nicht lagerfähige Vorprodukte. Es könnte damit auch eine Situation beschrieben werden, in welcher das betrachtete Unternehmen keine Lagerkapazitäten besitzt, um eine Bevorratung im Vorprodukt durchzuführen, und darüber hinaus Vertriebskanäle fehlen, um eine solche Bevorratung dynamisch anzupassen. Dies gilt näherungsweise auch dann, wenn zwar eine Bevorratung, jedoch nicht deren dynamische Anpassung möglich ist. Diese Restriktionen werden ggf. für den Zulieferer nicht bestehen. Für diesen mag die Möglichkeit zur Vorratshaltung, insbesondere auch der Aspekt der Lagerfähigkeit, vor allem in Bezug auf *seine* Vorprodukte von Bedeutung sein, während die Umsetzung in sein Endprodukt, welches dem Vorprodukt für die betrachtete Unternehmung entspricht, durch seinen Produktionsprozess in einem gewissen Rahmen gesteuert werden kann. Aber auch wenn der Zulieferer Vorräte in seinem Endprodukt aufbaut, ist bei geeigneten Marktverhältnissen anzunehmen, dass er seine Fertigprodukte im Rahmen seiner Vertriebskanäle wird veräußern können. Darüber hinaus ist er ggf. in der Lage, zukünftige Lieferverpflichtungen in diesem Produkt einzugehen. Der Zulieferer wird sich hinsichtlich seines Endproduktes dann auf einem vollständigen oder doch zumindest einem lediglich durch ein Leerverkaufsverbot gekennzeichneten Markt befinden, während sich sein Kunde diesbezüglich einem unvollständigen Markt i.e.S. gegenübersieht.

Ermittelt man nunmehr die Wertgrenzen der europäischen indizierten Kaufoption für einen bezüglich $V(.)$ vollständigen und bezüglich $I(.)$ unvollständigen Markt i.e.S. über die Gl. (3.126) und (3.127), ergibt sich:

$$\begin{aligned} h_{up}^{E}(K) &= E_0\left[e^{-rT}V(T)\right] = V_0 e^{-\delta_V T} \text{ mit } (\hat{\nu}_1^{up}, \hat{\nu}_2^{up}) = (0, \infty), \\ h_{low}^{E}(K) &= 0 \text{ mit } (\hat{\nu}_1^{low}, \hat{\nu}_2^{low}) = (0, -\infty). \end{aligned}$$

Die Chance, dass die Technologie des Unternehmens dadurch wertvoller wird, dass der Wertprozess der Vorleistungen $I(.)$ gegen null geht, bewirkt, dass der Verkäuferpreis dem Gegenwartswert des Underlyings entspricht, korrigiert um einen Faktor, welcher die Ausschüttung auf das Underlying vor Fälligkeit der Option repräsentiert. Aus Käufersicht ist jedoch zu befürchten, dass der Preis der Vorleistungen derart ansteigt, dass die in der Option ausgedrückte Technologie nichts mehr wert sein wird. Mit einem entsprechenden Hinweis könnte in Preisverhandlungen ein potentieller Käufer es ablehnen, für die zukünftige Investitionsmöglichkeit etwas zu bezahlen. Wie zuvor dargelegt, wird die Restriktion der betrachteten Unternehmung hinsichtlich der benötigten Vorleistungen u.U. nicht für deren Produzenten, also den Zulieferer, gelten. Dies soll nun unterstellt und deshalb von Folgendem ausgegangen werden:

Fallergänzung: Der Zulieferer befindet sich bezüglich des Vorproduktes $I(.)$, das sein Endprodukt darstellt, auf einem vollständigen Markt oder er kann zumindest beliebige Long-Positionen in $I(.)$ einnehmen (Leerverkaufsverbot).

Unter dieser Ergänzung wird nun die Möglichkeit untersucht, den Käuferpreis für die betrachtete Unternehmung dadurch zu erhöhen, dass sie von ihrem Zulieferer eine Option auf den Erwerb des Vorproduktes zu einem fixierten Preis I_h (Basispreis) im Zeitpunkt $t = T$ erwirbt (*optionale Preisgarantie* bzw. *Preisoption*). Die Preisoption sei dabei so ausgestaltet, dass die betrachtete Unternehmung die Preisoption auch dann verfallen lassen muss, wenn zwar $I(T) > I_h$ ist, zugleich aber ihre Technologie weder zum dann aktuellen Preis des Vorproduktes noch zum Basispreis der Preisoption einen Wert besitzt. Das heißt, dass die Option im Fall $V(T) \leq \min\left[I(T), I_h\right]$ eine Auszahlung von null hat[484]. Im Folgenden wird zunächst untersucht, welchen

[484] Dies wird angenommen, um einen Options(grenz)wert bestimmen zu können. Zugleich wird ein Mindestoptionswert für den Fall abschätzbar, dass der Inhaber der Preisoption diese auch anderweitig als im Rahmen seiner „Technologie“ verwerten kann (s. hierzu Anmerkung 3.4). Die Annahme wird zudem vertretbar, wenn man $I(.)$ als Barwert eines aus Sicht des Ausübungszeitpunktes der Realoption zukünftigen, auf dem betrachteten Markt als solcher nicht gehandelten Zahlungsstromes für Vorleistungen interpretiert.

Mindestwert (i.S. eines Käuferpreises) die Realoption des Unternehmens bei Existenz der Preisoption besitzt. Folgerichtig ist danach zu fragen, was die Unternehmung für den Erwerb dieser Option aufzuwenden hat. Hierfür ist danach die Sicht des Zulieferers einzunehmen.

(a) Wert beim betrachteten Unternehmen:
Durch die Preisoption erhält das Unternehmen die Möglichkeit, im Fälligkeitszeitpunkt ihrer Realoption wahlweise das Vorprodukt zum aktuellen Kurs $I(T)$ einzukaufen oder hierfür I_h an den Zulieferer zu bezahlen oder aber nicht zu produzieren. Mit der Preisgarantie entspricht die Investitionsmöglichkeit dann dem folgenden bedingten Anspruch:

$$\begin{aligned} & \max\left[\max\left[V(T)-I(T), V(T)-I_h\right], 0\right] \\ \sim\quad & \max\left[V(T)-I_h+\max\left[I_h-I(T), 0\right], 0\right] =: B_{PO}(T). \end{aligned} \tag{3.128}$$

Zur Notation: Das Symbol „$\sim$“ steht für die Äquivalenz von zwei Ansprüchen. Zudem kennzeichne das Symbol „$\succeq$“ (bzw. „$\preceq$“ in die Gegenrichtung) die Dominanz eines Anspruches gegenüber einem anderen. Dabei gilt Folgendes:

Definition 3.1 *Für zwei bedingte Ansprüche $B_1(t)$ und $B_2(t)$ für den Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gilt:*

- *$B_1(t)$ und $B_2(t)$ heißen äquivalent [in t] (in Zeichen $B_1(t) \sim B_2(t)$), wenn die Ansprüche fast sicher die gleichen bedingten Zahlungen versprechen.*
- *Der Anspruch $B_1(t)$ dominiert den Anspruch $B_2(t)$ ($B_1(t) \succeq B_2(t)$), wenn die Zahlung aus $B_1(t)$ in jedem Umweltzustand zum Zeitpunkt t nicht kleiner als die Zahlung aus $B_2(t)$ ist*[485]*. Entsprechend wird davon gesprochen, dass $B_2(t)$ von $B_1(t)$ dominiert wird.*

Die Einführung eines solchen Äquivalenzbegriffes erhält ihren Sinn dadurch, dass die Herleitung von Käufer- bzw. Verkäuferpreisen gemäß Satz auch für äquivalente Ansprüche zu unterschiedlichen Ergebnissen kommen kann oder zumindest manche Ansprüche leichter auszuwerten sind als andere mit identischem Auszahlungsprofil. Während bisher ein Anpruch über sein Auszahlungsprofil identifizierbar war, ist für das Weitere ein Anspruch zugleich mit einer bestimmten Darstellung des Auszahlungsprofiles verknüpft, sofern eine Differenzierung unterschiedlicher Darstellungen im jeweiligen Kontext von Bedeutung ist. Darüber hinaus können Preisober- bzw. -untergrenzen für bestimmte Ansprüche mit Hilfe von dominanten bzw. dominierten Ansprüchen abgeschätzt werden. Ferner gibt es verschiedene Schreibweisen für eine Darstellung, welche durch ein bestimmtes Bildungsgesetz bestimmt ist. Hierfür wird das übliche „=“-Zeichen verwendet (Bsp.: $(A-B)\mathbf{1}_{\{A \geq B\}} = \max[A-B, 0]$). Danach „gleiche“ Ansprüche sind folglich auch äquivalent.

[485] Dies gilt im Sinne von „fast sicher“. Der Dominanzbegriff entspricht damit (i.W.) der Zustandsdominanz; vgl. hierzu *Kruschwitz* (2002), S. 121 f., *Neus* (2001), S. 329.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Die Äquivalenz der Ausdrücke in der Beziehung (3.128) ist hierbei in einfacher Weise nachvollziehbar[486].

Die Ermittlung von Preisgrenzen für den Anspruch $B_{PO}(T)$ nach Satz führt nun mit $\tilde{K} = \{0\} \times \mathbb{R}$ auf:

$$\begin{aligned} h_{up}^{B_{PO}}(K) &= E_0\left[e^{-rT} \sup_{\nu\in\tilde{K}} \max\left[V(T)e^{-\nu_1} - I_h + \max\left[I_h - I(T)e^{-\nu_2}, 0\right], 0\right]\right] \\ &= e^{-rT}E_0\left[V(T)\right] = V_0 e^{-\delta_V T}, \end{aligned} \tag{3.129}$$

$$\begin{aligned} h_{low}^{B_{PO}}(K) &= E_0\left[e^{-rT} \inf_{\nu\in\tilde{K}} \max\left[V(T)e^{-\nu_1} - I_h + \max\left[I_h - I(T)e^{-\nu_2}, 0\right], 0\right]\right] \\ &= e^{-rT}E_0\left[\max\left[V(T) - I_h, 0\right]\right] = h_{call}^E(V; I_h). \end{aligned} \tag{3.130}$$

(Hierbei sind wiederum $(\hat{\nu}_1^{up}, \hat{\nu}_2^{up}) = (0, \infty)$ sowie $(\hat{\nu}_1^{low}, \hat{\nu}_2^{low}) = (0, -\infty)$ zu wählen.) Die Preisoption gegenüber dem Zulieferer hat folglich keine Wirkung auf den Verkäuferpreis der Realoption. Für den Käuferpreis ergibt sich nun allerdings ein (i.d.R.) von null verschiedener Wert[487], der dem Wert $(h_{call}^E(V; I_h))$ einer Kaufoption auf das Underlying mit Basispreis I_h entspricht. Die Repräsentation der unterstellten Ausübungssituation des betrachteten Unternehmens durch den Anspruch $B_{PO}(T)$ soll durch die Fallunterscheidung in Tabelle 3.2 belegt werden. Dadurch wird leicht nachvollziehbar, dass dieser Anspruch äquivalent ist zu einer Long-Position in einer indizierten Kaufoption auf $V(.)$ gegen $I(.)$ zuzüglich einer Long-Kaufoption auf das Minimum von $V(T)$ und $I(T)$ mit Basispreis I_h. In der Summe ergeben diese beiden Ansprüche den folgenden Anspruch:

$$B_{PO}^{\Sigma}(T) := \underbrace{\max\left[V(T) - I(T), 0\right]}_{=: A_1} + \underbrace{\max\left[\min\left[V(T), I(T)\right] - I_h, 0\right]}_{=: A_2}. \tag{3.131}$$

Anhand der Fallunterscheidung innerhalb von Tabelle 3.2 kann somit ersehen werden, dass gilt:

$$B_{PO}(T) \sim B_{PO}^{\Sigma}(T);$$

beide Ansprüche sind also äquivalent.

Im Unterschied zur Darstellung von $B_{PO}(T)$ gemäß Gl. (3.128) erweist sich allerdings die Ableitung eines Käuferpreises nach Satz aus der Darstellung des Anspruches $B_{PO}^{\Sigma}(T)$ gemäß Gl. (3.131) als schwieriger. Er wird jedoch nicht größer als die zu $B_{PO}(T)$ gemäß Gl. (3.128) abgeleitete Preisuntergrenze, repräsentiert durch $h_{low}^{B_{PO}}(K)$ nach Gl. (3.130), sein, da diese sich ebenfalls aus der Darstellung von $B_{PO}^{\Sigma}(T)$ gemäß Gl. (3.131) ergibt, wenn darin $V(T)$ durch $V(T)e^{-\nu_1}$ und $I(T)$ durch $I(T)e^{-\nu_2}$ ersetzt werden und anschließend der Schattenpreisvektor $(\nu_1, \nu_2) = (0, -\infty)$ gewählt wird[488]. Somit bleibt die

[486] Es sind hierbei die Auszahlungen der Ansprüche bei sämtlichen Kombinationen des relativen Größenverhältnisses von $V(T), I(T)$ und I_h zu bestimmen. Die Rückflussstruktur von $B_{PO}(T)$ kann hierzu Tabelle 3.2 entnommen werden.

[487] Ein Wert größer null ist bspw. dann gegeben, wenn $\sigma_V \neq 0$ ist.

[488] Entsprechend der vorausgehenden Bemerkung bedeutet dies, dass $\nu_2 \to -\infty$ sein soll.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Tabelle 3.2
Ausübungswert der Realoption mit Preisoption sowie Produktions- und Ausübungsverhalten des betrachteten Unternehmens

Szenario	Ausz. $B_{PO}(T)$, $B_{PO}^{\Sigma}(T)$	Handlung
$V(T) > I(T) > I_h$	$V(T) - I_h$	Prod.; Ausüb. der P.-Option
$V(T) > I_h \geq I(T)$	$V(T) - I(T)$	Prod.; Verfall der P.-Option
$I(T) \geq V(T) > I_h$	$V(T) - I_h$	Prod.; Ausüb. der P.-Option
$I(T) \geq I_h \geq V(T)$	0	keine Prod., Verf. der P.-Option
$I_h > I(T) \geq V(T)$	0	keine Prod.; Verf. der P.-Option
$I_h \geq V(T) > I(T)$	$V(T) - I(T)$	Prod.; Verf. der P.-Option

aus der bisherigen Herleitung hervorgegangene Preisuntergrenze $h_{low}^{B_{PO}}(K)$ die bislang maximale.

Die Repräsentation der Realoption mit Preisoption durch den Anspruch $B_{PO}^{\Sigma}(T)$ nach Gl. (3.131) ermöglicht demgegenüber in einfacher Weise die Ermittlung des Preisabschlages, den der Käuferpreis im Verhältnis zum Preis des preisgeschützten Anspruches auf einem vollständigen Markt beinhaltet. Dieser Preisabschlag, den der Inhaber der Option bei der Veräußerung des preisgeschützten Anspruches maximal hinzunehmen hat, entspricht folgender Differenz:

$$\Delta_{Ref.} := \underbrace{h_{Call}^{E}(V,I) + h_{Call}^{E;min}(V,I;I_h)}_{\text{Wert auf vollständigem Markt}} - \underbrace{h_{call}^{E}(V;I_h)}_{\text{Käuferpreis}}.$$

Dabei kennzeichnen $h_{Call}^{E}(V,I)$ den Wert einer durch den Ausdruck A_1 repräsentierten indizierten Kaufoption und $h_{Call}^{E;min}(V,I;I_h)$ den Wert der durch A_2 verkörperten „Minimum“-Kaufoption, jeweils auf einem vollständigen Markt. Die Optionspreise werden in Anhang 5.6.1 hergeleitet. Der Käuferpreis ist durch Gl. (3.130) gegeben.

Anmerkung 3.4 *zur alternativen Verwertbarkeit der Preisoption*
In Anhang 5.6.2 wird die Beziehung zwischen dem Anspruch $B_{PO}(T)$ gemäß Gl. (3.128) und einem Ausdruck $B_{PO}^{Alt.}(T)$ untersucht, wobei Letzterer für den Fall steht, dass die Preisoption auch dann noch von Wert ist, wenn die Technologie der Unternehmung an sich wertlos wird. Dies entspricht einer Situation, in der die Unternehmung das Vorprodukt über die Preisoption erwerben und es am Markt sofort veräußern könnte, ohne es selbst zu verwenden. Im Hinblick auf die unterstellte Unvollständigkeitsrestriktion muss lediglich die permanente Handelbarkeit des Produktes ausgeschlossen sein, so dass eine etwaige Veräußerung im Fälligkeitszeitpunkt der Option dem nicht notwendigerweise widersprechen würde. Zudem könnte auch ein wertmäßiger Ausgleich zwischen betrachtetem Unternehmen und Zulieferer vereinbart sein, so dass eine physische Lieferung nicht unterstellt zu werden bräuchte[489]*. Da die*

[489] Mit Blick auf den Realinvestitionsbezug erscheint jedoch eine solche Vereinbarung für einen Zulieferer, der am „physischen“ Absatz seiner Produkte interessiert ist, fragwürdig.

betrachtete Unternehmung dadurch das Vorprodukt „bestmöglich“ verwenden würde, erlöst sie im Fälligkeitszeitpunkt der Realoption ($t = T$) den größeren der beiden Werte $V(T)$ und $I(T)$. Hierfür hat sie wahlweise $I(T)$ oder I_h aufzubringen. Damit gilt:

$$B_{PO}^{Alt.}(T) = \max[V(T), I(T)] - \min[I(T), I_h]. \tag{3.132}$$

In Anhang 5.6.2 werden nun die Rückflussstrukturen von $B_{PO}^{Alt.}(T)$ und $B_{PO}(T)$ einander gegenübergestellt. Daran zeigt sich, dass die zu $B_{PO}(T)$ abgeleitete Preisuntergrenze eine untere Schranke für die Preisuntergrenze zum Anspruch $B_{PO}^{Alt.}(T)$ ist. Andererseits beinhaltet, wie im Folgenden dargelegt wird, der aus $B_{PO}^{Alt.}(T)$ resultierende Anspruch gegen den Zulieferer eine obere Abschätzung für dessen tatsächliche Inanspruchnahme auch in der $B_{PO}(T)$ zugrunde liegenden Situation.

(b) Sicht des Zulieferers:

Es bleibt noch zu klären, was die Unternehmung für die Preisgarantie aufwenden muss. Hierfür ist die Situation des Zulieferers zu betrachten. Durch die Einräumung der Preisoption verpflichtet dieser sich, im Zeitpunkt $t = T$ dem Unternehmen das Vorprodukt zum Preis von I_h zu liefern, wobei er lediglich im Fall $I(T) > I_h$ aus der Preisoption in Anspruch genommen wird. Genau genommen, wird er auch in diesem Fall nur in Anspruch genommen, wenn zugleich $V(T) \geq I_h$ gilt. Denn annahmegemäß wird die betrachtete Unternehmung (sein Kunde) nur dann die Option ausüben, wenn sie mit dem Vorprodukt einen (Barwert-)Überschuss unter Einsatz ihrer Technologie erzielt. (Die in Anmerkung 3.4 angesprochene Situation liegt eben nicht zugrunde.) Geht man von dem (ungünstigen) Fall aus, dass die Bereitstellung des Vorproduktes im Rahmen der eingeräumten Preisoption einen sonstigen Absatz dieses Produktes verhindert, da die Produktionskapazität beschränkend wirkt, ergeben sich für den Zulieferer aus der Übernahme der Stillhalterposition Erlösminderungen gemäß den in Tabelle 3.3 unterschiedenen Fällen einer Inanspruchnahme bzw. Nicht-Inanspruchnahme. Dabei wird unterstellt, dass der Zulieferer seinerseits Vorprodukte benötigt, deren Wertentwicklung durch einen Prozess $I^L(.)$ beschrieben sei. Zahlungen für den Aufbau der Produktionskapazität gelten hierbei als bereits verursacht und irreversibel. Sie gelten somit als entscheidungsunerheblich und sind in der Tabelle nicht erfasst.

Die Erlösminderung des Zulieferers entsprechend dieser Fallunterscheidung lässt sich durch den folgenden bedingten Anspruch repräsentieren:

$$B_{vorl.}^{Z}(T) := (I(T) - I_h)\, \mathbf{1}_{\{I(T)-I_h \geq 0 \,\wedge\, V(T)-I_h \geq 0\}}, \tag{3.133}$$

für den der Zulieferer eine Stillhalterposition einnimmt. Der Zulieferer tritt als Verkäufer dieses Anspruches auf. Er muss folglich einen Preis verlangen, der ihn ein Portfolio aufzubauen gestattet, welches in jedem Umweltzustand zum Zeitpunkt $t = T$ mindestens die Zahlung aus $B_{vorl.}^{Z}(T)$ erbringt. Diesbezüglich hat der Zulieferer zwei unsichere Wertdeterminanten zu

Tabelle 3.3

Verlustprofil der Preisoption aus Sicht des Zulieferers bei ausgelasteten Kapazitäten entsprechend dem Anspruch $B_{PO}(T)$

Fall		Erlös *mit* Verpfl.	Erlös *ohne* Verpfl.	Einbuße durch Verpfl.
1.	$I(T) > I_h$			
1.1	$V(T) \geq I_h$	Inanspruchnahme aus Preisoption		
1.1.1	$I(T) > I^L(T)$	Prod.-Prozess des Zulieferers ist konkurrenzfähig		
		$I_h - I^L(T)$	$I(T) - I^L(T)$	$I(T) - I_h$
1.1.2	$I(T) \leq I^L(T)$	Zulieferer kauft Vorprodukt zu $I(T)$ am Markt		
		$I_h - I(T)$	0	$I(T) - I_h$
1.2	$I_h > V(T)$	Kunde lässt Option verfallen		
1.2.1	$I(T) > I^L(T)$	Prod.-Prozess des Zulieferers ist konkurrenzfähig		
		$I(T) - I^L(T)$	$I(T) - I^L(T)$	0
1.2.2	$I(T) \leq I^L(T)$	Prod.-Prozess des Zulieferers ist nicht konkurrenzfähig		
		0	0	0
2.	$I(T) \leq I_h$	Preisoption im Verfallszeitpunkt wertlos		
2.1	$I(T) > I^L(T)$	Prod.-Prozess des Zulieferers ist konkurrenzfähig		
		$I(T) - I^L(T)$	$I(T) - I^L(T)$	0
2.2	$I(T) \leq I^L(T)$	Prod.-Prozess des Zulieferers ist nicht konkurrenzfähig		
		0	0	0

berücksichtigen: zum einen die Wertentwicklung seines Endproduktes ($I(.)$), welche sowohl die Wahrscheinlichkeit der Inanspruchnahme als auch die in diesem Fall zu gewärtigende Einbuße bestimmt, zum anderen die Entwicklung des Endproduktwertes seines Kunden ($V(T)$), die lediglich die Wahrscheinlichkeit der Ausübung durch diesen beeinflusst. Während bereits angenommen wurde, dass sich der Zulieferer bezüglich seines Endproduktes auf einem vollständigen Markt oder allenfalls einem (nicht restriktiv wirkenden) Leerverkaufsverbot gegenübersieht, ist eine weitere Annahme zu den Marktverhältnissen, welche aus seiner Sicht in Bezug auf das Endprodukt seines Kunden gelten, zu treffen. Im vorliegenden Kontext ist sinnvollerweise nicht davon auszugehen, dass sich der Zulieferer diesbezüglich auf einem vollständigen Markt befindet. Dann müsste der Zulieferer die Möglichkeit haben, in $V(.)$ short zu gehen. Da er aber kein Produzent dieses Produktes ist, sollte davon ausgegangen werden, dass er keine entsprechende Lieferverpflichtung eingehen kann. Der Zulieferer befindet sich diesbezüglich auf einem restringierten Markt. Eine genauere Untersuchung möglicher Marktunvollständigkeiten für den Zulieferer bezüglich $V(.)$ kann jedoch mit Blick auf das Ziel der Ableitung eines — unter bestimmten Umständen — positiven Wertes der Realoption des betrachteten Unternehmens unterbleiben. Es genügt, von einer für den Zulieferer ungünstigen Wertentwicklung von $V(.)$ auszugehen. Eine solche ist dann gegeben, wenn $V(T) \geq I_h$ mit Wahrscheinlichkeit eins gilt. Der unter dieser Annahme abgeleitete Anspruchswert bildet eine Obergrenze für den Verkäuferpreis zum bedingten Anspruch $B^Z_{vorl.}(T)$. Denn dann ist:

$$\begin{aligned} B^Z_{vorl.}(T) &= (I(T) - I_h)\,\mathbf{1}_{\{I(T)-I_h \geq 0 \,\wedge\, V(T)-I_h \geq 0\}} \\ &\preceq (I(T) - I_h)\,\mathbf{1}_{\{I(T)-I_h \geq 0\}} = \max\,[I(T) - I_h, 0] =: B^Z(T). \end{aligned} \quad (3.134)$$

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Der Zulieferer geht also für die Ermittlung der Optionsprämie davon aus, dass er durch die Preisoption zum Stillhalter des Anspruches $B^Z(T)$ wird[490]. Er sieht sich folglich als Stillhalter einer (gewöhnlichen) europäischen Kaufoption auf $I(T)$ mit Basispreis I_h. $B^Z(T)$ repräsentiert darüber hinaus unmittelbar den aus Sicht des Zulieferers zugrunde zu legenden Anspruch, falls die in der Anmerkung 3.4 beschriebene Situation vorliegt; d.h., wenn das betrachtete Unternehmen selbst eine Verwertung des Vorproduktes durch Verkauf zum Preis $I(T)$ im Fälligkeitszeitpunkt vornehmen kann und deshalb seine Preisoption bei $I(T) > I_h$ stets, d.h. unabhängig vom Wert $V(T)$, ausübt.

In Bezug auf den Anspruch $B^Z(T)$ ist nun ein Verkäuferpreis nach Satz zu bestimmen. Unterstellt man — wie hier durch die Fallergänzung —, dass sich der Zulieferer bezüglich seines Endproduktes auf einem vollständigen Markt befindet ($K^z = \mathbb{R}$) oder sich zumindest nur einem Leerverkaufsverbot gegenübersieht ($K^z = \mathbb{R}_+,$), so ist aus seiner Sicht der Verkäuferpreis durch:

$$\begin{aligned} h_{up}^{E;Zul.}(K^z) &= E_0\left[e^{-rT} \sup_{\nu^z \in \tilde{K}^z} \max\left[I(T)e^{-\nu^z} - I_h, 0\right]\right] \\ &= E_0\left[e^{-rT} \max\left[I(T) - I_h, 0\right]\right] = h_{Call}^E(I; I_h), \end{aligned}$$

also den Wert ($h_{Call}^E(I; I_h)$) der europäischen Kaufoption auf $I(T)$ mit Basispreis I_h *wie auf einem vollständigen Markt*, gegeben. Dabei kennzeichnen ν^z den Schattenpreis und $\tilde{K}^z$ die Schattenpreismenge für das Bewertungsproblem des Zulieferers, wobei für Letztere $\tilde{K}^z = \{0\}$ (vollständiger Markt) bzw. $\tilde{K}^z = \mathbb{R}_+$ (Leerverkaufsverbot bzgl. $I(.)$) gelten. Das Supremum wird für $\hat{\nu}^z = 0$ angenommen. Anzumerken ist, dass für den Zulieferer der Wertprozess seines Vorproduktes ($I^L(.)$) bei der angegebenen Differenzbetrachtung offensichtlich keine Rolle spielt.

(c) Gesamtbetrachtung:

Fasst man nun die bisherigen Ergebnisse aus Sicht der (betrachteten) Unternehmung zusammen, so ergibt sich für diese ein positiver Mindestwert der Realoption, wenn die Differenz aus dem sich bei ihr durch die Preisoption einstellenden Optionswert (als Käuferpreis) und dem für die Preisoption dem

[490] Eine Anwendung von Satz zur Ermittlung eines Verkäuferpreises könnte in Bezug auf den Anspruch $\bar{B}_{vorl.}^Z(T) := (I(T) - I_h)\,\mathbf{1}_{\{I(T)-I_h>0 \,\wedge\, V(T)-I_h>0\}}$ erfolgen, welcher sich von $B_{vorl.}^Z(T)$ nur durch Ereignisse unterscheidet, welchen letztlich eine Punktwahrscheinlichkeit von null zukommt. Die durch $\bar{B}_{vorl.}^Z(T)$ repräsentierte Funktion in den Variablen $V(T)$ und $I(T)$ ist „lower semi-continuous"; vgl. Fn. 373, S. 207.). Damit ist der Verkäuferpreis zu diesem Anspruch — mit $\zeta(\nu) = 0$ — durch $h_{up}^{\bar{B}_{vorl.}^Z} = E_0\left[e^{-rT} \sup_{(\nu_1,\nu_2)\in\tilde{K}} (I(T)e^{-\nu_2} - I_h)\,\mathbf{1}_{\{I(T)e^{-\nu_2}-I_h>0 \,\wedge\, V(T)e^{-\nu_1}-I_h>0\}}\right]$ gegeben, wobei für einen in Bezug auf $I(.)$ vollständigen Markt $\nu_2 \equiv 0$ und für ein Leerverkaufsverbot in $V(.)$ $\nu_1 \geq 0$ sowie einen diesbezüglich unvollständigen Markt i.e.S. $\nu_1 \in \mathbb{R}$ gelten. Daraus ist leicht zu ersehen, dass der Gegenwartswert des Anspruches $B^Z(T)$ dem Verkäuferpreis des Ausgangsanspruches auf einem bzgl. $V(.)$ unvollständigen Markt i.e.S. entspricht. Der Verkäuferpreis auf einem Markt mit Leerverkaufsverbot bzgl. $V(.)$ entspricht hingegen dem Gegenwartswert des Anspruches $B_{vorl.}^Z(T)$ *wie* auf einem vollständigen Markt. Gleichwohl wird im Folgenden die Abschätzung zugrunde gelegt.

Zulieferer zu vergütenden Betrag (ermittelt als Verkäuferpreis) positiv ist. Ist folglich:

$$\Delta_{PO}(V, I; I_h) := h_{low}^{B_{PO}}(K) - h_{up}^{E;Zul.}(K^z) = h_{Call}^E(V; I_h) - h_{Call}^E(I; I_h) > 0,$$

so ist durch den Erwerb einer Preisoption die Untergrenze arbitragefreier Preise für die Investitionsmöglichkeit von null auf den Wert $\Delta_{PO}(V, I; I_h) > 0$ angehoben worden. Zur Bestimmung dieser neuen Untergrenze sind die beiden Optionswerte zu ermitteln. Jeder dieser Optionswerte entspricht dem Wert einer europäischen Kaufoption auf das betreffende Underlying (*Black/Scholes-Wert*). Hierfür ist von nicht-dividendengeschützten Optionen auszugehen. Mit den durch die Gl. (3.121) und (3.122) gegebenen Prozessdarstellungen für $V(.)$ und $I(.)$ ergeben sich unter Berücksichtigung des Dividendenvektors $\delta = (\delta_V, \delta_I)$ die folgenden Optionswerte, wobei für die Bewertung jeweils eine Einzelbetrachtung anzustellen ist[491]:

- für die Kaufoption auf $V(T)$ des betrachteten Unternehmens:

$$h_{Call}^E(V; I_h) = V_0 e^{-\delta_V T} \Phi(d_1^V) - I_h e^{-rT} \Phi(d_2^V) \tag{3.135}$$

  mit $\Phi(.)$ für die Verteilungsfunktion zur Standardnormalverteilung[492] sowie

$$\begin{aligned} d_1^V &= \frac{1}{\sigma_V \sqrt{T}} \left(\ln \frac{V_0}{I_h} + \left(r - \delta_V + \tfrac{1}{2}\sigma_V^2 \right) T \right), \\ d_2^V &= d_1^V - \sigma_V \sqrt{T}; \end{aligned}$$

- für die Kaufoption auf $I(T)$ des Zulieferers:

$$h_{Call}^E(I; I_h) = I_0 e^{-\delta_I T} \Phi(d_1^I) - I_h e^{-rT} \Phi(d_2^I), \tag{3.136}$$

  wobei

$$\begin{aligned} d_1^I &= \frac{1}{\bar{\sigma}_I \sqrt{T}} \left(\ln \frac{I_0}{I_h} + \left(r - \delta_I + \tfrac{1}{2}\bar{\sigma}_I^2 \right) T \right), \\ d_2^I &= d_1^I - \bar{\sigma}_I \sqrt{T}. \end{aligned}$$

Da sich der Zulieferer annahmegemäß keinen Marktbeschränkungen im Hinblick auf die Duplikation seiner Stillhalterverpflichtung gegenübersieht[493] und deshalb grundsätzlich jede Preisoption des in Frage stehenden Typs akzeptieren wird, sofern sie mit dem Wert auf einem vollständigen Markt vergütet wird, kann der Basispreis seitens der betrachteten Unternehmung aus ihrer Sicht günstig gestaltet werden. Die Unternehmung wird den Basispreis folglich so ansetzen, dass der Term $\Delta_{PO}(V, I; I_h)$ möglichst groß wird, sofern es überhaupt positive Differenzterme gibt. Es ist dabei allerdings vorauszusetzen,

[491] Vgl. zur Optionspreisformel *Musiela/Rutkowski* (1998), S. 144 f., *Steiner/Uhlir* (2001), S. 258 f. Auf das System stochastisch unabhängiger Wiener-Prozesse mit der sich daraus für die Prozesse $V(.)$ und $I(.)$ ergebenden Darstellung der Gl. (2.109) und (2.110) braucht hierbei (noch) nicht zurückgegriffen zu werden.

[492] Zur Dichtefunktion s.u. Fn. 495, S. 258.

[493] Er muss hierfür eine Long-Position bezüglich $I(.)$ eingehen, was sowohl auf einem vollständigen als auch auf einem Markt mit Leerverkaufsverbot bzgl. $I(.)$ ohne weiteres möglich ist.

dass der Zulieferer nicht versucht, den sich für die Unternehmung ergebenden Vorteil auch für sich auszunutzen, indem er einen Optionspreis verlangt, der höher als der Wert auf dem vollständigen Markt ist. Im Idealfall wäre dies gewährleistet, wenn der Zulieferer problemlos substituierbar wäre. Die Unternehmung hat nun das folgende Problem zu lösen[494]:

$$\max_{I_h \in \mathbb{R}_+} \Delta_{PO}(V_0, I_0; I_h).$$

Die durch die Kontraktmöglichkeit mit dem Zulieferer gegebene Erhöhung des Käuferpreises für die Realoption kann maximal den Wert:

$$\Delta_{PO}(V_0, I_0; \hat{I}_h) \text{ mit } \hat{I}_h := \arg \max_{I_h \in \mathbb{R}_+} \Delta_{PO}(V_0, I_0; I_h) \tag{3.137}$$

annehmen, vorausgesetzt, $\hat{I}_h$ ist endlich. Notwendige Bedingung für einen diesbezüglich optimalen, endlichen Basispreis $\hat{I}_h$ (≥ 0) ist[495]:

$$\begin{aligned}\hat{I}_h \frac{\partial \Delta_{PO}}{\partial I_h}(V_0, I_0; \hat{I}_h) = 0 \quad &= \quad \hat{I}_h \left(-e^{-rT}\left(N(d_2^V(\hat{I}_h)) - N(d_2^I(\hat{I}_h))\right)\right) \\ &= \quad \hat{I}_h e^{-rT}\left(-\int_{-\infty}^{d_2^V(\hat{I}_h)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz + \int_{-\infty}^{d_2^I(\hat{I}_h)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz\right).\end{aligned}$$

Ein endlicher, optimaler Basispreis muss somit Folgendes erfüllen:

$$\hat{I}_h = 0 \tag{3.138}$$

$$\vee\; d_2^V(\hat{I}_h) = d_2^I(\hat{I}_h). \tag{3.139}$$

Gl. (3.139) führt wie folgt auf einen Kandidaten für den optimalen Basispreis:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma_V\sqrt{T}}\left(\ln\frac{V_0}{\hat{I}_h} + \left(r - \delta_V - \tfrac{1}{2}\sigma_V^2\right)T\right) \quad &= \quad \frac{1}{\bar{\sigma}_I\sqrt{T}}\left(\ln\frac{I_0}{\hat{I}_h} + \left(r - \delta_I - \tfrac{1}{2}\bar{\sigma}_I^2\right)T\right) \\ \Leftrightarrow \quad -\left(\frac{1}{\sigma_V\sqrt{T}} - \frac{1}{\bar{\sigma}_I\sqrt{T}}\right)\ln\hat{I}_h \quad &= \quad -\frac{1}{\sigma_V\sqrt{T}}\left(\ln V_0 + \left(r - \delta_V - \tfrac{1}{2}\sigma_V^2\right)T\right) \\ &\quad\; + \frac{1}{\bar{\sigma}_I\sqrt{T}}\left(\ln I_0 + \left(r - \delta_I - \tfrac{1}{2}\bar{\sigma}_I^2\right)T\right),\end{aligned}$$

so dass:

$$\hat{I}_h = e^{\frac{1}{\sigma_V - \bar{\sigma}_I}\left[-\bar{\sigma}_I\left(\ln V_0 + \left(r - \delta_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)T\right) + \sigma_V\left(\ln I_0 + \left(r - \delta_I - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_I^2\right)T\right)\right]}. \tag{3.140}$$

Falls es ein Binnenoptimum gibt, ist dieses somit eindeutig.

[494] Ein negativer Basispreis ist hier sicherlich unrealistisch. Die dabei entstehende Option wäre darüber hinaus darstellbar als Option mit nicht-negativem Basispreis zuzüglich einer risikolosen Zahlung. Darüber hinaus wird bei den Funktionen für den Optionswert ein $I_h > 0$ vorausgesetzt. Der Fall $I_h = 0$ wird noch separat angesprochen.

[495] Zur partiellen Ableitung des Optionspreises nach dem Basispreis vgl. *Cox/Rubinstein* (1985), S. 221, wobei eine Anpassung an vorhandene Dividendenprozesse vorzunehmen ist. Die Dichtefunktion zur Normalverteilung (und damit auch zur Standardnormalverteilung) ist bspw. in *Fahrmeier/Künstler/Pigeot/Tutz* (2001), S. 353, angegeben. Sie lautet:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2},$$

μ_X : Erwartungswert, σ_X : Standardabweichung der normalverteilten Zufallsvariablen X.

Anmerkung 3.5

- *Für $I_h = 0$ ergibt sich eine Wertobergrenze für die Preisoption von $E_0\left[e^{-rT}I(T)\right] = I_0 e^{-\delta_I T}$ $\left(= \lim_{I_h \to 0} h^E_{Call}(I; I_h)\right)$. Der Fall $I_h = 0$ entspricht einem unbedingten Termingeschäft, da der Zulieferer in sämtlichen Umweltzuständen (mit positiver Wahrscheinlichkeit) in $t = T$ aus der Option in Anspruch genommen wird. Damit hat sich ferner die Unternehmung bereits in $t = 0$ auf eine spätere Produktion festlegt, denn es gilt $V(T) > \min\left[I(T), I_h\right] = I_h = 0$ (fast sicher). Insofern wird der Zulieferer auch den vollen Gegenwartswert des Vorproduktes verlangen, bereinigt nur durch Wertflüsse („Dividenden"), die aus einer Long-Position im Vorprodukt entstehen. Bei Lagerkosten sind diese negativ, so dass mit $\delta_I < 0$ auch Zahlungen berücksichtigt werden, die dem Zulieferer aus der Bereitstellung per Termin entstehen[496]. Für das Unternehmen ergibt sich ein Gegenwartswert des zukünftigen Erlöses von $E_0\left[e^{-rT}V(T)\right] = V_0 e^{-\delta_V T}$ und somit ein Gegenwartswert der durch den Zulieferer-Kontrakt abgesicherten, zukünftigen Investitionsmöglichkeit in Höhe von $\Delta = V_0 e^{-\delta_V T} - I_0 e^{-\delta_I T}$, wobei die Preisoption nur bei $\Delta > 0$ eindeutig zu erwerben ist.*

- *Wird hingegen der Call auf den Unternehmensoutput $V(T)$ für keinen nicht negativen, endlichen Basispreis größer als der Call auf das Vorprodukt $I(T)$ sein[497], so gilt doch $\lim_{I_h \to \infty} h^E_{Call}(V; I_h) = \lim_{I_h \to \infty} h^E_{Call}(I; I_h) = 0$, wie sich leicht anhand der Gl. (3.135) und (3.136) nachvollziehen lässt. Damit gilt auch $\lim_{I_h \to \infty} \Delta_{PO}(V, I; I_h) = 0$ und folglich sind für diesen Grenzfall die Werte der Realoption ohne und derjenigen mit Preisgarantie gleich.*

2.2 Fall: Leerverkaufsverbot und vollständiger Markt bzgl. $I(.)$[498]

Betrachtet man zunächst die Situation eines Leerverkaufsverbotes der betrachteten Unternehmung in ihrem Vorprodukt, so hat sie diesbezüglich nur die Möglichkeit, long zu gehen, d.h. sie kann keine (ungedeckte) Lieferverpflichtung eingehen, während sie sich hinsichtlich ihres eigenen Produktes auf einem vollständigen Markt befindet. Umgekehrt deckt dieser Fall jedoch Situationen ab, in denen eine jederzeitige Lagerbarkeit und Veräußerbarkeit bestehender Bestände im Vorprodukt durch das betrachtete Unternehmen selbst möglich sind.

---

[496] Vergleichbar den „cost-of-carry" als Erklärung des Unterschiedes zwischen dem Preis eines Future und dem Kassapreis des zugrunde liegenden Basisinstrumentes; vgl. *Hull* (2000), S. 73.

[497] Auf den Beweis der Existenz einer solchen Konstellation wird verzichtet. Intuitiv ist dieser Fall bspw. bei $I_0 > V_0 \wedge \bar{\sigma}_I > \sigma_V \wedge \delta \equiv 0$ zu erwarten. Denn der *Black/Scholes*-Preis einer dividendengeschützten Kaufoption besitzt eine positive partielle Ableitung sowohl nach dem Kassakurs des Basispreises (Options-Delta) als auch nach der Volatilität (Standardabweichung; Options-Vega) der kontinuierlichen Aktienrendite; vgl. z.B. *Hull* (2000), S. 312, 328.

[498] Vgl. zu dieser Fallgestaltung bereits *Knobloch* (2003), S. 176 ff.

Aus den Gl. (3.126) und (3.127) ergeben sich für das *Leerverkaufsverbot bzgl.* $I(.)$ (bei vollständigem Markt bzgl. $V(.)$) unmittelbar die folgenden Wertgrenzen:

$$\begin{aligned} h^E_{up}(K) &= E_0\left[e^{-rT}V(T)\right] = V_0 e^{-\delta_V T} \text{ mit } (\hat{\nu}_1^{up}, \hat{\nu}_2^{up}) = (0,\infty), \\ h^E_{low}(K) &= E_0\left[e^{-rT}\left(V(T)-I(T)\right)^+\right] \text{ mit } (\hat{\nu}_1^{low}, \hat{\nu}_2^{low}) = (0,0). \end{aligned}$$

Während die Obergrenze wie in *Fall 2.1* im Gegenwartswert des Endproduktes für die betrachtete Unternehmung, bereinigt um Wertflüsse (Dividenden) durch dessen Halten bis zum Ausübungszeitpunkt ($V_0 e^{-\delta_V T}$), besteht, ergibt sich bereits eine von null verschiedene Untergrenze. Diese entspricht dem Wert einer indizierten Kaufoption auf das Underlying ($V(.)$) gegen den Wert des Vorproduktes ($I(.)$); die Marktrestriktion hat somit aus Käufersicht keinen Einfluss auf die Optionsbewertung, verglichen mit einem vollständigen Markt. Die Frage, ob auf unvollständigen Märkten eine von null verschiedene Untergrenze entstehen kann, ist folglich zu bejahen. Allerdings beruht dies wiederum auf einem „trivialen“ Sachverhalt, nämlich dem, dass die zur Duplikation notwendigen Maßnahmen nicht unter die Marktbeschränkung fallen. Man könnte nun an diesem Punkt stoppen, da der Käuferpreis für eine Option den Wert auf einem vollständigen Markt nie überschreiten kann. Demgegenüber bietet es sich an, die Überlegungen des vorausgegangenen Falles auch auf die vorliegende Problemstellung zu übertragen und die Wirkung einer optionalen Preisgarantie auf den Wert der Realoption zu untersuchen. Da die Marktrestriktion ohnehin nicht bindend ist, gelten die Überlegungen auch für einen vollständigen Markt (bzgl. $I(.)$ und $V(.)$). Deshalb sind hier die Fälle eines Leerverkaufsverbots und eines vollständigen Marktes bezüglich $I(.)$ zusammengefasst.

Der Wert der Realoption *ohne* optionale Preisgarantie stellt sich somit sowohl als Käuferpreis auf dem spezifizierten unvollständigen Markt als auch als Optionswert auf einem (generell) vollständigen Markt wie folgt dar:

$$h^E = h^E_{low}(K) = E_0\left[e^{-rT}\left(V(T)-I(T)\right)^+\right].$$

Betrachtet man zusätzlich die Preisoption, so ergibt sich die folgende Situation, wobei wiederum nach der Wirkung auf den Realoptionswert beim betrachteten Unternehmen und nach dem Wert aus Sicht des Zulieferers differenziert wird:

(a) Wert beim betrachteten Unternehmen:
Aus Sicht des Unternehmens ergibt sich durch die optionale Preisgarantie ein Anspruch, wie er für den vorausgehenden *Fall 2.1* dargestellt wurde: Er entspricht $B_{PO}(T)$, falls eine Verwertung des Vorproduktes außerhalb der eigenen Produktion für die Unternehmung nicht möglich ist, und $B_{PO}^{Alt.}(T)$ in der komplementären Situation. Angesichts der hier betrachteten Fallgestaltung, dass sich nämlich die betrachtete Unternehmung „höchstens“ einem Leerverkaufsverbot in $I(.)$ gegenübersieht, erscheint im Unterschied zum vorausgehenden Fall jedoch (nur) die zweite Situation sinnvoll. Für

den hierfür zu betrachtenden, durch Gl. (3.132) beschriebenen Anspruch $B_{PO}^{Alt.}(T)$ $(= \max[V(T), I(T)] - \min[I(T), I_h])$ gilt Folgendes:

$$B_{PO}^{Alt.}(T) \sim \bar{B}_{PO}(T),$$

d.h. er ist äquivalent zu dem wie folgt definierten Anspruch:

$$\bar{B}_{PO}(T) := \max\left[V(T) - I(T), 0\right] + \max\left[I(T) - I_h, 0\right].$$

(Die postulierte Äquivalenz kann leicht anhand der Fallunterscheidung nachvollzogen werden, welche sich in Tabelle 5.2 des Anhanges 5.6.2 findet.) Der Anspruch $\bar{B}_{PO}(T)$ definiert offensichtlich das Auszahlungsmuster einer europäischen indizierten Kaufoption auf $V(T)$ gegen $I(T)$, welches additiv verknüpft ist mit dem einer europäischen Kaufoption mit Underlying $I(T)$ und Basispreis I_h. Der Gegenwartswert dieses Anspruches wird auf einem vollständigen Markt der Summe aus dem Wert der indizierten Kaufoption $h_{Call}^{E}(V, I)$ und dem Wert der (einfachen) Kaufoption $h_{Call}^{E}(I; I_h)$ entsprechen. Der zugehörige Käuferpreis auf einem durch ein Leerverkaufsverbot in $I(.)$ restringierten Markt wird somit nicht oberhalb dieses Wertes liegen. Somit ergibt sich als Wert der Realoption vor Abgeltung des Zulieferers auf einem für die betrachtete Unternehmung *vollständigen Markt bezüglich* $I(.)$:

$$h_{\bar{B}_{PO};brutto}^{1} := h_{Call}^{E}(V, I) + h_{Call}^{E}(I; I_h), \tag{3.141}$$

welcher zugleich eine *Obergrenze* für den entsprechenden Käuferpreis auf einem Markt mit *Leerverkaufsverbot bezüglich* $I(.)$ ist. Eine *Untergrenze* bei Existenz eines solchen *Leerverkaufsverbotes* ist durch:

$$h_{\bar{B}_{PO};brutto}^{2} := h_{Call}^{E}(V, I) + h_{Call}^{E;min}(V, I; I_h) \tag{3.142}$$

gegeben[499].

(b) Sicht des Zulieferers:

Es sind hinsichtlich der Produktionsverhältnisse *beim Zulieferer* grundsätzlich zwei Konstellationen denkbar: Zum einen kann wie in *Fall 2.1* davon ausgegangen werden, dass die Bereitstellung des Vorproduktes beim Zulieferer einen anderweitigen Absatz seines Produktes verdrängt (*Situation ausgelasteter Kapazitäten*), zum anderen ist die Situation eines zusätzlichen, nur im Zusammenhang der Preisoption betriebenen Kapazitätsaufbaues denkbar (*Situation zusätzlich aufbaubarer Kapazitäten*).

[499] Vgl. die Darstellung in *Fall 2.1*, S. 253, wonach der Anspruch $B_{PO}^{Alt.}(T)$ den Anspruch $B_{PO}(T)$ dominiert und Letzterer zur angegebenen Wertuntergrenze führt. Diese ergibt sich, wenn in der Darstellung des Anspruches $B_{PO}(T)$ gemäß Gl. (3.128) mit $(V(T)e^{-\nu_1}, I(T)e^{-\nu_2})$ anstelle von $(V(T), I(T))$ und mit $(\nu_1, \nu_2) \in \{0\} \times \mathbb{R}_+$ der Schattenpreisvektor $(\hat{\nu}_1, \hat{\nu}_2) = (0, 0)$ gewählt wird.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

(b.1) Ausgelastete Kapazitäten beim Zulieferer:

Wie in *Fall 2.1* bereits ausgeführt, muss die betrachtete Unternehmung ihrem Zulieferer für die Einräumung der Preisoption den Wert einer Kaufoption auf das Vorprodukt $I(T)$ mit Basispreis I_h bezahlen, sofern für die eingeräumte Option anderweitig einsetzbare Kapazitäten gebunden werden. Subtrahiert man somit den Wert $h^E_{Call}(I; I_h)$ von $h^1_{\bar{B}_{PO};brutto}$ bzw. $h^2_{\bar{B}_{PO};brutto}$, verbleibt der Unternehmung höchstens $h^E_{Call}(V, I)$ — ausgehend von $h^2_{\bar{B}_{PO};brutto}$ sogar weniger — als Gegenwartswert der Realoption *mit* optionaler Preisgarantie. Dies war jedoch bereits der Wert der Realoption *ohne* diese Preisgarantie. In der gerade betrachteten Situation bringt eine Preisoption folglich keinen zusätzlichen Wertbeitrag. Bei einem Leerverkaufsverbot bezüglich $I(.)$ ist sogar eine Minderung des Käuferpreises zu befürchten. In Bezug auf einen vollständigen Markt bzw. einen unvollständigen Markt, dessen Restriktionen jedoch nicht greifen, ist dieses Ergebnis natürlich trivial. Hier ergibt sich ein eindeutiger Preis für jeden Anspruch. Die barwertige Erhöhung des Realoptionswertes in eben dieser Höhe entspricht dem hierfür aufzubringenden Betrag.

Die Situation ausgelasteter, d.h. knapper Kapazitäten liegt insbesondere dann vor, wenn der Zulieferer bezüglich seines Endproduktes ($I(.)$) keinen Marktbeschränkungen unterliegt. In diesem Fall nämlich konkurriert ein möglicher Absatz des Produktes über die Preisoption mit einer alternativen Verwendung auf dem Markt. Insbesondere könnte der Zulieferer anstelle der Verpflichtung gegenüber dem betrachteten Unternehmen eine Lieferverpflichtung gegenüber einem (sonstigen) Marktteilnehmer in Gestalt eines Leerverkaufes von $I(.)$ eingehen und auf diese Weise seine Produktionsmöglichkeit veräußern.

(b.2) Zusätzlich aufbaubare Kapazitäten beim Zulieferer:

Als zweite Konstellation wird nun die Situation von speziell für die Preisoption erstellbaren Kapazitäten beim Zulieferer untersucht. Die Erfüllung der Lieferverpflichtung bewirkt dann für den Zulieferer keine Einbuße im sonstigen Absatz seiner Produkte. Allerdings bedingt die Übernahme der Stillhalterverpflichtung und der damit verbundene Aufbau zusätzlicher Produktionskapazitäten seitens des Zulieferers finanzielle Aufwendungen, die er sich von seinem Kunden erstatten lässt. Die grundsätzliche Verfügbarkeit neuer, zweckgerichteter Produktionskapazitäten ist insbesondere dann gegeben, wenn keine konkurrierende Nachfrage nach ihnen besteht. Dies kann angenommen werden, wenn dem Zulieferer wegen der einzuräumenden Preisoption kein Zusatzauftrag entgeht. Der Zulieferer befinde sich folglich in einer Situation, in der die Möglichkeit, weitere Aufträge, d.h. Lieferverpflichtungen, über den Status quo hinaus einzugehen, nicht besteht. Dadurch ist er hinsichtlich seines Endproduktes einer Leerverkaufsrestriktion unterworfen. Gleichzeitig sei — wie nachfolgend verdeutlicht wird — der Zulieferer nicht bereit, auf Vorrat zu produzieren und sich einem (zusätzlichen) Absatzrisiko auszusetzen. Im Einzelnen sollen die folgenden Annahmen erfüllt sein.

Ergänzende Annahmen zum Zulieferer:

1. Speziell aufgrund der Stillhalterverpflichtung in der Preisoption baut der Zulieferer Produktionskapazitäten auf, wodurch ihm in $t = 0$ barwertig eine Auszahlung in Höhe von $A > 0$ entsteht, welche ihm jedoch von seinem Kunden, der betrachteten Unternehmung, vergütet wird. Ohne die Stillhalterverpflichtung und die Erstattung der Anschaffungsauszahlung für die Kapazitätserweiterung wären somit in $t = T$ Kapazitäten zur Erstellung des Produktwertes $I(T)$ — über den sonstigen Absatz hinaus — nicht vorhanden. A beinhaltet hierfür die Barwerte sämtlicher mit der Kapazitätserweiterung anfallenden Zahlungen, einschließlich solcher, welche am Ende der Nutzung für die Stilllegung von Produktionsanlagen anfallen.

2. Der Zulieferer unterliegt einer *Leerverkaufsrestriktion* bezüglich seines Endproduktes $I(.)$. Hinsichtlich seines Vorproduktes befindet er sich auf einem vollständigen Markt. Dessen Wertentwicklung wird durch die noch zu spezifizierende geometrisch Brown'sche Bewegung $I^L(.)$ beschrieben.

3. Der Zulieferer ist nicht bereit, eine positive Wahrscheinlichkeit für einen Verlust aus seinem Engagement auf sich zu nehmen.

Eine mehrstufige Weiterentwicklung der Vertragsbeziehungen soll nicht erfolgen. Aus diesem Grund wird in der zweiten Zusatzannahme davon ausgegangen, dass für den Zulieferer keine Restriktionen im Handel seines Vorproduktes bestehen. Man kann daran denken, dass ein Terminmarkt für Rohstoffe existiert, auf dem auch ungedeckte Lieferverpflichtungen eingegangen und in ihrer Höhe permanent variiert werden können. Die Erstattung der finanziellen Aufwendungen für die Erweiterung der Produktionskapazität beim Zulieferer durch das betrachtete Unternehmen ist bei dessen Vorteilhaftigkeitskalkül zu berücksichtigen. Dabei ist die Existenz von nicht verschwindenden Erweiterungsaufwendungen per se realitätskonform; sie vermeidet zudem, dass der Zulieferer von sich aus einen „kostenlosen“ Kapazitätsaufbau vornehmen und sich dabei selbst weitere, ggf. unbegrenzt hohe Realoptionen schaffen kann. Bei begrenzter Kapazitätserweiterung würde dies (immer noch) dazu führen, dass die Möglichkeiten der Kapazitätserweiterung vollständig ausgeschöpft würden und damit eine Situation knapper Kapazitäten entstünde. Indem nun aber ein Kapazitätsaufbau nicht mehr „kostenlos“ möglich ist, kann ein isoliertes Investitionsproblem des Zulieferers betrachtet werden, innerhalb dessen er durch Investition des Betrages $A > 0$ selbst eine Kapazitätserweiterung durchführt, die eine Auszahlung in $t = T$ über $\max\left[I(T) - I^L(T), 0\right]$ bringt. Der Zulieferer kann folglich durch Aufbringung von A eine Realoption erwerben. Aus der dritten Zusatzannahme, wonach sich der Zulieferer keinem zusätzlichen Risiko aussetzen möchte, ist für den damit erworbenen Anspruch ein Käuferpreis zu ermitteln. Nach Satz ergibt sich in Verbindung mit dem Leerverkaufsverbot bezüglich $I(.)$ in dieser Hinsicht Folgendes: $\inf_{(\nu_1^z, \nu_2^z) \in \mathbb{R}_+ \times \{0\}} \max\left[I(T)e^{-\nu_1^z} - I^L(T)e^{-\nu_2^z}, 0\right] = 0$, wobei $(\hat{\nu}_1^z, \hat{\nu}_2^z) = (\infty, 0)$ den minimierenden Schattenpreisvektor kennzeichnet und der Vorleistungswertprozess des Zulieferers durch die stochastische Differentialgleichung:

$$dI^L(t) = I^L(t)\left(b_L\,dt + \sigma_L\,dW^L(t)\right) \tag{3.143}$$

mit der Anfangsbedingung $I^L(0) = I^L_0$ beschrieben sein soll. $W^L(.)$ stelle einen Wiener-Prozess dar, der mit dem den Prozess $I(.)$ gemäß Gl. (3.122) konstituierenden Wiener-Prozess $\bar{W}^I(.)$ korreliert sein kann. Eine etwaige Korrelation sei durch den (konstanten) Korrelationskoeffizienten $\rho_{LI} \neq 1$ beschrieben. Ferner kann das Halten der Vorleistung mit laufenden Zahlungen verknüpft sein. Diese werden durch die konstante Dividendenrate δ_L abgebildet. Der Käuferpreis für die aus der Technologie des Zulieferers gegebene Realoption hat den Wert null. Unter Berücksichtigung des für die Kapazitätserweiterung aufzubringenden Betrages A wird der Zulieferer damit von sich aus keine Kapazitätserweiterung vornehmen.

Es ist nunmehr das Auszahlungsprofil zur Preisoption für den Zulieferer zu erstellen. Darin werden sämtliche Zahlungen erfasst, die ihm durch die Einräumung der Preisoption entstehen und vom betrachteten Unternehmen in Gestalt der Optionsprämie (barwertig) zu vergüten sind. Sie sind in Tabelle 3.4 angegeben. Ein Vergleich mit der Situation bei knappen Kapazitäten (Tabelle 3.3) weist für manche Fälle das gleiche Verlust- bzw. Auszahlungsprofil aus; im Fall $I(T) > I_h \;\wedge\; I(T) > I^L(T)$ jedoch ist der Verlust geringer als bei knappen Kapazitäten, da die Lieferung des Produktes an das betrachtete Unternehmen einen anderweitigen Absatz seitens des Zulieferers nicht verhindert. Die Opportunität in Gestalt eines um $I(T) - I^L(T)$ geringeren Erlöses ist folglich nicht anzusetzen. Dadurch entsteht dem Zulieferer bei $I_h > I^L(T)$ sogar noch eine Einzahlung (/negative Einbuße). Eine weitere Einzahlung ergibt sich bei $I(T) \leq I_h \;\wedge\; I(T) > I^L(T)$. Durch die zusätzlich geschaffene Kapazität wird dem Zulieferer im Fall einer Nicht-Inanspruchnahme aus der Preisoption eine Produktion für den (sonstigen) Markt möglich. Kann folglich der Zulieferer aufgrund seiner Technologie einen positiven Deckungsbeitrag erwirtschaften, fällt ihm dieser zu, wenn der Produktpreis unter dem Basispreis der Preisoption liegt.

Damit sich der Zulieferer durch die Einräumung der Preisoption nicht schlechter als im Status quo stellt, müssen ihm der Gegenwartswert der in Tabelle 3.4 wiedergegebenen Zahlungen, berechnet als Verkäuferpreis, sowie der fixe Auszahlungsbetrag A für die Kapazitätserweiterung vergütet werden. Die Bestimmung eines Verkäuferpreises unter Einbeziehung sämtlicher Zahlungen des Zulieferers erweist sich allerdings als schwierig. Deshalb wird der Verkäuferpreis dadurch nach oben abgeschätzt, dass der Erlös, den der Zulieferer im Falle der Nicht-Ausübung der Preisoption durch eine Verwertung der nunmehr freien Kapazitäten für eine Marktproduktion erhält, das vom betrachteten Unternehmen zu Vergütende nicht mindert. D.h. die Einzahlung in Höhe von $I(T) - I^L(T)$ in der Situation $I^L(T) < (\leq) I(T) \leq I_h$ soll nicht in die Bemessung der Prämie für die Preisoption eingehen. Mit dieser Abschätzung geht der Zulieferer eine Stillhalterposition ein, welche durch

Tabelle 3.4

Verlustprofil der Preisoption aus Sicht des Zulieferers ohne Verdrängung einer alternativen Produktion

Fall	Einbuße (Aufwendung) durch Verpflichtung $t = 0$	$t = T$
1. $I(T) > I_h$	Inanspruchnahme aus Preisoption	
1.1 $I(T) > I^L(T)$	Prod.-Prozess des Zulieferers ist konkurrenzfähig	
	A	$I^L(T) - I_h$
1.2 $I(T) \leq I^L(T)$	Zulieferer kauft Vorprodukt zu $I(T)$ am Markt	
	A	$I(T) - I_h$
2. $I(T) \leq I_h$	Preisoption wird nicht ausgeübt	
2.1 $I(T) > I^L(T)$	Zulieferer produziert mit zusätzlicher Kapazität für Markt	
	A	$I^L(T) - I(T)$
2.2 $I(T) \leq I^L(T)$	Prod.-Prozess des Zulieferers ist nicht konkurrenzfähig	
	A	0

den folgenden Anspruch beschrieben ist — der für die Kapazitätserweiterung aufzubringende Betrag wird später berücksichtigt:

$$
\begin{aligned}
& \left(I^L(T) - I_h\right) \mathbf{1}_{\{I(T) \geq I_h \wedge I(T) \geq I^L(T)\}} + (I(T) - I_h)\, \mathbf{1}_{\{I(T) \geq I_h \wedge I^L(T) \geq I(T)\}} \\
\sim\ & \left(\min\left[I(T), I^L(T)\right] - I_h\right) \mathbf{1}_{\{I(T) \geq I_h\}} =: \breve{B}^{Z;fK}(T) \qquad (3.144) \\
\sim\ & \max\left[\min\left[I(T), I^L(T)\right] - I_h, 0\right] - \max\left[I_h - I^L(T), 0\right] \mathbf{1}_{\{I(T) \geq I_h\}} \\
& =: B^{Z;fK}(T). \qquad (3.145)
\end{aligned}
$$

Für den Zulieferer, welcher sich bezüglich $I(.)$ einem Leerverkaufsverbot gegenübersieht und sich bezüglich $I^L(.)$ auf einem vollständigen Markt befindet, ist ein Verkäuferpreis für den Anspruch $B^{Z;fK}(T)$ zu bestimmen. Hierfür wird der äquivalente Anspruch $\breve{B}^{Z;fK}(T)$ gemäß Gl. (3.144) durch:

$$
\breve{B}^{Z;fK;'}(T) := \left(\min\left[I(T), I^L(T)\right] - I_h\right) \mathbf{1}_{\{I(T) > I_h\}}
$$

vernachlässigbar modifiziert. Dieser Anspruch repräsentiert eine Funktion von $I(T)$ und $I^L(T)$, welche die Voraussetzungen für die Anwendung des Satzes erfüllt[500]. Es ist nun leicht zu sehen, dass der Verkäuferpreis für diesen Anspruch mit dem Preis auf einem vollständigen Markt übereinstimmt[501], so dass auch der gesuchte Verkäuferpreis für den Anspruch $B^{Z;fK}(T)$ dem Preis dieses Anspruches auf einem vollständigen Markt entspricht.

[500] Die Modifikation besteht in einer Zahlung, der eine Punkt-Eintrittswahrscheinlichkeit von null zuzuordnen ist. Die durch diesen Anspruch repräsentierte Funktion wird dadurch „lower semi-continuous"; vgl. Fn. 373, S. 207.

[501] Hierfür ist $\sup_{(\nu_1^z, \nu_2^z) \in \mathbb{R}_+ \times \{0\}} \left[\left(\min\left[I(T)e^{-\nu_1^z}, I^L(T)e^{-\nu_2^z}\right] - I_h\right) \mathbf{1}_{\{I(T)e^{-\nu_1^z} > I_h\}}\right]$ zu ermitteln. Maximierend ist der Schattenpreisvektor $(\hat{\nu}_1^z, \hat{\nu}_2^z) = (0, 0)$.

Somit ist der Gegenwartswert der Stillhalterverpflichtung $h_{BZ;fK}$ auf Basis der Gl. (3.145) nun wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} h_{BZ;fK} \quad = \quad & \underbrace{E_0\left[e^{-rT}\max\left[\min\left[I(T), I^L(T)\right] - I_h, 0\right]\right]}_{=h_{Call}^{E;min}(I,I^L;I_h)} \\ & - \underbrace{E_0\left[e^{-rT}\max\left[I_h - I^L(T), 0\right]\mathbf{1}_{\{I(T)\geq I_h\}}\right]}_{=:h_{Put}^{E;up}(I^L;I;I_h)}. \end{aligned}$$

Hierbei tritt ein Optionstyp auf, welcher als *up-add Cross-Verkaufsoption* (bzw. *up-add Cross-Put*) bezeichnet wird[502]; die betrachtete Option diesen Typs wird auch kurz als *Cross-Verkaufsoption* oder *Cross-Put* bezeichnet. Das Auszahlungsprofil der Option entspricht dem Anspruch:

$$B_{CP}(T) := \max\left[I_h - I^L(T), 0\right]\mathbf{1}_{\{I(T)\geq I_h\}}. \tag{3.146}$$

Dieser Anspruch beinhaltet, wie bei einem gewöhnlichen Put, eine Auszahlung in Höhe der Differenz zwischen einem Basispreis I_h und dem Wert des Underlyings $I^L(T)$. Die Auszahlung der Differenz hängt aber nicht nur vom Wert des Underlyings im Vergleich zu diesem Basispreis, analog einem gewöhnlichen Put, oder einem anderen Basispreis, wie bei einer Gap-Option[503], ab. Für die Optionsausübung ist zudem noch das Vorzeichen der Differenz zwischen einem vom Prozess des Underlyings verschiedenen stochastischen (Referenz-)Prozess $I(.)$ — von daher die Bezeichnung „Cross“ — und dem Basispreis maßgebend. Da im vorliegenden Fall die Option nur im Geld endet, wenn dieser Prozess im Ausübungszeitpunkt einen Wert größergleich und nicht kleiner als der Basispreis aufweist, ist der Zusatz „up“ angefügt. Die Bedingung für eine im Fälligkeitszeitpunkt positive Auszahlung der Option ist folglich, dass sowohl der Wert des Underlyings als auch der des Referenzprozesses jeweils größer als der Basispreis ist. Da damit die Option auch bezüglich des Underlyings im Geld sein muss, erhält die Option den Zusatz „add“. Um den dem Zulieferer zu vergütenden Wert $h_{BZ;fK}$ angeben zu können, ist somit neben dem Wert einer „Minimum“-Kaufoption $h_{Call}^{E;min}(I, I^L; I_h)$ auch der Wert des Cross-Put zu ermitteln.

Es gilt dann:

$$h_{BZ;fK} = h_{Call}^{E;min}(I, I^L; I_h) - h_{Put}^{E;up}(I^L; I; I_h),$$

wobei

- hinsichtlich des Wertes des „Minimum“-Calls $h_{Call}^{E;min}(I, I^L; I_h)$ die in Anhang 5.6.1 hergeleitete Formel (Gl. (5.87)) herangezogen werden kann, bei welcher der Prozess $V(.)$ durch den Prozess $I^L(.)$ zu ersetzen ist;

[502] Vgl. zur Einführung dieses Optionstyps *Knobloch* (2003), S. 182.
[503] Vgl. zur Charakterisierung und zur Wertfunktion einer Gap-Option *Korn/Korn* (1999), S. 178 f.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

- der Wert der Cross-Verkaufsoption gegeben ist durch:

$$h_{Put}^{E;up}(I^L;I;I_h) = I_h e^{-rT}\Phi^{(-\rho_{LI})}(d_1,d_2) - I_0^L e^{-\delta_L T}\Phi^{(-\rho_{LI})}(d_3,d_4) \qquad (3.147)$$

mit

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\sigma_L\sqrt{T}}\left[\ln\frac{I_h}{I_0^L} - (r-\delta_L-\tfrac{1}{2}\sigma_L^2)T\right], \\ d_2 &= \frac{1}{\bar{\sigma}_I\sqrt{T}}\left[\ln\frac{I_0}{I_h} + \left(r-\delta_I-\tfrac{1}{2}\bar{\sigma}_I\right)T\right], \\ d_3 &= \frac{1}{\sigma_L\sqrt{T}}\left[\ln\frac{I_h}{I_0^L} - (r-\delta_L+\tfrac{1}{2}\sigma_L^2)T\right], \\ d_4 &= \frac{1}{\bar{\sigma}_I\sqrt{T}}\left[\ln\frac{I_0}{I_h} + \left(r-\delta_I-\tfrac{1}{2}\bar{\sigma}_I^2+\rho_{LI}\sigma_L\bar{\sigma}_I\right)T\right]. \end{aligned}$$

Die Herleitung der Bewertungsgleichung (3.147) für die Cross-Verkaufsoption wird in Anhang 5.6.3 angegeben.

Damit hat das betrachtete Unternehmen für die Einräumung der optionalen Preisgarantie dem Zulieferer den Betrag:

$$h_{PO;fK;Z} = A + h_{BZ;fK}$$

in $t = 0$ zu bezahlen. Ausgehend von den Gl. (3.141) bzw. (3.142) ergibt sich für die betrachtete Unternehmung ein Gesamtwert der Realoption (unter Berücksichtigung des Erwerbs der Preisoption) von:

$$\begin{aligned} h^1_{PO;netto} &= h^1_{\bar{B}_{PO};brutto} - (A + h_{BZ;fK}) \\ &= h^E_{Call}(V,I) + h^E_{Call}(I;I_h) - A - h^{E;min}_{Call}(I,I^L;I_h) + h^{E;up}_{Put}(I^L;I;I_h) \end{aligned} \qquad (3.148)$$

bzw.

$$\begin{aligned} h^2_{PO;netto} &= h^2_{\bar{B}_{PO};brutto} - (A + h_{BZ;fK}) \\ &= h^E_{Call}(V,I) + h^{E;min}_{Call}(V,I;I_h) - A \\ &\quad - h^{E;min}_{Call}(I,I^L;I_h) + h^{E;up}_{Put}(I^L;I;I_h), \end{aligned} \qquad (3.149)$$

wobei vorzugsweise vom zweiten Term auszugehen ist, da er eine Untergrenze des Realoptionswertes für den Fall eines Leerverkaufsverbotes bezüglich $I(.)$ für das betrachtete Unternehmen beinhaltet. $h^1_{PO;netto}$ entspricht demgegenüber dem Optionswert auf einem diesbezüglich vollständigen Markt (zugleich Obergrenze für den Optionswert bei einem Leerverkaufsverbot). Da jedoch für den Zulieferer ein Leerverkaufsverbot bezüglich $I(.)$ unterstellt und allgemein nach einem „Mindest"-Optionswert gesucht wird, sollte dies auch für das betrachtete Unternehmen angenommen werden.

Somit lohnt sich der Erwerb einer Preisoption vom Zulieferer im Sinne einer Erhöhung des Käuferpreises der Realoption für die betrachtete Unternehmung, wenn

$$h^1_{PO;netto} > h^E_{Call}(V,I) \text{ bzw.} \qquad (3.150)$$

$$h^2_{PO;netto} > h^E_{Call}(V,I) \qquad (3.151)$$

gilt. Im extremen Fall, dass das Vorprodukt des Zulieferers für diesen (nahezu) umsonst zu haben ist, kann der sich aus Gl. (3.150) ableitende Vorteil näherungsweise bestimmt werden über die folgende Grenzbetrachtung:

$$_{\triangle}h^1 := \lim_{I_0^L \to 0} \left(h^1_{PO;netto} - h^E_{Call}(V, I) \right);$$

zu Gl. (3.151) ergibt sich der Ausdruck:

$$_{\triangle}h^2 := \lim_{I_0^L \to 0} \left(h^2_{PO;netto} - h^E_{Call}(V, I) \right).$$

Unterstellt man vereinfachend $\rho_{LI} = 0$, so folgt:

$$_{\triangle}h^1 = h^E_{Call}(I; I_h) - A + I_h h^{digital}_{Call}(I; I_h). \quad (3.152)$$

$$_{\triangle}h^2 = h^{E;min}_{Call}(V, I; I_h) - A + I_h h^{digital}_{Call}(I; I_h). \quad (3.153)$$

($h^{digital}_{Call}(I; I_h)$ steht für den Gegenwartswert eines „digitalen" Calls, der durch den Anspruch $B^{digital}(T) := \mathbf{1}_{I(T) \geq I_h}$ gekennzeichnet ist[504].) Die Grenzbetrachtung für $_{\triangle}h^1$ nach Gl. (3.152) kann wie folgt interpretiert werden: Die Summe $h^E_{Call}(I; I_h) + I_h h^{digital}_{Call}(I; I_h)$ zeigt den Wert eines bedingten Anspruches, welcher der betrachteten Unternehmung den Wert $I(T)$ für den Fall verspricht, dass $I(T) > I_h$ ist. Letzteres bedeutet, dass die Preisoption im Geld ist. Das betrachtete Unternehmen erhält somit in den Ausübungssituationen der Preisoption sein Vorprodukt gleichsam „umsonst"; d.h., die Technologie des Zulieferers wird dem betrachteten Unternehmen kostenlos zur Verfügung gestellt. (Dies beinhaltet allerdings die Übernahme der finanziellen Aufwendungen für die Kapazitätserweiterung seitens des betrachteten Unternehmens in $t = 0$.) In den Fällen, in denen die Preisoption nicht ausgeübt wird, hat die betrachtete Unternehmung keinen Vorteil gegenüber der Situation ohne optionale Preisgarantie. Bei der Interpretation von $_{\triangle}h^2$ nach Gl. (3.153) ist zu berücksichtigen, dass sich aufgrund der hierbei vorgenommenen Abschätzung die Vorteilhaftigkeit der Preisoption dadurch vermindert, dass zumindest in Bezug auf den unmittelbar beim betrachteten Unternehmen selbst realisierten Vorteil lediglich für denjenigen Fall eine Ausübung der Preisoption unterstellt wird, dass der Erwerb der Vorleistung im eigenen Produktionsprozess sinnvoll eingesetzt werden kann.

Falls sich allgemein in einer der durch die Bedingungen (3.150) bzw. (3.151) gegebenen Konstellationen der Wert der Realoption durch die Preisoption erhöht, ist dies darauf zurückzuführen, dass sich das betrachtete Unternehmen den Technologievorteil seines Zulieferers zunutze machen kann. Denn bei der Ermittlung des Verkäuferpreises seitens des Zulieferers sind lediglich dessen Aufwendungen berücksichtigt, nicht jedoch eine Opportunität in Gestalt des von ihm bei einem sonstigen Absatz am Markt zu erzielenden Deckungsbeitrages. (Besonders deutlich wird dies bei der gerade angestellten Grenzbetrachtung.) Eine Ausnahme hiervon bildet die vorgenommene *Abschätzung* bei

[504] Vgl. insbesondere zur Bewertung *Korn/Korn* (1999), S. 177 f.

der Ermittlung dieses Verkäuferpreises. Dieser wird nämlich nicht durch einen Erlös gemindert, den der Zulieferer aus der Verwendung der zusätzlichen Kapazitäten im Falle der Nicht-Ausübung der Preisoption realisiert. Ein solcher Erlös fällt somit unmittelbar dem Zulieferer zu. Darüber hinaus beschreibt die ermittelte Höhe der Wertsteigerung der Realoption beim betrachteten Unternehmen den Spielraum für Verhandlungen zwischen ihm und seinem Zulieferer. $h^1_{PO;netto}$ bzw. $h^2_{PO;netto}$ repräsentieren, abgesehen von der angesprochenen Abschätzung, eine *Obergrenze* für den letztlich bei der betrachteten Unternehmung verbleibenden Vorteil. Denn sicherlich möchte der Zulieferer nicht den gesamten Technologievorteil, über den er verfügt, seinem Kunden überlassen. Der Spielraum muss allerdings in Preisverhandlungen über die optionale Preisgarantie ausgelotet werden, da das betrachtete Unternehmen keinen Einblick in die Kostenstruktur seines Zulieferers haben wird und dem Zulieferer seinerseits ggf. Marktdaten in Bezug auf den Output $V(.)$ fehlen.

Die *Zusammenfassung* der Ergebnisse dieses Abschnittes zeigt bezüglich der zugrunde liegenden Realoption in Verbindung mit einer Preisoption gegenüber dem Zulieferer Folgendes:

- Unterliegt die betrachtete Unternehmung Handelsbeschränkungen im eigenen Output (*Fall 1*), stellen sich ausschließlich triviale Wertgrenzen ein, sofern die Beschränkungen restriktiv wirken. Dies trifft zunächst auf einen unvollständigen Markt i.e.S. bzgl. $V(.)$ zu: Ein nach oben unbegrenztes Gewinnpotential führt dazu, dass die Unternehmung keinen endlichen Verkäuferpreis anbieten wird. Besteht demgegenüber lediglich ein Leerverkaufsverbot bzgl. $V(.)$ wäre die Unternehmung bereit, ihre Produktionsmöglichkeit abzutreten, da sie mit dem Erlös alternativ am Markt ihren bisher optierten Output erwerben könnte. Die Absicherungsmöglichkeit in der Vorleistung $I(.)$ bestimmt den Preis, den sie hierfür verlangen müsste. Hinsichtlich des Käuferpreises führt die Gefahr, dass der Output wertlos wird, in diesem Fall jedoch dazu, dass ein potentieller Käufer, welcher sich keinem Verlust-Risiko aussetzen möchte, die Realoption nicht erwerben wird. Voraussetzung wäre nämlich, dass er als neuer Eigentümer der Unternehmung (oder zumindest der Realoption) eine komplementäre Wertentwicklung in seiner Long-Optionsposition und der zur Finanzierung des Erwerbs aufgebauten Verschuldung erreichen könnte. Hierfür allerdings wäre ein Leerverkauf von $V(.)$ nötig.

- Für die Situation eines vollständigen Marktes im eigenen Produkt und eines unvollständigen Marktes i.e.S. in der Vorleistung (*Fall 2.1*) weist eine isolierte Betrachtung der im Mittelpunkt stehenden Unternehmung wiederum triviale Wertgrenzen auf. Durch den Aspekt der lediglich *differenzierten Unvollständigkeit*, nach welcher für den Zulieferer der Vorleistung andere Marktrestriktionen als für die betrachtete Unternehmung gelten, wird für diesen ein vollständiger Markt bzgl. $I(.)$ oder zumindest eine gemilderte Marktbeschränkung in Form eines Leerverkaufsverbotes unterstellt. In einer solchen Konstellation ist ein Vertrag zwischen dem betrachteten Unternehmen und seinem Zulieferer konstruierbar, der, je nach den zugrunde liegenden Werten für die Prozessparameter, zu einem (echt) positiven Käuferpreis für die Realoption aus Sicht der Unternehmung führt, ohne dass der Zulieferer ein Risiko auf sich nehmen müsste. Es wird gezeigt, dass eine Preisoption, in der sich der Zulieferer zur Lieferung des Vorproduktes gegen einen festgelegten Basispreis verpflichtet, diese Forderung erfüllt. Der Zulieferer hat für die Übernahme der Stillhalterposition einen Verkäuferpreis für diese Preisoption vor dem Hintergrund *seiner* Marktgegebenheiten zu bestimmen und einzufordern. Dem betrachteten Unternehmen bleibt ein Wert, welcher durch den Ausdruck $\Delta_{PO}(V_0, I_0; \hat{I}_h)$ [gemäß Gl. (3.137)] gekennzeichnet wurde und die Erhöhung seines Käuferpreises für die Realoption beinhaltet. Hierbei wurde bereits eine Gestaltung des Basispreises, somit der Preisoption, vorausgesetzt, die auf einen maximalen Wert der Realoption führt und insofern optimiert ist.

- Ebenfalls auf einem in Bezug auf das eigene Produkt vollständigen, in Bezug auf die Vorleistung allerdings nur durch ein Leerverkaufsverbot charakterisierten Markt (*Fall 2.2*) ergibt sich bei der Ermittlung des Käuferpreises kein Unterschied zu einem generell restriktionslosen Markt; d.h., das Leerverkaufsverbot wirkt bei der Ermittlung des Käuferpreises nicht wertmindernd. Abseits einer Untersuchung der Wirkung differenzierter Unvollständigkeit wird auch auf einem dergestalt spezifizierten Markt die Bedeutung einer Preisoption untersucht. Hierbei kann sich eine Erhöhung des Realoptionswertes ergeben, falls die Einräumung der Preisoption für den Zulieferer keine Beeinträchtigung seines sonstigen Absatzes mit sich bringt. (Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn er nicht bereit ist, eigene finanzielle Mittel für einen Kapazitätsaufbau bei existentem Absatzrisiko einzusetzen, um sich selbst eine Realoption zu „erwerben".) Der Rahmen für eine Werterhöhung der Realoption beim betrachteten Unternehmen erweist sich allerdings als eng. Er ist durch die Bedingungen (3.150) bzw. (3.151) charakterisiert. Letztlich besteht die Wirkung der Preisoption in dieser Situation darin, dass der Zulieferer „seine Technologie", welche in der Transformation seines Vorproduktes in sein Endprodukt besteht, dem betrachteten Unternehmen zur Verfügung stellt.

4. Schlussbetrachtung

Auf einem idealisierten Kapitalmarkt, der durch homogene Erwartungen und gleichen Zugang der Marktteilnehmer sowie durch vollkommene Transparenz und die Nicht-Existenz von Transaktionskosten gekennzeichnet ist, wird der Wert einer Option durch verschiedene Determinanten bestimmt. Dazu gehören ihr Auszahlungsprofil, die zeitliche Ausübungsbedingung sowie die Handelbarkeit relevanter Wertpapiere des Kapitalmarktes und die Präferenzen des Bewertenden, welcher als Käufer oder Verkäufer des Anspruches auftritt[505]. Auf einem vollständigen Kapitalmarkt, dessen Kennzeichen der unrestringierte Handel in den vorhandenen Wertpapieren und darüber hinaus die Verfügbarkeit einer für die Duplikation des Anspruches hinreichenden Anzahl von Kapitalmarktinstrumenten ist, reduzieren sich die Anforderungen an die Präferenzen auf die Nicht-Sättigung der Investoren. Denn auf diesem Kapitalmarkt kann ein arbitragefreier Optionspreis ermittelt werden. Die spezifischeren Nutzenvorstellungen des Investors erlangen allerdings dann auf vollkommenen und vollständigen Kapitalmärkten Entscheidungsrelevanz, wenn es darum geht eine nutzenoptimale Portfolio-/Entnahme-Strategie zu bestimmen. Die hierzu vorliegenden Ansätze fußen gleichwohl wieder auf einer idealisierten Kapitalmarktwelt, in welcher bis dato Steuern vernachlässigt worden sind. Im *zweiten Kapitel* werden die grundlegenden Ansätze, ausgehend von *Merton* (1969, 1971), deshalb um die Effekte der Besteuerung ergänzt. Konkret wird ein (einfaches) Steuersystem zugrunde gelegt, welches eine zeitkontinuierliche Besteuerung sämtlicher Vermögenszuwächse sowie eine unmittelbare Steuererstattung im Verlustfall auf Basis eines konstanten Steuersatzes st unterstellt. Die Reaktion eines Investors, dem eine logarithmische Nutzenfunktion oder — bei deterministischen Koeffizientenprozessen — eine solche des „power type“ zuzuordnen ist, besteht unter diesem Steuerregime bei Anwendung des Erwartungsnutzenkonzeptes in einer risikoreicheren Portfolio-Strategie, nach der die im Vor-Steuer-Fall zu wählenden Portfolio-Gewichte der riskanten Wertpapiere mit dem Faktor $\frac{1}{1-st}\,(>1)$ zu multiplizieren sind[506]. Für den Fall deterministischer Koeffizientenprozesse gilt dies sogar allgemein.

Das *dritte Kapitel* ist Investitionsentscheidungen auf unvollständigen Märkten gewidmet. Bezüglich der Portfolio-Optimierung unter diesen nicht-idealen

[505] Vgl. *Knobloch* (2003), S. 160.

[506] Der beschriebene Effekt setzt allerdings voraus, dass ein gleiches Vermögen für die Portfolio-Strukturierung zugrunde liegt.

Marktbedingungen — in Teilen auch hinsichtlich der Bewertung bedingter Ansprüche — folgt die Darstellung methodisch vor allem dem Dualansatz auf Basis der Martingalmethode. Bei diesem werden die Kursprozesse der Wertpapiere des unvollständigen Kapitalmarktes durch die Einführung je eines (mehrdimensionalen) Schattenpreisprozesses aus einer bestimmten Menge modifiziert; ggf. wird der Kapitalmarkt auch durch fiktive Wertpapiere ergänzt. Hierdurch wird zu jedem zulässigen Schattenpreisprozess ein fiktiv vollständiger Kapitalmarkt generiert. Der Optimierungskalkül des a priori vollständigen Kapitalmarktes wird dann auf jeden fiktiv vollständigen Kapitalmarkt angewendet. Die Menge zulässiger Schattenpreisprozesse wird hierbei bestimmt durch die Restriktionen, denen der originäre Kapitalmarkt unterliegt. Diese sind in Bezug auf die Anteile formuliert, oder zumindest formulierbar, welche die Positionen der riskanten Wertpapiere am Vermögen des Investors besitzen (Portfolio-Prozess in Relativbeträgen). Sie können in Leerverkaufsbeschränkungen, der Nicht-Handelbarkeit von Wertpapieren, in Verschuldungsbeschränkungen des Investors u.v.a.m. bestehen. Im Ergebnis wird aus der Menge fiktiver Kapitalmärkte ein Markt — und damit auch ein Schattenpreisprozess — ausgewählt, so dass der entstehende Portfolio-Prozess im Originalmarkt die geforderten Restriktionen und ein Zielkriterium erfüllt. Die Bestimmung dieses Portfolio-Prozesses erweist sich jedoch als nicht triviale Aufgabe.

Hinsichtlich des *Problems der Portfolio-Optimierung* liegen explizite Ausdrücke für die — bezüglich der Maximierung des Erwartungsnutzens aus Endvermögen und/oder Entnahmen — optimalen Portfolio-Prozesse zu logarithmischen Nutzenfunktionen und, bei deterministischen Parameterprozessen in Bezug auf die Kapitalmarktpapiere, auch zu Nutzenfunktionen des „power type" vor. In diesen Fällen sind zudem explizite Bedingungen für die optimalen Schattenpreisprozesse vorhanden. Gleichwohl ist hierbei die Bestimmung eines optimalen Schattenpreisprozesses nicht für beliebige Restriktionen unmittelbar möglich. Je nach Restriktion ist ein weiteres, nachgelagertes Optimierungsproblem zu lösen. Die vorliegende Arbeit beinhaltet in diesem Kontext die folgenden Erweiterungen: Die Menge der im Schrifttum zu findenden, operational definierten Restriktionen wird ergänzt um den Fall, dass *sowohl* ein Leerverkaufsverbot in den riskanten Wertpapieren *als auch* eine obere Schranke des Verschuldungsgrades für den Investor bestehen (*Abschnitt 3.2*). Sowohl für diese kombinierte Restriktion als auch für die Bedingung, dass sich die Portfolio-Gewichte riskanter Wertpapiere stets in einem vorgegebenen Intervall bewegen müssen (Intervall-Fall), werden zum nachgelagerten Optimierungsproblem der Bestimmung eines optimalen Schattenpreisprozesses notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen angegeben und soweit ausgewertet, dass in der Folge eine algorithmische Lösung angegeben werden kann (*Abschnitt 3.3.2.2*). Damit ist eine implementierbare Bestimmung optimaler Portfolio-Prozesse unter den beschriebenen Rahmenbedingungen möglich. Für den Intervall-Fall ist darüber hinaus eine Implementation des

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Berechnungs-Algorithmus in das Maple-Programm des Anhangs 5.5.1 eingebettet. In seiner Gesamtheit ist dieses Programm jedoch der Behandlung einer speziellen Problemstellung gewidmet. Es beinhaltet hierbei die exemplarische Umsetzung eines Vorschlages zur Lösung eines Problems der Investitionsrechnung, welches in der optimalen Strukturierung der Beteiligungsverhältnisse in einem Konzern besteht (*Abschnitt 3.3.2.3*). In Bezug auf die — üblicherweise — nicht beliebig vermehrbaren bzw. auszuweitenden Konzernunternehmen sind hierbei lediglich fixierte Beteiligungsquoten oder, bei Börsennotierung der Konzernunternehmen, solche in einem endlichen Intervall (nicht negativer Werte) möglich. Im Unterschied zum zuvor genannten Intervall-Fall bezieht sich hierbei die Restriktion für jedes Konzernunternehmen nicht auf einen Anteil am Vermögen des Investors, sondern am Gesamtwert des zu handelnden Objektes. In Bezug auf den Anteil am Investorvermögen entspricht dies einer sich stochastisch entwickelnden Restriktionendefinition, welche mit dem gegenwärtig verfügbaren Instrumentarium nicht hinreichend behandelt werden kann. Es wird deshalb eine myopische und insofern heuristische Lösung des Strukturierungsproblems vorgeschlagen, welche im Grunde der wiederholten Lösung eines statischen Problems entspricht; Letzteres wird für den Fall einer logarithmischen Nutzenfunktion nachgewiesen. Darüber hinaus zeigt sich — unter geeigneter Spezifikation der Modellparameter — der bereits für den vollständigen Kapitalmarkt festgestellte Effekt einer Besteuerung, welcher sich in einer tendenziell risikoreicheren Anlagepolitik widerspiegelt.

Die den unvollständigen Kapitalmarkt kennzeichnende beschränkte Handelbarkeit der zur Duplikation eines bedingten Anspruches notwendigen Kapitalmarktpapiere bewirkt, dass, ohne weitere Spezifikation der Nutzenvorstellungen des Investors, ein eindeutiger Optionspreis nicht mehr angegeben werden kann. Für die *Bewertung bedingter Ansprüche* unter diesen Marktverhältnissen bieten sich grundsätzlich zwei Auswege an: Zum einen kann der „Wunsch“ nach Eindeutigkeit eines Optionspreises zugunsten der Beibehaltung weitgehend allgemein gehaltener Präferenzen aufgegeben werden, zum anderen können die Nutzenvorstellungen spezifiziert werden, so dass sich für den Bewertenden eine subjektive Eingrenzung des Optionspreises, i.d.R. bis zu dessen Eindeutigkeit, ergibt. In Bezug auf den zweiten Fall ist auch ein Kriterium, bspw. in Gestalt der Risikominimierung, möglich, welches, wenngleich mit ihr verbunden, an die Stelle der primären Nutzenorientierung tritt. Das Schrifttum hat in beide Richtungen Ansätze entwickelt, die in *Abschnitt 3.3.3* dargestellt und besprochen sind. Eindeutige Optionspreise werden zum einen mit Ansätzen auf Basis investorspezifischer Nutzenfunktionen und zum anderen aus Hedgingansätzen entwickelt. Demgegenüber werden bei allgemein gehaltenen Präferenzen der Investoren Preisintervalle formuliert, die auf der Arbitragefreiheitsbedingung oder auf so genannten „good-deal asset bounds“ beruhen. Letztere gehen daraus hervor, dass gewisse Konstellationen von Wertpapierpreisen am Markt, wie bspw. extreme Rendite-Risiko-Charakteristika von Wertpapieren, als sofort „arbitragiert“ und folglich als nicht existent betrachtet werden. Die „unbeständigen“ Marktverhältnisse müssen allerdings nicht notwendig Arbitragemöglichkeiten im üblichen Sinne implizieren. Im Rahmen der Darstellung der auf der Arbitragefreiheit beruhenden Preisintervalle werden ergänzende Spezialisierungen für den Fall einer indizierten Kaufoption angegeben. Für Standardrestriktionen, wie das Verbot von Aktien-Leerverkäufen oder die grundsätzliche Nicht-Handelbarkeit von Wertpapieren, beinhalten diese Preisintervalle lediglich triviale Grenzen. Je nachdem, ob es sich um europäische oder amerikanische Optionen (mit nicht negativem Auszahlungsprofil) handelt, impliziert dies im Besonderen Intervalluntergrenzen von null oder dem Wert bei sofortiger Ausübung sowie eine Obergrenze von unendlich. Falls die Restriktionen in eine Richtung nicht binden, können auch die Optionswerte des vollständigen Kapitalmarktes diejenigen des unvollständigen eingrenzen.

Dies gibt Anlass, um vor dem Hintergrund der Interpretation der indizierten europäischen Kaufoption als spezielle Realoption eine neue Form der Marktunvollständigkeit und ihre Implikation für die arbitragefreie Bepreisung von bedingten Ansprüchen zu untersuchen (*Abschnitt 3.3.4*). Die Option beschreibt die Möglichkeit, den Wert des Underlyings $V(T)$ gegen Zahlung des Wertes des Basispreises $I(T)$ zu erwerben. Das Underlying repräsentiert für das die Option innehabende Unternehmen den Ertragswert seines (End-)Produkterlöses, während der Basispreis den auf den Ausübungszeitpunkt T bezogenen Ertragswert der für die Produktion aufzubringenden Vorleistungen darstellt. Sowohl der Wert des Underlyings im Fälligkeitszeitpunkt der Option als auch jener des Basispreises ergeben sich jeweils aus dem sich für diesen Zeitpunkt einstellenden Wert einer geometrisch Brown'schen Bewegung. In Bezug auf diese Option wird nun ein *differenziert unvollständiger* Markt betrachtet, auf welchem die Marktbeschränkungen Leerverkaufsverbot und Unvollständigkeit i.e.S., wobei für Letztere die Nicht-Handelbarkeit eines Gutes/Wertpapieres kennzeichnend ist, zusammen mit der Marktvollständigkeit für die in der Option referenzierten Objekte in unterschiedlicher Weise auf die Marktteilnehmer zutreffen können. Als relevante Marktteilnehmer sind hierbei das Unternehmen, welches sich im Besitz der Realoption befindet, sowie dessen Zulieferunternehmen zu erkennen. Der Zulieferer verfügt analog über eine Realoption in Gestalt einer indizierten europäischen Kaufoption mit derselben Fälligkeit, wobei der Vorleistungswertprozess $I(.)$ des betrachteten Unternehmens dem Prozess des Endproduktwertes des Zulieferers entspricht und dieser zu dessen Realisierung seinerseits den Wert seiner Vorleistungen $(I^L(.))$ aufzubringen hat. Für sich gesehen, ergeben sich bei der Bestimmung von Intervallen arbitragefreier Optionspreise wiederum triviale Wertgrenzen für die Realoptionen von betrachtetem Unternehmen und dessen Zulieferer. Mit dem Fokus auf den minimalen arbitragefreien Wert der Realoption des betrachteten Unternehmens kann dies modifiziert werden, indem das Unternehmen von seinem Zulieferer eine *Preisoption* erwirbt. Die Preisoption beinhaltet das Recht, die Vorleistung zu einem spezifizierten Preis I_h im Fälligkeitszeitpunkt der genuinen Realoption zu beziehen. Im Falle, dass sich das betrachtete Unternehmen bezüglich seines Endproduktes auf einem vollständigen, hinsichtlich seiner Vorleistung jedoch auf einem unvollständigen Markt i.e.S. befindet, kann der Abschluss einer solchen Preisoption mit dem Zulieferer zu einem positiven Minimal-Wert der Realoption führen, welcher unter der gegebenen Fallgestaltung ansonsten bei null liegt. Der sich hierbei beim betrachteten Unternehmen einstellende Wert entspricht mindestens demjenigen einer europäischen Kaufoption auf das Underlying mit Wert $V(.)$ und Basispreis I_h, wie er sich auf einem vollständigen Markt einstellt. Seitens des Zulieferers ist zunächst vorauszusetzen, dass dieser sich hinsichtlich seines Endproduktes (= Vorprodukt des betrachteten Unternehmens) auf einem vollständigen Markt befindet oder sich allenfalls einem Leerverkaufsverbot gegenübersieht; ferner wird zur Komplexitätsreduktion angenommen, dass der Zulieferer hinsichtlich seiner Vorleistungen keinen Marktrestriktionen unterliegt. Soll der Zulieferer durch die Einräumung der Preisoption keinem Risiko ausgesetzt sein, ist ihm in $t = 0$ der Wert einer europäischen Kaufoption auf den Wert des Prozesses $I(.)$ in $t = T$ mit Basispreis I_h zu vergüten. Ergibt sich nun eine positive Differenz zwischen den beschriebenen Optionswerten, so liegt der Fall vor, dass das betrachtete Unternehmen vom Zulieferer eine Preisoption erwerben kann und dabei insgesamt eine Steigerung des Mindestwertes seiner Realoption, mithin überhaupt einen positiven Wert für diese, erreicht. Damit liegt zudem ein sich allein auf Arbitrageüberlegungen stützender Erklärungsansatz für Zulieferer-Kunden-Verträge vor.

Der Mindestwert der Realoption des betrachteten Unternehmens kann auch dann gesteigert werden, wenn sich dieses in Bezug auf sein (End-)Produkt auf einem vollständigen Markt befindet und sich bezüglich seines Vorproduktes einem Leerverkaufsverbot gegenübersieht oder wenn anstelle Letzterem ein vollständiger Markt vorliegt. Obwohl bei einer derartigen Fallgestaltung der Mindestwert der Realoption stets dem Optionswert auf einem vollständigen Markt entspricht, kann die Kostenstruktur des Zulieferers eine Wertsteigerung beim betrachteten Unternehmen ermöglichen, ohne dass jener ein Risiko zu tragen hätte. Diese Situation liegt vor, wenn durch die Einräumung der Preisoption der sonstige Absatz des Zulieferers nicht berührt wird und der Gegenwartswert der Aufwendungen für die Erfüllung der Leistungsverpflichtung aus der Preisoption vom betrachteten Unternehmen abgegolten wird. Bei geeigneten Wertverhältnissen wird dann der Mindest-Optionswert angehoben (Bedingung (3.150) bzw. Bedingung (3.151)). Auch in den hierdurch charakterisierten Fällen kommt es durch die vertragliche Beziehung zwischen Zulieferer und Abnehmer somit zu einer Steigerung des Mindestwertes der Realoption, mithin der Untergrenze für den Gesamtwert des Abnehmer-Unternehmens.

Es kann resümiert werden: Die Ermittlung von Optionspreisen auf unvollständigen Kapital- bzw. Gütermärkten bewirkt eine (weitere) Annäherung an reale Verhältnisse. Da das Arbitrageargument sowohl hinsichtlich der Bepresung bedingter Ansprüche als auch bezüglich der optimalen Strukturierung von Portfolien letztlich nur stichhaltig ist, wenn tatsächlich die notwendigen (Gegen-)Positionen eingenommen werden können, kommt einer Abbildung von Markthemmnissen und damit einer realitätsgetreueren Darstellung der Handels- und der dadurch induzierten Replikationsmöglichkeiten eine nicht zu unterschätzende Rolle zu. Allerdings ist der Übergang auf den unvollständigen Markt mit einer gewissen Ernüchterung verbunden. Der eindeutige, in Bezug auf Investorpräferenzen weitgehend unabhängige Optionspreis existiert nicht mehr. Eine Preisfindung ist, sofern rechnerisch überhaupt zu bewerkstelligen, allenfalls noch mit Hilfe eines subjektiv geprägten Kriteriums und, wie die verschiedenen hierfür vorliegenden Ansätze verdeutlichen, in nicht unstrittiger Weise möglich. Zudem liegt eine operational formulierte Portfolio-Optimierung nach dem Erwartungsnutzenkonzept nur für bestimmte Verbindungen aus Restriktion, Marktprozessgestalt sowie Nutzenvorstellung des Investors vor.

5. Anhang

5.1 Zur Portfolio-Optimierung auf einem vollständigen Kapitalmarkt bei deterministischen Koeffizienten

Die folgende Darstellung beschreibt die Herleitung von Gl. (2.97) sowie eines Ausdruckes für eine die PDE (2.88) lösende Wertfunktion. Zugrunde liegt der Beweis in *Karatzas/Shreve* (1998), S. 118-131, der durch die Berücksichtigung der Vermögensbesteuerung modifiziert wird. In den hiervon nicht betroffenen Teilen wird auf diese Quelle lediglich verwiesen. Letztlich bedeutet die Einführung der Besteuerung eine Änderung des risikolosen Zinsprozesses von $r(.)$ auf $(1-st)r(.)$, allerdings ohne Modifikation bei der Bildung des Prozesses $\theta(.)$, so dass die Abänderung nur als unwesentlich gegenüber dem zitierten Originalbeweis zu betrachten ist. Der vollständigen Herleitung wegen werden die sich ergebenden Anpassungen jedoch explizit angegeben, wobei manche Schritte ausführlicher als in der angeführten Quelle dargestellt werden.

Hinsichtlich der Koeffizientenfunktionen und der zugrunde liegenden Nutzenfunktion(en) wird Folgendes vorausgesetzt, wobei hier, wo nicht kongruent, zudem die Koeffizienten-Bedingungen für die Existenz des zu steuernden Prozesses im Rahmen der Anwendung der stochastischen Steuerung erfüllt sein sollen[507]:

- Für die Koeffizientenfunktionen:
  $r(.), \theta(.)$ und $\sigma(.)$ sind deterministisch und auf $[0,T]$ stetig. Ferner $\exists\, k_1, k_2 > 0$ und $\rho \in (0,1)$, so dass $\forall t, t_1, t_2 \in [0,T]$ gilt:

$$|r(t_1) - r(t_2)| \leq k_1 |t_1 - t_2|^\rho, \; \|\theta(t_1) - \theta(t_2)\| \leq k_1 |t_1 - t_2|^\rho \text{ und } k_2 \leq \|\theta(t)\|.$$

- Für die Nutzenfunktionen:
  $\exists\, \gamma_1, \gamma_2 > 0$, so dass die folgenden polynomialen Wachstumsbedingungen gelten:

$$\begin{array}{rcll} I_1(t,y) & \leq & \gamma_1 + y^{-\gamma_1}, & \forall (t,y) \in [0,T] \times (0,\infty), \\ I_2(y) & \leq & \gamma_1 + y^{-\gamma_1}, & \forall y \in (0,\infty), \\ U_1(t, I_1(t,y)) & \geq & -\gamma_2 - y^{-\gamma_2}, & \forall (t,y) \in [0,T] \times (0,\infty), \\ U_2(I_2(y)) & \geq & -\gamma_2 - y^{-\gamma_2}, & \forall y \in (0,\infty). \end{array}$$

[507] Vgl. S. 57.

Ferner gibt es zu jedem $y_0 \in (0,\infty)$ Konstanten $\epsilon(y_0)$, $k(y_0) > 0$ und $\rho(y_0) \in (0,1)$, so dass:

$$\begin{aligned}|I_1(t,y) - I_1(t,y_0)| \quad &\leq \quad k(y_0)|y-y_0|^{\rho(y_0)} \\ &\qquad \forall (t,y) \in [0,T] \times ((0,\infty) \cap (y_0 - \epsilon(y_0), y_0 + \epsilon(y_0))),\end{aligned}$$

und es gilt: Entweder ist $\forall t \in [0,T]$ $\frac{\partial}{\partial y} I_1(t,y)$ definiert und strikt negativ für alle y auf einem Intervall mit positivem Maß oder dies gilt für $I_2'(y)$.

Die polynomialen Wachstumsbedingungen an die Nutzenfunktion und ihre Inverse sollen im Folgenden noch für logarithmische und Nutzenfunktionen des „power type“, deren Bedeutung in *Abschnitt 2.2.3.1* herausgestellt wurde, überprüft werden. Die Darstellung knüpft an die in Beispiel 2.5[508] hergeleiteten Funktionen an, wobei o.B.d.A. lediglich die Funktionen für den Konsum betrachtet werden müssen. Generell seien $t \in [0,T]$, $k > 0$ vorausgesetzt. Zu untersuchen ist ferner $y \in (0,\infty)$.

Für eine *logarithmische Nutzenfunktion* gilt:

$$U_1(t,x) = e^{-kt} \ln x, \quad I_1(t,y) = e^{-kt}\frac{1}{y}.$$

Damit ist unmittelbar:

$$I_1(t,y) = e^{-kt}\frac{1}{y} \leq 1 + y^{-1},$$

so dass die erste Wachstumsbedingung mit $\gamma_1 = 1$ erfüllt ist. Ferner gilt:

$$U_1(t, I_1(t,y)) = e^{-kt} \ln\left(e^{-kt}\frac{1}{y}\right) = e^{-kt}(-kt - \ln y) \geq -kt - \ln y.$$

Mit $\gamma_2 = \max(kT, 1)$ gilt die zweite geforderte Wachstumsbedingung:

$$-kt - \ln y \geq -\max(kT,1) - y^{\max(kT,1)}.$$

Für eine *Nutzenfunktion vom „power type“* gilt:

$$U_1(t,c) = e^{-kt}\frac{1}{\beta}c^\beta, I_1(t,y) = e^{\frac{kt}{\beta-1}} y^{\frac{1}{\beta-1}}, \quad \beta < 1, \beta \neq 0.$$

Wähle $\gamma_1 = \frac{1}{1-\beta}$, dann ist:

$$I_1(t,y) = e^{-\frac{kt}{1-\beta}} y^{-\frac{1}{1-\beta}} \leq y^{-\frac{1}{1-\beta}} = y^{-\gamma_1} \leq \gamma_1 + y^{-\gamma_1}.$$

Darüber hinaus ist:

$$U_1(t, I_1(t,y)) = e^{-kt}\frac{1}{\beta}\left(e^{-\frac{kt}{1-\beta}} y^{-\frac{1}{1-\beta}}\right)^\beta = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{kt}{1-\beta}} y^{-\frac{\beta}{1-\beta}}.$$

[508] Vgl. S. 96.

Für $\beta \in (0,1)$ gilt $U_1(t, I_1(t,y)) \geq 0$, so dass lediglich der Fall $\beta < 0$ zu untersuchen ist. Hierfür wird $a := -\frac{1}{\beta} > 0$ und $b := 1 - \beta > 1$ gesetzt. Ferner sei $d := ab = -\frac{1}{\beta}(1-\beta) = -\frac{1}{\beta} + 1 > 1$. Dann ist:

$$U_1(t, I_1(t,y)) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{kt}{1-\beta}} y^{-\frac{\beta}{1-\beta}} \geq -a y^{\frac{1}{ab}}.$$

Es sei nun $g := d + c$ mit $c \geq 0$, dann gilt:

1. Fall: $y \in (0,1]$

$$-a y^{\frac{1}{ab}} \geq -ab \geq -g - y^{-g}.$$

2. Fall: $y > 1$

Sei $y_1 > 1$ fest. Wähle $c_1 > 0$, so dass:

$$-a y^{\frac{1}{ab}} \geq -ab - c_1, \quad \forall y \in (1, y_1].$$

Die Ungleichung gilt dann auch für alle $\bar{c}_1 \geq c_1$. Wähle $c_2 > 0$, so dass:

$$a \leq y^{c_2} \;\Leftrightarrow c_2 \geq \log_y a, \quad \forall y \in (y_1, \infty).$$

Diese Ungleichung gilt analog für alle $\bar{c}_2 \geq c_2$. Wähle nun $c := \max(c_1, c_2)$ und $\gamma_2 := g = d + c = ab + c$, dann ist wegen $y^{\frac{1}{d}} \leq y^d$:

$$-a y^{\frac{1}{ab}} \geq -\gamma_2 y^{\gamma_2}, \quad \forall y \in (0, \infty).$$

Für logarithmische Nutzenfunktionen und solche vom „power type“ sind die hier gestellten Anforderungen somit erfüllt, wobei die übrigen Voraussetzungen vergleichsweise einfach nachzuvollziehen sind. Die polynomialen Wachstumsbedingungen implizieren auch, dass die im Zusammenhang der Herleitung der *Hamilton-Jacobi-Bellman*-Gleichung formulierten Voraussetzungen erfüllt sind (vgl. S. 57); insbesondere ist dabei zu beachten, dass $I_1(t,y), I_2(y) > 0$ gilt, ferner dass $U_1(t, I_1(t,y)), U_2(I_2(y))$ auch polynomial nach oben beschränkt sind[509]. Hinsichtlich der Voraussetzungen an die Koeffizientenfunktionen, die die Existenz einer Lösung der stochastischen Differentialgleichung für den zu steuernden Prozess garantieren, sei auch auf die dortigen Prämissen hingewiesen.

Zur Herleitung von Gl. (2.97):

Aus Gl. (2.92) werden die folgenden äquivalenten Darstellungen für die Funktion $\mathcal{X}^{st}(.,.)$ gebildet ($y \in \mathbb{R}_{++}$, $t \in [0,T]$):

$$\begin{aligned} &\mathcal{X}^{st}(t,y) \\ &= \frac{1}{y} E\left[\int_t^T Y_{st}^{(t,y)}(s) I_1(s, Y_{st}^{(t,y)}(s))\, ds + Y_{st}^{(t,y)}(T) I_2(Y_{st}^{(t,y)}(T))\right] \end{aligned} \tag{5.1}$$

[509] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 120.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

$$
\begin{aligned}
= \quad & E_0 \left[\int_t^T e^{-(1-st)\int_t^s r(u)\,du} I_1(s, Y_{st}^{(t,y)}(s))\,ds \right. \\
& \left. + e^{-(1-st)\int_t^T r(u)\,du} I_2(Y_{st}^{(t,y)}(T)) \right]. \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

Nunmehr wird eine Funktion $u(t,\eta)$ betrachtet, die folgendes Problem löst:

$$
\begin{aligned}
u_t(t,\eta) + \frac{1}{2}\|\theta(t)\|^2 u_{\eta\eta}(t,\eta) + \Big(\frac{1}{2}\|\theta(t)\|^2 & \\
-(1-st)r(t)\Big)\, u_\eta(t,\eta) - (1-st)r(t)u(t,\eta) &= -I_1(t,e^\eta)\ (0 \le t < T, \eta \in \mathbb{R}) \qquad (5.3) \\
u(T,\eta) &= I_2(e^\eta),\ \eta \in \mathbb{R}. \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

Eine solche Funktion $u(.,.)$ aus $C^{1,2}([0,T) \times \mathbb{R})$, die zudem stetig auf $[0,T] \times \mathbb{R}$ ist, existiert[510]. Ferner besitzt sie geeignete Konvergenz- und Beschränktheitseigenschaften. Mit dem Satz von Itô gilt dann unter Rückgriff auf Gl. (2.91):

$$
\begin{aligned}
& d\left[e^{-(1-st)\int_t^s r(u)\,du} u(s, \ln Y_{st}^{(t,y)}(s))\right] \\
&= -(1-st)r(s)e^{-(1-st)\int_t^s r(u)\,du} u(s, \ln Y_{st}^{(t,y)}(s))\,ds + e^{-(1-st)\int_t^s r(u)\,du} \\
&\quad u_t(s, \ln Y_{st}^{(t,y)}(s))\,ds + e^{-(1-st)\int_t^s r(u)\,du} u_\eta(s, \ln Y_{st}^{(t,y)}(s)) \left[\frac{1}{Y_{st}^{(t,y)}(s)} Y_{st}^{(t,y)}(s)\right. \\
&\quad \left. \left(-(1-st)r(s) + \|\theta(s)\|^2\right) ds - \frac{1}{2\left(Y_{st}^{(t,y)}\right)^2} \left(Y_{st}^{(t,y)}\right)^2 \|\theta(s)\|^2\,ds - \theta'(s)\,dW_0(s)\right] \\
&\quad + e^{-(1-st)\int_t^s r(u)\,du} \frac{1}{2}\|\theta(s)\|^2 u_{\eta\eta}(s, \ln Y_{st}^{(t,y)}(s))\,ds.
\end{aligned}
$$

Mit Gl. (5.3) ergibt sich daraus:

$$
\begin{aligned}
& d\left[e^{-(1-st)\int_t^s r(u)\,du} u(s, \ln Y_{st}^{(t,y)}(s))\right] \\
&= -e^{-(1-st)\int_t^s r(u)\,du} I_1(s, Y_{st}^{(t,y)}(s))\,ds \\
&\quad -e^{-(1-st)\int_t^s r(u)\,du} u_\eta(s, \ln Y_{st}^{(t,y)}(s))\theta'(s)\,dW_0(s). \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Konvergenz- und Beschränktheitseigenschaften der Funktion $u(.,.)$ entfällt bei Integration und Erwartungswertbildung das stochastische Integral auf der linken Seite der vorausgehenden Gleichung und der entste-

[510] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 123.

hende Ausdruck konvergiert in der Weise, dass gilt[511]:

$$\begin{aligned} u(t,\ln y) &= E_0\left[\int\limits_t^T e^{-(1-st)\int_t^s r(u)\,du} I_1(s,Y_{st}^{(t,y)}(s))\,ds \right. \\ &\qquad \left. + e^{-(1-st)\int_t^T r(u)\,du} I_2(Y_{st}^{(t,y)}(T))\right]. \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich mit Gl. (5.2) folgt damit unmittelbar:

$$u(t,\ln y) = \mathcal{X}^{st}(t,y), \tag{5.6}$$

$$\text{so dass} \quad u_\eta(t,\ln y) = \mathcal{X}_y^{st}(t,y)y. \tag{5.7}$$

Damit gilt zunächst, dass $\mathcal{X}^{st}(t,y) \in C^{1,2}([0,T)\times\mathbb{R})$ und stetig auf $[0,T]\times\mathbb{R}$ ist und die folgende partielle Differentialgleichung löst[512]:

$$\begin{aligned} &\mathcal{X}_t^{st}(t,y) + \frac{1}{2}\|\theta(t)\|^2 y^2 \mathcal{X}_{yy}^{st}(t,y) + \big(\|\theta(t)\|^2 \\ &-(1-st)r(t)\big)\, y\mathcal{X}_y^{st}(t,y) - (1-st)r(t)\mathcal{X}^{st}(t,y) = -I_1(t,y)\ (0 \le t < T, y \in \mathbb{R}_{++}) \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\mathcal{X}^{st}(T,y) = I_2(y),\ y \in \mathbb{R}_{++}. \tag{5.9}$$

Darüber hinaus ergibt sich mit den Gl. (5.7) und (5.6) aus Gl. (5.5), die dort für $t = 0$ ausgewertet wird:

$$\begin{aligned} &d\left[e^{-(1-st)\int_0^s r(u)\,du}\mathcal{X}^{st}(s,Y_{st}^{(0,y)}(s))\right] \\ &= -e^{-(1-st)\int_0^s r(u)\,du}\left[I_1(s,Y_{st}^{(0,y)}(s))\,ds + Y_{st}^{(0,y)}(s)\mathcal{X}_y^{st}(s,Y_{st}^{(0,y)}(s))\theta'(s)\,dW_0(s)\right] \end{aligned} \tag{5.10}$$

Integration führt auf die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} &e^{-(1-st)\int_0^t r(u)\,du}\mathcal{X}^{st}(t,Y_{st}^{(0,y)}(t)) + \int\limits_0^t e^{-(1-st)\int_0^s r(u)\,du} I_1(s,Y_{st}^{(0,y)}(s))\,ds \\ &= \mathcal{X}^{st}(0,y) - \int\limits_0^t e^{-(1-st)\int_0^s r(u)\,du} Y_{st}^{(0,y)}(s)\mathcal{X}_y^{st}(s,Y_{st}^{(0,y)}(s))\theta'(s)\,dW_0(s), \end{aligned}$$

welche mit $y = z = \mathcal{Y}^{st}(x)$, unter Berücksichtigung der bereits abgeleiteten Beziehung $Y_{st}^{(0,z)}(t) = \mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t))$ (Gl. (2.95)) sowie den Gl. (2.93) und (2.94), gerade Gl. (2.97) entspricht.

[511] Zum Beweis sei auf *Karatzas/Shreve* (1998), S. 122-125, verwiesen. Dabei wird allerdings für *ebd.*, S. 125, folgende Abschätzung vorgenommen: $1 + 2\int_0^\infty F(b)\,d\left(e^{\epsilon b^2}\right) \le 1 + 2\lim_{b\to\infty} F(b)e^{\epsilon b^2} + 2\int_0^\infty f(b)e^{\epsilon b^2}\,db$, wobei $f(b)\,db = \frac{2}{\sqrt{2\pi\bar{\tau}}}e^{-\frac{b^2}{2\bar{\tau}}}\,db$ und $F(b) = \int_b^\infty f(x)\,dx$. Da für $\epsilon \in (0, \frac{1}{2\bar{\tau}})$ der Grenzwert ebenfalls existiert und das Integral konvergiert, bleiben die weiteren Beweisschritte in der angegebenen Quelle unberührt. (Zu $\bar{\tau}$ vgl. *ebd.*, S. 124.)

[512] Zu beachten ist, dass im Unterschied zu Gl. (5.3) nunmehr nur $dY_{st}^{(t,y)}$ anstelle von $d\frac{1}{Y_{st}^{(t,y)}}$ zugrunde liegt bzw. dass $u_{\eta\eta} = y^2\mathcal{X}_{yy}^{st} + y\mathcal{X}_y^{st}$ ist.

Herleitung eines Ausdruckes für die Wertfunktion $V(.,.)$:
Vorausgesetzt werde die durch die Definitionsgleichung (2.100) eingeführte Funktion $G^{st}(.,.)$. Für diese gilt[513]:

$$G^{st}(t,y) - G^{st}(t,z) = y\mathcal{X}^{st}(t,y) - z\mathcal{X}^{st}(t,z) - \int_z^y \mathcal{X}^{st}(t,\lambda)\,d\lambda.$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{\partial G^{st}(t,y)}{\partial y} = \mathcal{X}^{st}(t,y) + y\mathcal{X}_y^{st}(t,y) - \mathcal{X}^{st}(t,y) = y\mathcal{X}_y^{st}(t,y), \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial^2 G^{st}(t,y)}{\partial y^2} = \mathcal{X}_y^{st}(t,y) + y\mathcal{X}_{yy}^{st}(t,y). \tag{5.12}$$

Es wird wiederum eine Funktion $u(t,\eta) \in C^{1,2}([0,T)\times\mathbb{R})$, stetig auf $[0,T]\times\mathbb{R}$, betrachtet, die jetzt das folgende Problem löst:

$$\begin{aligned} u_t(t,\eta) + \frac{1}{2}\|\theta(t)\|^2 u_{\eta\eta}(t,\eta) & \\ - \left(\frac{1}{2}\|\theta(t)\|^2 + (1-st)r(t)\right) u_\eta(t,\eta) &= -U_1(t, I_1(t,e^\eta))\ (0 \le t < T, \eta \in \mathbb{R}) \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$u(T,\eta) = U_2(I_2(e^\eta)),\ \eta \in \mathbb{R}. \tag{5.14}$$

Analog dem vorausgehenden Beweisabschnitt gilt mit dem Satz von Itô nunmehr unter Rückgriff auf die Gl. (2.90) und (5.13):

$$\begin{aligned} & du(s, \ln Y_{st}^{(t,y)}(s)) \\ &= u_t(s, \ln Y_{st}^{(t,y)}(s))\,ds + \Big((-(1-st)r(s) - \tfrac{1}{2}\|\theta(s)\|^2)\,ds - \theta'(s)\,dW(s)\Big) \\ &\quad u_\eta(s, \ln Y_{st}^{(t,y)}(s))\,ds + \tfrac{1}{2}\|\theta(s)\|^2 u_{\eta\eta}(s, \ln Y_{st}^{(t,y)}(s))\,ds \\ &= -U_1(s, I_1(Y_{st}^{(t,y)}(s)))\,ds - u_\eta(s, \ln Y_{st}^{(t,y)}(s))\theta'(s)\,dW(s), \end{aligned}$$

---

[513] Nach *Karatzas/Shreve* (1998), S. 110, gilt mit den Gl. (2.37) und (2.38), ausgehend von:

$$\begin{aligned} & yI(y) - zI(z) - \textstyle\int_z^y I(\xi)\,d\xi = yI(y) - zI(z) + \int_z^y \tilde{U}'(\xi)\,d\xi \\ &= yI(y) - zI(z) + \tilde{U}(y) - \tilde{U}(z) = U(I(y)) - U(I(z)), \end{aligned}$$

sowie mit Gl. (5.2) Folgendes:

$$\begin{aligned} & G^{st}(t,y) - G^{st}(t,z) = E\left[\textstyle\int_t^T \Big(U_1(s, I_1(s, yY_{st}^{(t,1)}(s)) - U_1(s, I_1(s, zY_{st}^{(t,1)}(s))\Big)\,ds\right. \\ & +U_2(I_2(Y_{st}^{(t,y)}(T)) - U_2(I_2(Y_{st}^{(t,z)}(T))\Big] = E\Big[\textstyle\int_t^T \Big(yY_{st}^{(t,1)}(s)I_1(s, yY_{st}^{(t,1)}(s)) \\ & -zY_{st}^{(t,1)}(s)I_1(s, zY_{st}^{(t,1)}(s)) - \int_{zY_{st}^{(t,1)}(s)}^{yY_{st}^{(t,1)}(s)} I_1(s,\xi)\,d\xi\Big)\,ds + yY_{st}^{(t,1)}(T)I_2(yY_{st}^{(t,1)}(T)) \\ & \left.-zY_{st}^{(t,1)}(T)I_2(zY_{st}^{(t,1)}(T)) - \textstyle\int_{zY_{st}^{(t,1)}(T)}^{yY_{st}^{(t,1)}(T)} I_2(\xi)\,d\xi\right] = y\mathcal{X}^{st}(y) - z\mathcal{X}^{st}(z) - \int_z^y \mathcal{X}^{st}(\lambda)\,d\lambda, \end{aligned}$$

wobei $\int_z^y Y_{st}^{(t,1)}(.)I(\zeta)\,d\zeta$ aus $\int_{zY_{st}^{(t,1)}(.)}^{yY_{st}^{(t,1)}(.)} I(\xi)\,d\xi$ durch Substitution mit $\xi = Y_{st}^{(t,1)}(.)\zeta$ entsteht.

woraus folgt:

$$u(t, \ln y) \quad = \quad E\left[\int_t^T U_1(s, I_1(s, Y_{st}^{(t,y)}(s))\,ds + U_2(I_2(Y_{st}^{(t,y)}(T))\right] = G^{st}(t, y).$$

$G^{st}(.,.)$ löst somit folgendes Problem:

$$\begin{aligned} G_t^{st}(t,y) + \frac{1}{2}\|\theta(t)\|^2 y^2 G_{yy}^{st}(t,y) & \\ -(1-st)r(t)yG_y^{st}(t,y) &= -U_1(t, I_1(t,y))\ (0 \le t < T, y \in \mathbb{R}_{++}) \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$G^{st}(T,y) = U_2(I_2(y)),\ y \in \mathbb{R}_{++}. \tag{5.16}$$

Es werde nun $V(t,x) = G^{st}(t, \mathcal{Y}^{st}(t,x))$ gesetzt. Dann gilt (in Kurzschreibweise) mit den Gl. (2.98) und (5.11):

$$\begin{aligned} V_x &= G_y^{st}\mathcal{Y}_x^{st} = \mathcal{Y}^{st}\mathcal{X}_y^{st}\mathcal{Y}_x^{st} = \mathcal{Y}^{st}, \\ V_{xx} &= \mathcal{Y}_x^{st}, \\ V_t &= G_t^{st} + G_y^{st}\mathcal{Y}_t^{st} = G_t^{st} + \mathcal{Y}^{st}\mathcal{X}_y^{st}\mathcal{Y}_t^{st}. \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in die partielle Differentialgleichung (2.88) für die Wertfunktion ergibt mit $x = X^{st}(t)$:

$$\begin{aligned} G_t^{st}(t, \mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t))) + \mathcal{Y}_t^{st}(t, X^{st}(t))G_y^{st}(t, \mathcal{Y}(t, X^{st}(t))) & \\ +\mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t))(-I_1(t, \mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t)))) + (1-st)r(t)\mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t))X^{st}(t) & \\ -\frac{1}{2}\frac{(\mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t)))^2}{\mathcal{Y}_x^{st}(t, X^{st}(t))}\|\theta(t)\|^2 + U_1(t, I_1(t, \mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t)))) &= 0 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Mit den Gl. (5.15) und (2.98) sowie mit $\mathcal{Y}_t^{st}(t, X^{st}(t))G_y^{st}(t, \mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t))) = \mathcal{Y}_t^{st}(t, X^{st}(t))\mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t)) \quad \mathcal{X}_y^{st}(t, \mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t))) = -\mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t)) \mathcal{X}_t^{st}(t, \mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t)))$, wofür Gl. (5.11) und die Beziehung $\mathcal{X}_t^{st}(.,.) = -\mathcal{Y}_t^{st}(.,.)\mathcal{X}_y^{st}(.,.)$[514] verwendet wurde, ist dies äquivalent zu:

$$\begin{aligned} (1-st)r(t)\mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t))G_y^{st}(t, \mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t))) - \frac{1}{2}\|\theta(t)\|^2(\mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t)))^2 & \\ G_{yy}^{st}(t, \mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t))) - \mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t))\mathcal{X}_t^{st}(t, \mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t))) & \\ +\mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t))I_1(t, \mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t))) + (1-st)r(t)\mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t))X^{st}(t) & \\ -\frac{1}{2}(\mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t)))^2\|\theta(t)\|^2\mathcal{X}_y^{st}(t, \mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t))) &= 0 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Mit Hilfe der Gl. (5.11), (5.12) und wegen $\mathcal{X}^{st}(t, \mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t))) = X^{st}(t)$ lässt

[514] Dies ergibt sich aus $\mathcal{X}^{st}(t, \mathcal{Y}^{st}(t, \bar{x})) = \bar{x}\ (\bar{x} \in (0, \infty))$; vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 122, 130.

sich dies schreiben als:

$$\begin{aligned} & -\mathcal{Y}(t, X^{st}(t))\left[\mathcal{X}_t(t, \mathcal{Y}(t, X^{st}(t)))\right. \\ & +\left(-(1-st)r(t)+\|\theta(t)\|^2\right)\mathcal{Y}(t, X^{st}(t))\mathcal{X}_y(t, \mathcal{Y}(t, X^{st}(t))) \\ & +\frac{1}{2}\|\theta(t)\|^2(\mathcal{Y}(t, X^{st}(t)))^2\mathcal{X}_{yy}(t, \mathcal{Y}(t, X^{st}(t))) \\ & \left.-I_1(t, \mathcal{Y}(t, X^{st}(t)))-(1-st)r(t)\mathcal{X}^{st}(t, \mathcal{Y}^{st}(t, X^{st}(t)))\right] \quad = \quad 0 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Dies ist nach Gl. (5.8) erfüllt. Somit löst $V(t,x) = G(t, \mathcal{Y}^{st}(t,x))$ die partielle Differentialgleichung für die Wertfunktion. Bezüglich der Eindeutigkeit der Lösung sind Wachstumsbedingungen zu erfüllen, bezüglich welcher in *Karatzas/Shreve* (1998), S. 131 f., über die konvexe Dualfunktion $\tilde{V}(.,.)$ zur Wertfunktion Formulierungen gegeben werden.

5.2 Optimalitätsbedingungen im Dualansatz

Gegenstand der folgenden Ausführungen ist der Beweis von Satz 3.2. Da es sich bei diesem Satz lediglich um eine Modifikation des Satzes 3.1 dergestalt, dass dieser auf die für eine Anwendung des Satzes interessierende Aussagenrichtung eingeschränkt und um die Wirkung des Steuersystems $\mathcal{S}$ ergänzt wurde, handelt, kann auf den Beweis in *Cvitanić/Karatzas* (1992)[515] bzw. *Karatzas/Shreve* (1998)[516] zurückgegriffen werden, welcher in den durch die Besteuerung beeinflussten Teilen abzuändern ist.

Angemerkt werden soll, dass aus Gründen einer vereinfachten Notation die Kennzeichnung des Falles einer Konsum- und Endvermögensoptimierung durch das Subskript KE entfällt; eine Ausnahme bildet in dieser Hinsicht die Menge $\mathcal{A}_{KE}(x;K)$, welche von der Menge $\mathcal{A}(x;K)$ unterschieden werden soll.

Im bezeichneten Sinne kann der Beweis zum *Schluss von Aussage 2 auf Aussage 1* unmittelbar aus den angegebenen Quellen übernommen werden; es sind lediglich die nachfolgend aufgeführten Modifikationen vorzunehmen. Die Änderungen knüpfen an den bei *Karatzas/Shreve* (1998)[517] zu findenden Beweisverlauf an; insofern wird auch auf die dort zu findende Symbolik (ohne weitere Erklärung) Bezug genommen. Dabei werden nur die Abweichungen durch das Steuersystem $\mathcal{S}$ gegenüber dem dort bewiesenen Vor-Steuer-Fall angegeben, da eine Wiederholung des gesamten Beweises keinen weiterführenden Erkenntnisgewinn mit sich bringt und aufgrund der Möglichkeit, die angegebene Quelle hinzuzuziehen, unnötig erscheint. Konsequenz dieses Vorgehens ist allerdings, dass hier nur bruchstückhafte Änderungen aufgeführt werden,

[515] Vgl. *ebd.*, S. 777-789.
[516] Vgl. *ebd.*, S. 266 ff., 273 ff.
[517] Vgl. *ebd.*, S. 277-282.

die aus sich heraus unverständlich und kontextlos bleiben müssen, so dass zum Verständnis der Ausgangsbeweis notwendig zu Rate zu ziehen ist[518].

Mit Bezug auf den zitierten Originalbeweis ergeben sich folgende Änderungen bei Berücksichtigung des Steuersystems $\mathcal{S}$: Allgemein tritt der steuerkorrigierte Diskontierungsprozess $S_0^{\nu,st}(.)\,(\nu(.) \in \mathcal{D})$ an die Stelle des Diskontierungsprozesses $S_0^{\nu}(.)\,(\nu(.) \in \mathcal{D})$ mit der Wirkung, dass auch der Zustandspreis-Dichte-Prozess $H_{\nu}^{st}(.)$ statt des Prozesses $H_{\nu}(.)$ zu verwenden ist.

In „Step 2" ergibt sich daraus, dass der Prozess $L(.)$ für das Weitere zu ersetzen ist durch den Prozess:

$$L^{st}(t) := \int_0^t \eta^{st}(s)\,ds,\ t \in [0,T],$$

mit $\eta^{st}(.) := (1-st)\eta(.)$, wobei

$$\eta(s) = \begin{cases} -\zeta(\hat{\nu}(s)), & \text{wenn } \mu(.) = 0, \\ \zeta(\lambda(s)), & \text{wenn } \mu(.) = \hat{\nu}(.) + \lambda(.),\ \text{für ein } \lambda(.) \in \mathcal{D}, \end{cases}$$

zu übernehmen ist und lediglich das in *Karatzas/Shreve* (1998), S. 278, verwendete Symbol ξ durch η ersetzt wird, um eine Doppelbelegung zu vermeiden. Unverändert bleibt der Prozess $N(t) := \int_0^t \left(\sigma^{-1}(s)(\mu(s) - \hat{\nu}(s))\right)'\,dW_{\hat{\nu}}(s)\,(t \in [0,T])$.

Der die Gleichung für den Vermögensprozess $X_{\hat{\nu}}(.)$ bzw. $X_{\hat{\nu}}^{st}(.)$ verwendende „Step 5" lautet nunmehr:

Zu zeigen ist:

$$E\left[\int_0^{\tau_n} H_{\hat{\nu}}^{st}(t) X_{\hat{\nu}}^{st}(t)\left[(1-st)p_{\hat{\nu}}^{st}(t)'(\mu(t) - \hat{\nu}(t)) + \eta^{st}(t)\right]\,dt\right] \geq 0,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{5.20}$$

[518] Entsprechend diesem Vorgehen wird auch im Vor-Steuer-Fall von „Step 4" bei *Karatzas/Shreve* (1998), S. 279 f., abgewichen. An die Stelle der Abschätzung:

$$\tilde{U}_2(yH_{\nu,\epsilon}(T)) - \tilde{U}_2(yH_{\hat{\nu}}(T)) \leq yH_{\hat{\nu}}(T)I_2(ye^{-n}H_{\hat{\nu}}(T))(1 - \Lambda_{\epsilon,n}(T))^+$$

wird von:

$$\tilde{U}_2(yH_{\nu,\epsilon}(T)) - \tilde{U}_2(yH_{\hat{\nu}}(T)) \leq yH_{\hat{\nu}}(T)I_2(ye^{-\epsilon n}H_{\hat{\nu}}(T))(1 - \Lambda_{\epsilon,n}(T))^+$$

und nachfolgend von:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\epsilon}\left[\tilde{U}_2(yH_{\nu,\epsilon}(T)) - \tilde{U}_2(yH_{\hat{\nu}}(T))\right] &\leq Y_{n,2} := K_n y H_{\hat{\nu}}(T) I_2(ye^{-\epsilon n}H_{\hat{\nu}}(T)) \text{ und} \\ \overline{\lim}_{\epsilon \downarrow 0} \tfrac{1}{\epsilon}\left[\tilde{U}_2(yH_{\nu,\epsilon}(T)) - \tilde{U}_2(yH_{\hat{\nu}}(T))\right] &\leq yH_{\hat{\nu}}(T)I_2(yH_{\hat{\nu}}(T))\left[N(\tau_n) + L(\tau_n)\right], \end{aligned}$$

— indem im Exponenten des Argumentes von $I_2(.)$ innerhalb der Definitionsgleichung für $Y_{n,2}$ der Faktor ϵ ergänzt und die in der darauf folgenden Zeile beschriebene Beziehung als Ungleichung und nicht als Gleichung aufgefasst wird — ausgegangen, wobei noch $EY_{n,2} \leq K_n y \mathcal{X}_{\hat{\nu}}(ye^{-\epsilon n})$ statt $EY_{n,2} \leq K_n y \mathcal{X}_{\hat{\nu}}(ye^{-n})$ vorausgesetzt werden soll. Ansonsten wird dem Originalbeweis gefolgt.

wobei τ_n eine in „Step 3“ definierte Stoppzeit ist, für die $\tau_n \uparrow T$ für $n \to \infty$, fast sicher, gilt. Aus Gl. (3.28) für den Vermögensprozess, welche für $\nu(.) = \hat{\nu}(.)$ mit den hierzu optimalen Prozessen $c_{\hat{\nu}}^{st}(.)$ und $p_{\hat{\nu}}^{st}(.)$ für $t \in [0, T]$ in Differentialform gegeben ist durch:

$$d\left(\frac{X_{\hat{\nu}}^{st}(t)}{S_0^{\hat{\nu},st}(t)}\right) + \frac{c_{\hat{\nu}}^{st}(t)}{S_0^{\hat{\nu},st}(t)}\,dt = (1-st)\frac{X_{\hat{\nu}}^{st}(t)}{S_0^{\hat{\nu},st}(t)}p_{\hat{\nu}}^{st}(t)'\sigma(t)\,dW_{\hat{\nu}}(t),$$

folgt:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{X_{\hat{\nu}}^{st}(t)}{S_0^{\hat{\nu},st}(t)}(L^{st}(t)+N(t))\right) \quad = \quad & \frac{X_{\hat{\nu}}^{st}(t)}{S_0^{\hat{\nu},st}(t)}(dL^{st}(t)+dN(t)) \\ & +(L^{st}(t)+N(t))d\left(\frac{X_{\hat{\nu}}^{st}(t)}{S_0^{\hat{\nu},st}(t)}\right) \\ & +(1-st)\frac{X_{\hat{\nu}}^{st}(t)}{S_0^{\hat{\nu},st}(t)}p_{\hat{\nu}}^{st}(t)'(\mu(t)-\hat{\nu}(t))\,dt. \end{aligned}$$

Integration dieser Gleichung bis zur Stoppzeit τ_n sowie Erwartungswertbildung unter Zugrundelegung des über die Stoppzeit τ_n und den Maßwechselprozess $Z_{\hat{\nu}}(.)$ über $P_{\hat{\nu},n}(A) := E[Z_{\hat{\nu}}(\tau_n)1_A]$ $(\forall A \in \mathcal{F}_T)$ definierten Wahrscheinlichkeitsmaßes $P_{\hat{\nu},n}$ liefert:

$$\begin{aligned} & E\left[\int_0^{\tau_n} H_{\hat{\nu}}^{st}(t)X_{\hat{\nu}}^{st}(t)\left[(1-st)p_{\hat{\nu}}^{st}(t)'(\mu(t)-\hat{\nu}(t))+\eta^{st}(t)\right]\,dt\right] \\ & = E\left[(L^{st}(\tau_n)+N(\tau_n))H_{\hat{\nu}}^{st}(\tau_n)X_{\hat{\nu}}^{st}(\tau_n)+\int_0^{\tau_n} H_{\hat{\nu}}^{st}(t)(L^{st}(t)+N(t))c_{\hat{\nu}}^{st}(t)\,dt\right]. \end{aligned}$$

Mit Gl. (3.35), welche wegen des *Optional-Sampling-Theorems* (Satz 2.3) auch angewendet auf die Stoppzeit τ_n gilt, ist:

$$\begin{aligned} & E\left[\int_0^{\tau_n} H_{\hat{\nu}}^{st}(t)X_{\hat{\nu}}^{st}(t)\left[(1-st)p_{\hat{\nu}}^{st}(t)'(\mu(t)-\hat{\nu}(t))+\eta^{st}(t)\right]\,dt\right] \\ & = E\left[(L^{st}(\tau_n)+N(\tau_n))\left(\int_{\tau_n}^T H_{\hat{\nu}}^{st}(t)c_{\hat{\nu}}^{st}(t)\,dt + H_{\hat{\nu}}^{st}(T)\xi_{\hat{\nu}}(T)\right)\right. \\ & \quad \left. + \int_0^{\tau_n} H_{\hat{\nu}}^{st}(t)(L^{st}(t)+N(t))c_{\hat{\nu}}^{st}(t)\,dt\right]. \end{aligned}$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung gemäß (dem hier nicht wiedergegebenen) „Step 4“ nicht negativ ist, gilt auch im Nach-Steuer-Fall die Beziehung (5.20).

Für das Weitere kann auf „Step 6“ der angegebenen Quelle verwiesen werden, wobei von folgender Ungleichung auszugehen ist:

$$E\left[\int_0^{\tau_n} H_{\hat{\nu}}^{st}(t)X_{\hat{\nu}}^{st}(t)\left[(1-st)p_{\hat{\nu}}^{st}(t)'\lambda(t)+\underbrace{(1-st)\zeta(\lambda(t))}_{=\eta^{st}(t)}\right]\,dt\right],\ n=1,2,\ldots$$

und $\lambda(.) \in \mathcal{D}$ einen progressiv messbaren Prozess bezeichnet, für den (fast immer, fast sicher) insbesondere gilt: $p(t) \in K \Leftrightarrow \lambda(t) = 0$ und $p(t) \notin K \Leftrightarrow \zeta(\lambda(t)) + p'(t)\lambda(t) < 0$ für $t \in [0, T]$, wobei $p(.) = p_{\hat{\nu}}^{st}(.)$ zu setzen ist[519].

[519] Vgl. *Karatzas/Shreve* (1998), S. 207 (Lemma 5.4.2).

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Dem *Schluss von Aussage 1 auf Aussage 2 und Aussage 3* liegt der Beweis in *Karatzas/Shreve* (1998), S. 267 f., 274, zugrunde, welcher unter Einbeziehung der Besteuerung wie folgt lautet:

Es wird zunächst gezeigt, dass fast sicher, fast immer gilt:

$$X_\nu^{x,c,p;st}(t) \geq X^{x,c,p;st}(t),\ t \in [0,T], \tag{5.21}$$

mit beliebigen $(c,p) \in \mathcal{A}_{KE}(x;K)$ und $\nu(.) \in \mathcal{D}$, wobei im Folgenden z.T. wiederum auf die Kennzeichnung der zugrunde liegenden Prozess-Parameter x, c, p verzichtet und kurz $X_\nu^{st}(.)$ für $X_\nu^{x,c,p;st}(.)$ und $X^{st}(.)$ für $X^{x,c,p;st}(.)$ geschrieben wird. Die aufgeführten Vermögensprozesse werden nun einheitlich in Bezug auf den Wiener-Prozess $W_0(.)$ betrachtet. Der Prozess $X^{st}(.)$ ist durch Gl. (2.70) gegeben und lautet als Vermögensprozess, diskontiert mit $S_0^{st}(.)$, in Bezug den Portfolio-Prozess in Relativbeträgen wie folgt:

$$\frac{X^{st}(t)}{S_0^{st}(t)} = x - \int_0^t \frac{c(s)}{S_0^{st}(s)}\,ds + (1-st)\int_0^t \frac{X^{st}(s)}{S_0^{st}(s)} p'(s)\sigma(s)\,dW_0(s),\ t \in [0,T]. \tag{5.22}$$

Der Vermögensprozess $X_\nu^{st}(.)$ ist in Differentialform zunächst durch Gl. (3.27) gegeben, die der Einfachheit halber wiederholt wird, wobei $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
dX_\nu^{st}(t) &= -c(t)\,dt + (1-st)\big(X_\nu^{st}(t)p_0(t)r_\nu(t)\,dt \\
&\quad + X_\nu^{st}(t)p'(t)\left((b_\nu(t)+\delta(t))\,dt + \sigma(t)\,dW(t)\right)\big) \\
\Leftrightarrow\ dX_\nu^{st}(t) &= -c(t)\,dt + (1-st)\big(X_\nu^{st}(t)p_0(t)(r(t)+\zeta(\nu(t)))\,dt \\
&\quad + X_\nu^{st}(t)p'(t)\left((b(t)+\nu(t)+\zeta(\nu(t))+\delta(t))\,dt + \sigma(t)\,dW(t)\right)\big) \\
\Leftrightarrow\ dX_\nu^{st}(t) &= -c(t)\,dt + (1-st)X_\nu^{st}(t)\left((r(t)+\zeta(\nu(t)))\,dt\right. \\
&\quad \left. + p'(t)\left((b(t)+\nu(t)+\delta(t)-r(t)\mathbf{1}_n)\,dt + \sigma(t)\,dW(t)\right)\right).
\end{aligned}$$

Im Folgenden wird der Prozess $\frac{X_\nu^{st}(.)}{S_0^{st}(.)}$, also der mit dem Diskontierungsprozess (nach Steuern) des Originalmarktes diskontierte Vermögensprozess des Schattenmarktes, benötigt. Unter Beachtung von $dS_0^{st}(t) = (1-st)S_0^{st}(t)r(t)\,dt$ ($t \in [0,T]$), so dass $d\frac{1}{S_0^{st}(t)} = -(1-st)\frac{1}{S_0^{st}(t)}r(t)\,dt$ gilt, ergibt sich mit Itô's Lemma für $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{X_\nu^{st}(t)}{S_0^{st}(t)}\right) &= \frac{1}{S_0^{st}(t)}\big(-c(t)\,dt + (1-st)X_\nu^{st}(t)\left((r(t)+\zeta(\nu(t)))\,dt\right. \\
&\quad \left. + p'(t)\left((b(t)+\nu(t)+\delta(t)-r(t)\mathbf{1}_n)\,dt + \sigma(t)\,dW(t)\right)\right)\big) \\
&\quad - X_\nu^{st}(t)(1-st)\frac{1}{S_0^{st}(t)}r(t)\,dt \\
&= -\frac{c(t)}{S_0^{st}(t)}\,dt + \frac{X_\nu^{st}(t)}{S_0^{st}(t)}(1-st)\big((\zeta(\nu(t)) + p'(t)\nu(t))\,dt \\
&\quad + p'(t)(b(t)+\delta(t)-r(t)\mathbf{1}_n) + p'(t)\sigma(t)\,dW(t)\big).
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Mit Bezug auf den Prozess $W_0(.)$, für den nach Gl. (2.23) $W_0(t) = W(t)$

$+\int_0^t \theta(s)\,ds$ ($t \in [0,T]$) gilt, lautet die Gleichung für den Vermögensprozess:

$$\frac{X_\nu^{st}(t)}{S_0^{st}(t)} = x - \int_0^t \frac{c(s)}{S_0^{st}(s)}\,ds + \int_0^t \frac{X_\nu^{st}(s)}{S_0^{st}(s)}(1-st)\left[(\zeta(\nu(s)) + p'(s)\nu(s))\,ds + p'(s)\sigma(s)\,dW_0(s)\right]. \quad (5.24)$$

Betrachtet wird nun der folgende Prozess:

$$\Delta^{st}(t) = \frac{X_\nu^{st}(t) - X^{st}(t)}{S_0^{st}(t)} = \int_0^t d\Delta^{st}(s),\ t \in [0,T], \quad (5.25)$$

also die Differenz zwischen dem Vermögen im Schattenpreis- und demjenigen im Originalmarkt, diskontiert mit dem Diskontierungsprozess (nach Steuern) des Originalmarktes. Aus dem Vergleich der Gleichungen (5.22) und (5.24) ergibt sich (durch Differenzenbildung) für $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}\Delta^{st}(t) &= \int_0^t \Delta^{st}(s)(1-st)\left[(\zeta(\nu(s)) + p'(s)\nu(s))\,dt + p'(s)\sigma(s)\,dW_0(t)\right]\\ &\quad + \int_0^t \frac{X^{st}(s)}{S_0^{st}(s)}(1-st)(\zeta(\nu(s)) + p'(s)\nu(s))\,ds\end{aligned}$$

und somit:

$$\begin{aligned}d\Delta^{st}(t) &= \Delta^{st}(t)(1-st)\left[(\zeta(\nu(t)) + p'(t)\nu(t))\,dt + p'(t)\sigma(t)\,dW_0(t)\right]\\ &\quad + \frac{X^{st}(t)}{S_0^{st}(t)}(1-st)(\zeta(\nu(t)) + p'(t)\nu(t))\,dt.\end{aligned}$$

Darüber hinaus wird der Prozess $J^{st}(.)$ wie folgt für $t \in [0,T]$ gebildet:

$$J^{st}(t) = e^{-(1-st)\int_0^t p'(s)\sigma(s)\,dW_0(s) + \frac{1}{2}(1-st)^2\int_0^t \|\sigma'(s)p(s)\|^2\,ds - (1-st)\int_0^t(\zeta(\nu(s)) + p'(s)\nu(s))\,ds} > 0,$$

was auf die Differentialform:

$$\begin{aligned}dJ^{st}(t) &= J^{st}(t)\left(-(1-st)p'(t)\sigma(t)\,dW_0(t) + ((1-st)^2\|\sigma'(t)p(t)\|^2\right.\\ &\quad \left. -(1-st)(\zeta(\nu(t)) + p'(t)\nu(t)))\,dt\right),\ t \in [0,T],\end{aligned}$$

führt, wobei $J(0) = 1$. Damit ergibt sich mit Itô's Lemma für $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}d(\Delta^{st}(t)J^{st}(t)) &= J^{st}(t)\left(\Delta^{st}(t)(1-st)\left[(\zeta(\nu(t)) + p'(t)\nu(t))\,dt\right.\right.\\ &\quad \left.\left. + p'(t)\sigma(t)\,dW_0(t)\right] + \frac{X^{st}(t)}{S_0^{st}(t)}(1-st)(\zeta(\nu(t)) + p'(t)\nu(t))\,dt\right)\\ &\quad + \Delta^{st}(t)J^{st}(t)\left(-(1-st)p'(t)\sigma(t)\,dW_0(t)\right.\\ &\quad \left. + ((1-st)^2\|\sigma'(t)p(t)\|^2 - (1-st)(\zeta(\nu(t)) + p'(t)\nu(t)))\,dt\right)\\ &\quad - \Delta^{st}(t)(1-st)^2 p'(t)\sigma(t)J^{st}(t)(p'(t)\sigma(t))'\,dt\\ &= J^{st}(t)(1-st)\frac{X^{st}(t)}{S_0^{st}(t)}(\zeta(\nu(t)) + p'(t)\nu(t))\,dt.\end{aligned}$$

Integration führt unter Berücksichtigung von $\Delta(0) = 0$ auf:

$$\Delta^{st}(t) = \frac{1}{J^{st}(t)}(1 - st) \int_0^t \frac{J^{st}(s)X^{st}(s)}{S_0^{st}(s)}(\zeta(\nu(s)) + p'(s)\nu(s))\, ds,\ t \in [0,T].$$

Da zum einen $J(.) \geq 0$ und $X^{st}(.) \geq 0$ ist und zum anderen aufgrund von Gl. (3.5) für jedes $\nu(.) \in \mathcal{D}$ gilt: $p \in K \;\Leftrightarrow\; \zeta(\nu(.)) + p'\nu(.) \geq 0$, gilt auch fast sicher, fast immer mit $t \in [0,T]$:

$$\zeta(\nu(t)) + p'(t)\nu(t) \geq 0 \tag{5.26}$$

und folglich ist Gl. (5.21) (fast sicher, fast immer) erfüllt. Dies bedeutet, dass für jeden für das Ausgangsproblem zulässigen Portfolio-Prozess $p(.)$ der Vermögensprozess jedes beliebigen Schattenmarktes $\mathcal{M}_\nu$ $(\nu(.) \in \mathcal{D})$ fast sicher, fast immer mindestens so groß wie der zugehörige tatsächliche Vermögensprozess ist. Da somit der Vermögensprozess eines jeden Schattenmarktes bei jedem beliebigen derartigen Portfolio-Prozess nicht (zeitlich) vor dem tatsächlichen Vermögensprozess null werden kann, gilt $\mathcal{A}_{KE}(x;K) \subseteq \mathcal{A}_\nu(x)$, mithin ist jeder für das Ausgangsproblem zulässige Portfolio-Prozess auch zulässig auf jedem Schattenmarkt $\mathcal{M}_\nu$ $(\nu(.) \in \mathcal{D})$. Wegen der monoton wachsenden Nutzenfunktion $U_2(.)$ muss damit gelten:

$$V^{st}(x;K) \leq V_\nu^{st}(x), \quad \forall \nu(.) \in \mathcal{D}. \tag{5.27}$$

Umgekehrt gilt eine Identität (bis auf Ununterscheidbarkeit) der Vermögensprozesse, wenn die Ungleichheitsbeziehung (5.26) mit Gleichheit erfüllt ist, da dann $\Delta(.) = 0$ (fast sicher, fast immer) ist.

Nach Voraussetzung befindet sich das Prozesspaar $(c_{\hat\nu}^{st}(.), p_{\hat\nu}^{st}(.))$, welches in Analogie zu den Gl. (3.33) und (3.42) zu bilden und somit im Schattenmarkt $\mathcal{M}_{\hat\nu}$ optimal ist, in der Menge $\mathcal{A}_{KE}(x;K)$; es ist also zulässig für das (primale) Ausgangsproblem. (Auch nach dem zuvor Gesagten ist das Prozesspaar damit dual in Bezug auf den Markt $\mathcal{M}_{\hat\nu}$ zulässig, d.h. es gilt $(c_{\hat\nu}^{st}(.), p_{\hat\nu}^{st}(.)) \in \mathcal{A}_{\hat\nu}(x)$.) Ferner repräsentiert $X_{\hat\nu}^{st}(.)$ den Vermögensprozess zum optimalen Prozesspaar $(c_{\hat\nu}^{st}(.), p_{\hat\nu}^{st}(.))$, so dass $X_{\hat\nu}^{x,c_{\hat\nu}^{st},p_{\hat\nu}^{st};st}(.) = X_{\hat\nu}^{st}(.)$ gilt. Da nach Voraussetzung zudem $X_{\hat\nu}^{st}(.) = X^{x,c_{\hat\nu}^{st},p_{\hat\nu}^{st};st}(.)$ ist, kann Folgendes geschrieben werden:

$$\begin{aligned} V_{\hat\nu}^{st}(x) &= E\left[\int_0^T U_1(t, c_{\hat\nu}^{st}(t))\, dt + U_2(X_{\hat\nu}^{x,c_{\hat\nu}^{st},p_{\hat\nu}^{st};st}(T))\right] \\ &= E\left[\int_0^T U_1(t, c_{\hat\nu}^{st}(t))\, dt + U_2(X_{\hat\nu}^{st}(T))\right] \\ &= E\left[\int_0^T U_1(t, c_{\hat\nu}^{st}(t))\, dt + U_2(X^{x,c_{\hat\nu}^{st},p_{\hat\nu}^{st};st}(T))\right]. \end{aligned}$$

Aus $(c_{\hat\nu}^{st}(.), p_{\hat\nu}^{st}(.)) \in \mathcal{A}_{KE}(x;K)$ ergibt sich damit unmittelbar:

$$V^{st}(x;K) \geq V_{\hat\nu}^{st}(x).$$

Zusammen mit Gl. (5.27) folgt daraus die Identität der Zielfunktionswerte. Das Prozesspaar $(c_{\hat\nu}^{st}(.), p_{\hat\nu}^{st}(.))$ ist somit nicht nur zulässig, sondern optimal für

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

das Ausgangsproblem (Aussage 3). Aus Gl. (5.27) ergibt sich dann ferner, dass der Schattenmarkt $\mathcal{M}_{\hat{\nu}}$ den geringsten Zielfunktionswert unter allen Märkten $\mathcal{M}_{\nu}$ ($\nu(.) \in \mathcal{D}$) aufweist (Aussage 2).

5.3 Optimaler Schattenpreisprozess bei deterministischen Koeffizienten und Nutzenfunktionen des „Power Type"

Im Folgenden wird die Optimalität des nach der Bedingung (3.56) zu bestimmenden Schattenpreisprozesses $\hat{\nu}(.)$ sowie des durch die Gl. (3.57) gegebenen Portfolio-Prozesses unter den Voraussetzungen des Satzes 3.3 im Steuerfall nachgewiesen. Die Beweisidee hinsichtlich der Herleitung des Schattenpreisprozesses ist *Cvitanić/Karatzas* (1992)[520] entnommen, wo diesbezüglich der Fall einer simultanen Entnahme- und Endvermögensoptimierung ohne Steuern sowie ohne die Funktionen $f_i(.)\,(i = 1,2)$ behandelt wird. Der optimale Portfolio-Prozess ist in *Cvitanić/Karatzas* (1992)[521] ohne Herleitung für die betrachteten Nutzenfunktionen angegeben. Im nächsten Abschnitt wird der Fall der simultanen Entnahme- und Endvermögensoptimierung, im darauf folgenden Abschnitt der der reinen Endvermögensoptimierung ($c(.) \equiv 0$) behandelt.

5.3.1 Situation bei simultaner Entnahme- und Endvermögensoptimierung

Der Einfachheit halber wird im Folgenden (zumeist) auf die Kennzeichnung des betrachteten Falles der Konsum- und Entnahmeoptimierung durch das Subskript „KE" verzichtet. Die ersten Überlegungen spezialisieren noch nicht auf die betrachtete Klasse von Nutzenfunktionen. Mit dem konvexen Dual $\tilde{U}_i(.)$ zur Nutzenfunktion $U_i(.)\,(i = 1,2)$ gemäß Gl. (2.36) wird zu jedem $\nu(.) \in \mathcal{D}$ die folgende Funktion $\tilde{J}^{st}_{\nu} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ definiert:

$$\tilde{J}^{st}_{\nu}(y) := E\left[\int_0^T \tilde{U}_1(t, yH^{st}_{\nu}(t))\,dt + \tilde{U}_2(yH^{st}_{\nu}(T))\right], \quad 0 < y < \infty. \tag{5.28}$$

Damit wird die Funktion $\tilde{V}^{st} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ wie folgt gebildet:

$$\tilde{V}^{st}(y) := \inf_{\nu(.) \in \mathcal{D}} \tilde{J}^{st}_{\nu}(y). \tag{5.29}$$

Es ist nun die Gültigkeit des folgenden Lemmas zu zeigen.

[520] Vgl. *ebd.*, insbesondere S. 791, 800 ff.
[521] Vgl. *ebd.*, S. 803.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Hilfssatz 5.1 *Duale Optimalität des Schattenpreises*[522]
Unter den Voraussetzungen des Satzes 3.2 gilt für den optimalen Schattenpreisprozess $\hat{\nu}(.)$ *mit* $y = \mathcal{Y}_{\hat{\nu}}^{st}(x)$*:*

$$\tilde{J}_{\hat{\nu}}^{st}(y) \leq \tilde{J}_{\nu}^{st}(y), \quad \forall \nu(.) \in \mathcal{D}. \tag{5.30}$$

Beweis:
Es seien $\nu(.) \in \mathcal{D}, (c,p) \in \mathcal{A}_{KE,\nu}(x)$ beliebig. Aufgrund der Definitionsgleichung (2.36) des konvexen Duals gilt:

$$\begin{aligned}
&E\left[\int_0^T U_1(t,c(t))\,dt + U_2(X_\nu^{x,c,p;st}(T))\right] \\
&\leq E\left[\int_0^T \tilde{U}_1(t,yH_\nu^{st}(t))\,dt + \tilde{U}_2(yH_\nu^{st}(T))\right] \\
&\quad + yE\left[\int_0^T c(t)H_\nu^{st}(t)\,dt + X_\nu^{x,c,p;st}(T)H_\nu^{st}(T)\right] \\
&\leq f_\nu(y) := E\left[\int_0^T \tilde{U}_1(t,yH_\nu^{st}(t))\,dt + \tilde{U}_2(yH_\nu^{st}(T))\right] + xy,\ (\forall y \in (0,\infty),)
\end{aligned}$$

wobei die letzte Beziehung aus der Erfüllung der Budget-Restriktion im Schattenmarkt folgt. Es gilt dann insbesondere: $f_\nu(\mathcal{Y}_{\hat{\nu}}^{st}(x)) \geq V_\nu^{st}(x)$. Aufgrund der Minimalität von $\hat{\nu}(.)$ in Bezug auf $V_\nu^{st}(x)$ für $\nu(.) \in \mathcal{D}$ nach Satz 3.2 sowie unter Berücksichtigung der Ausdrücke für den optimalen Konsumprozess $c_{\hat{\nu}}^{st}(.)$ und das optimale Endvermögen $\xi_{\hat{\nu}}^{st}$ in Analogie zu den Gl. (3.33) und (3.34) sowie mit der Beziehung (2.37) gilt $\forall \nu(.) \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}
V_\nu^{st}(x) \quad &\geq \quad E\left[\int_0^T U_1(t,c_{\hat{\nu}}^{st}(t))\,dt + U_2(\xi_{\hat{\nu}}^{st})\right] \\
&= \quad E\left[\int_0^T \tilde{U}_1(t,\mathcal{Y}_{\hat{\nu}}^{st}(x)H_{\hat{\nu}}^{st}(t))\,dt + \tilde{U}_2(\mathcal{Y}_{\hat{\nu}}^{st}(x)H_{\hat{\nu}}^{st}(T))\right] \\
&\quad + \mathcal{Y}_{\hat{\nu}}^{st}(x)E\left[\int_0^T H_{\hat{\nu}}^{st}(t)I_1(t,\mathcal{Y}_{\hat{\nu}}^{st}(x)H_{\hat{\nu}}^{st}(t))\,dt + H_{\hat{\nu}}^{st}(T)I_2(t,\mathcal{Y}_{\hat{\nu}}^{st}(x)H_{\hat{\nu}}^{st}(T))\right] \\
&= \quad E\left[\int_0^T \tilde{U}_1(t,\mathcal{Y}_{\hat{\nu}}^{st}(x)H_{\hat{\nu}}^{st}(t))\,dt + \tilde{U}_2(\mathcal{Y}_{\hat{\nu}}^{st}(x)H_{\hat{\nu}}^{st}(T))\right] + x\mathcal{Y}_{\hat{\nu}}^{st}(x),
\end{aligned}$$

wobei für die letzte Umformung noch die Definition der Funktion $\mathcal{Y}_{\hat{\nu}}^{st}(.)$ verwendet wurde. Damit gilt schließlich:

$$\begin{aligned}
&E\left[\int_0^T \tilde{U}_1(t,\mathcal{Y}_{\hat{\nu}}^{st}(x)H_{\hat{\nu}}^{st}(t))\,dt + \tilde{U}_2(\mathcal{Y}_{\hat{\nu}}^{st}(x)H_{\hat{\nu}}^{st}(T))\right] \\
&\leq f_\nu(\mathcal{Y}_{\hat{\nu}}^{st}(x)) - x\mathcal{Y}_{\hat{\nu}}^{st}(x) = E\left[\int_0^T \tilde{U}_1(t,\mathcal{Y}_{\hat{\nu}}^{st}(x)H_\nu^{st}(t))\,dt + \tilde{U}_2(\mathcal{Y}_{\hat{\nu}}^{st}(x)H_\nu^{st}(T))\right].
\end{aligned}$$

Somit repräsentiert $\hat{\nu}(.)$ auch das Minimum der Funktion $\tilde{J}_\nu^{st}(\mathcal{Y}_{\hat{\nu}}^{st}(x))$ über alle $\nu(.) \in \mathcal{D}$ $\left[\text{d.h. } \tilde{J}_{\hat{\nu}}^{st}(\mathcal{Y}_{\hat{\nu}}^{st}(x)) = \tilde{V}^{st}(\mathcal{Y}_{\hat{\nu}}^{st}(x))\right]$. $\square$

[522] Nach *Cvitanić/Karatzas* (1992), S. 786, 789; vgl. auch *Karatzas/Shreve* (1998), S. 275, 277 i.V.m. S. 270 ff.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Dies kann als Bedingung für die Suche nach dem optimalen Schattenpreisprozess herangezogen werden, was im Folgenden geschehen soll, indem für bel. $y \in \mathbb{R}_{++}$ die Ermittlung von $\tilde{V}^{st}(y)$ über Gl. (5.29) durchgeführt wird. Nach Voraussetzung des zu beweisenden Satzes 3.3 kann dies durch einen Ansatz über eine *Hamilton-Jacobi-Bellman*-Gleichung bewerkstelligt werden. Zunächst wird das konvexe Dual einer Nutzenfunktion des „power type“ angegeben. Mit $\beta \in (0,1)$ und den sonstigen Prämissen des Satzes 3.3 gilt unter Verwendung von Gl. (2.37):

$$\begin{array}{lrcl@{\quad;\quad}rcl}
 & U_1(t,x) & = & f_1(t)\frac{1}{\beta}x^\beta & U_2(x) & = & f_2(T)\frac{1}{\beta}x^\beta, \\
 & \frac{\partial U_1}{\partial x}(t,x) & = & f_1(t)x^{\beta-1} & U_2'(x) & = & f_2(T)x^{\beta-1}; \\
\text{somit ist} & I_1(t,y) & = & \left(\frac{y}{f_1(t)}\right)^{-\frac{1}{1-\beta}} & I_2(y) & = & \left(\frac{y}{f_2(T)}\right)^{-\frac{1}{1-\beta}} \\
\text{es folgt} & \tilde{U}_1(t,y) & = & U_1(I_1(t,y)) - yI_1(t,y) & \tilde{U}_2(y) & = & f_2(T)\frac{1-\beta}{\beta} \\
 & & = & f_1(t)\frac{1-\beta}{\beta}\left(\frac{y}{f_1(t)}\right)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} & & & \left(\frac{y}{f_2(T)}\right)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}.
\end{array}$$

Ferner wird gesetzt:

$$\rho := \frac{\beta}{1-\beta}$$

und $\tilde{y}(t) := \frac{y}{f_i(t)}$ sowie damit $\bar{y}(t) := \tilde{y}(t)H_\nu^{st}(t),\ t \in [0,T]$, $i = 1$ für $t \in [0,T)$, $i = 2$ für $t = T$.

Der Prozess $\bar{y}(.)$ lässt sich mit der Itô-Formel unter Zugrundelegung der stochastischen Differentialgleichung (3.23) für den Zustandspreis-Dichte-Prozess auf dem Schattenmarkt $\mathcal{M}_\nu$ wie folgt charakterisieren ($t \in [0,T]$):

$$\begin{aligned}
d\bar{y}(t) &= y\left(d\left(\frac{1}{f_i(t)}\right)H_\nu^{st}(t) + \frac{1}{f_i(t)}dH_\nu^{st}(t)\right) \\
&= y\left(-\frac{1}{(f_i(t))^2}f_i'(t)H_\nu^{st}(t)\,dt \right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{f_i(t)}\left(-H_\nu^{st}(t)\left((1-st)(r(t)+\zeta(\nu(t)))\,dt + \theta_\nu'(t)\,dW(t)\right)\right)\right) \\
&= -\bar{y}\left[\left(\frac{f_i'(t)}{f_i(t)} + (1-st)(r(t)+\zeta(\nu(t)))\right)dt + \theta_\nu'(t)\,dW(t)\right]. \qquad (5.31)
\end{aligned}$$

Zeitabhängig sei die zu minimierende Zielfunktion mit $\tilde{V}^{st}(t,\bar{y})$ bezeichnet; sie hat die folgende *Hamilton-Jacobi-Bellman*-Gleichung zu erfüllen:

$$\begin{aligned}
&\tilde{V}_t^{st} + \inf_{\nu \in \tilde{K}}\left[\frac{1}{2}\bar{y}^2 \parallel \theta_\nu(t) \parallel^2 \tilde{V}_{\bar{y}\bar{y}}^{st} - \bar{y}\left[\frac{f_i'(t)}{f_i(t)}\right.\right. \\
&\left.\left. +(1-st)(r(t)+\zeta(\nu))\right]\tilde{V}_{\bar{y}}^{st}\right] + \tilde{U}_1(t,\bar{y}f_1(t)) = 0, \qquad (5.32) \\
&\tilde{V}^{st}(T,\bar{y}(T)) = \tilde{U}_2(\bar{y}(T)f_2(T)). \qquad (5.33)
\end{aligned}$$

Zur Notation: Hier wie auch im Weiteren werden die Argumente von Funktionen aus Vereinfachungsgründen gegebenenfalls weggelassen.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Der Lösungsansatz $\tilde{V}^{st}(t,\bar{y}) = \frac{1}{\rho}\bar{y}^{-\rho}v(t)$ beinhaltet:

$$\tilde{V}^{st}_t = \frac{1}{\rho}\bar{y}^{-\rho}v_t,\ \tilde{V}^{st}_{\bar{y}} = -\bar{y}^{-\rho-1}v,\ \tilde{V}^{st}_{\bar{y}\bar{y}} = (1+\rho)\bar{y}^{-\rho-2}v$$

und führt durch Einsetzen der Ausdrücke in Gl. (5.32) auf die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\bar{y}^{-\rho}\Bigg[v_t + \inf_{\nu\in\tilde{K}}\left[\frac{\rho}{2}(1+\rho)\parallel\theta_\nu\parallel^2 v + \rho(1-st)\zeta(\nu)v\right] \\ +\rho\left[\frac{f_i'}{f_i} + (1-st)r\right]v + f_i\Bigg] &= 0. \qquad (5.34)\end{aligned}$$

Es sei nun:

$$\begin{aligned}h(t) &:= \rho\inf_{\nu\in\tilde{K}}\left[\frac{1+\rho}{2}\parallel\theta(t)+\sigma^{-1}(t)\nu\parallel^2 + (1-st)\zeta(\nu)\right] \\ &\quad +\rho\left[\frac{f_i'(t)}{f_i(t)} + (1-st)r(t)\right]; \qquad (5.35)\end{aligned}$$

dann ist mit:

$$v(t) = e^{\int_t^T h(s)\,ds}\left(1 + \int_t^T f_i(u)e^{-\int_u^T h(m)\,dm}\,du\right)$$

eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (5.34), welche sich kurz als $v_t(t) + h(t)v(t) + f_i(t) = 0$ schreiben lässt, gegeben[523]. Somit ist noch der Ausdruck $h(t)$ auszuwerten. Die Bildung des Infimums führt auf den optimalen Schattenpreisprozess $\hat{\nu}(.)$, so dass gilt:

$$\hat{\nu}(t) := \arg\min_{\nu\in\tilde{K}}\left[\frac{1+\rho}{2}\parallel\theta(t)+\sigma(t)^{-1}\nu\parallel^2 + (1-st)\zeta(\nu)\right].$$

Indem man $\rho = \frac{\beta}{1-\beta}$ rücksubstituiert und den Faktor $\frac{1}{1-\beta}$ ausklammert, erhält man die Bedingung (3.56).

Zur Herleitung des *optimalen Portfolio-Prozesses* wird zunächst die Funktion $\mathcal{X}^{st}_\nu(y)$ beschrieben, wobei bereits hier von $\nu(.) \equiv \hat{\nu}(.)$ ausgegangen werden soll. Aus Gl. (3.32) ergibt sich mit den steuerlichen Anpassungen für $y \in \mathbb{R}_{++}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^{st}_\nu(y) &= E\left[\int_0^T H^{st}_\nu(t)I_1(t,yH^{st}_\nu(t))\,dt + H^{st}_\nu(T)I_2(yH^{st}_\nu(T))\right] \\ &= E\Bigg[\int_0^T H^{st}_\nu(t)\left(\tfrac{1}{f_1(t)}\right)^{-\frac{1}{1-\beta}}\left(yH^{st}_\nu(t)\right)^{-\frac{1}{1-\beta}}\,dt \\ &\quad + H^{st}_\nu(T)\left(\tfrac{1}{f_2(T)}\right)^{-\frac{1}{1-\beta}}\left(yH^{st}_\nu(T)\right)^{-\frac{1}{1-\beta}}\Bigg] \\ &= y^{-\frac{1}{1-\beta}}\underbrace{E\left[\int_0^T f_1(t)^{\frac{1}{1-\beta}}H^{st}_\nu(t)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\,dt + f_2(T)^{\frac{1}{1-\beta}}H^{st}_\nu(T)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\right]}_{=:\,A(0)}.\end{aligned}$$

[523] Mit der Produktregel ergibt sich für die Ableitung der Funktion $v(.)$ Folgendes: $v_t(t) = -h(t)v(t) + e^{\int_t^T h(s)\,ds}(-1)f_i(t)e^{-\int_t^T h(m)\,dm} = -h(t)v(t) - f_i(t)$.

Die zugehörige Umkehrfunktion ist:

$$\mathcal{Y}_\nu^{st}(x) = \left(\frac{x}{A(0)}\right)^{\beta-1}, \quad x \in \mathbb{R}_{++}.$$

Damit sind nunmehr der optimale Konsumprozess sowie das optimale Endvermögen analog den Gl. (3.33) und (3.34) gegeben durch:

$$\begin{aligned} c_\nu^{st}(t) &= I_1(t, \mathcal{Y}_\nu^{st}(x) H_\nu^{st}(t)) = f_1(t)^{\frac{1}{1-\beta}} \left(\frac{x}{A(0)}\right)^{-\frac{\beta-1}{1-\beta}} H_\nu^{st}(t)^{-\frac{1}{1-\beta}} \\ &= f_1(t)^{\frac{1}{1-\beta}} \tfrac{x}{A(0)} H_\nu^{st}(t)^{-\frac{1}{1-\beta}}, \quad t \in [0,T], \\ \xi_\nu^{st} &= f_2(T)^{\frac{1}{1-\beta}} \tfrac{x}{A(0)} H_\nu^{st}(T)^{-\frac{1}{1-\beta}}. \end{aligned}$$

Für den Vermögensprozess gilt analog zu Gl. (3.35) für $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} X_\nu^{st}(t) &= \frac{1}{H_\nu^{st}(t)} E\left[\int_t^T H_\nu^{st}(s) c_\nu^{st}(s)\, ds + H_\nu^{st}(T)\xi_\nu^{st} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \tfrac{x}{A(0)} \tfrac{1}{H_\nu^{st}(t)} \underbrace{E\left[\int_t^T f_1(s)^{\frac{1}{1-\beta}} H_\nu^{st}(s)^{\frac{-\beta}{1-\beta}}\, ds + f_2(T)^{\frac{1}{1-\beta}} H_\nu^{st}(T)^{\frac{-\beta}{1-\beta}} \mid \mathcal{F}_t\right]}_{=:\, A(t)}. \end{aligned}$$

Nunmehr ist noch für das Martingal:

$$\begin{aligned} M_\nu^{st}(t) &= E\left[\int_0^T H_\nu^{st}(s) c_\nu^{st}(s)\, ds + H_\nu^{st}(T)\xi_\nu^{st} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \tfrac{x}{A(0)} E\left[\int_0^T f_1(s)^{\frac{1}{1-\beta}} H_\nu^{st}(s)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\, ds + f_2(T)^{\frac{1}{1-\beta}} H_\nu^{st}(T)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \tfrac{x}{A(0)} \Bigg[\int_0^t f_1(s)^{\frac{1}{1-\beta}} H_\nu^{st}(s)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\, ds \\ &\quad + E\left[\int_t^T f_1(s)^{\frac{1}{1-\beta}} H_\nu^{st}(s)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\, ds + f_2(T)^{\frac{1}{1-\beta}} H_\nu^{st}(T)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} \mid \mathcal{F}_t\right]\Bigg] \\ &= \tfrac{x}{A(0)} \Bigg[\int_0^t f_1(s)^{\frac{1}{1-\beta}} H_\nu^{st}(s)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\, ds + \int_t^T f_1(s)^{\frac{1}{1-\beta}} E\left[H_\nu^{st}(s)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} \mid \mathcal{F}_t\right] ds \\ &\quad + f_2(T)^{\frac{1}{1-\beta}} E\left[H_\nu^{st}(T)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} \mid \mathcal{F}_t\right]\Bigg] \end{aligned}$$

eine Martingaldarstellung der Gestalt $M_\nu^{st}(t) = x + \int_0^t \psi_\nu^{st}(s)'\, dW(s)$ zu ermitteln, wobei $t \in [0,T]$. Hierfür wird das Inkrement des Prozesses $dM_\nu^{st}(.)$ betrachtet, welches dem Ausdruck $\psi_\nu^{st}(.)'\, dW(.)$ entsprechen muss. Für das Inkrement des Prozesses $M_\nu^{st}(.)$ ergibt sich für $t \in [0,T]$ zunächst:

$$\begin{aligned} dM_\nu^{st}(t) &= \frac{x}{A(0)} \Bigg[f_1(t)^{\frac{1}{1-\beta}} H_\nu^{st}(t)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\, dt - f_1(t)^{\frac{1}{1-\beta}} H_\nu^{st}(t)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\, dt \\ &\quad + \int_t^T f_1(s)^{\frac{1}{1-\beta}} dE\left[H_\nu^{st}(s)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} \mid \mathcal{F}_t\right] ds \\ &\quad + f_2(T)^{\frac{1}{1-\beta}} dE\left[H_\nu^{st}(T)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} \mid \mathcal{F}_t\right]\Bigg]. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Es ist folglich nach einer Darstellung des Inkrementes zum Erwartungswert $E\left[H_\nu^{st}(s)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} \mid \mathcal{F}_t\right]$ für $t < s \leq T$ zu fragen. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass von deterministischen Parameterprozessen und einem deterministischen Schattenpreisprozess ausgegangen werden kann. Unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.23) und (3.21) ergibt sich Folgendes:

$$
\begin{aligned}
& dE\left[H_\nu^{st}(s)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= dE\left[H_\nu^{st}(t)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} e^{\frac{\beta}{1-\beta}\left(\int\limits_t^s \left((1-st)(r(u)+\zeta(\nu(u)))+\frac{1}{2}\|\theta_\nu(u)\|^2\right) du + \int\limits_t^s \theta_\nu(u)'\, dW(u)\right)} \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= d\left[H_\nu^{st}(t)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} e^{\frac{\beta}{1-\beta}\left(\int\limits_t^s \left((1-st)(r(u)+\zeta(\nu(u)))+\frac{1}{2}\|\theta_\nu(u)\|^2\right) du\right) + \frac{1}{2}\int\limits_t^s \frac{\beta^2}{(1-\beta)^2}\|\theta_\nu(u)\|^2\, du}\right] \\
&= d\left[H_\nu^{st}(t)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} e^{\frac{\beta}{1-\beta}\left(\int\limits_t^s \left((1-st)(r(u)+\zeta(\nu(u)))+\frac{1}{2(1-\beta)}\|\theta_\nu(u)\|^2\right) du\right)}\right].
\end{aligned}
$$

Mit $k(t) := (1-st)(r(t)+\zeta(\nu(t))) + \frac{1}{2(1-\beta)} \parallel \theta_\nu(t) \parallel^2$ gilt dann:

$$
\begin{aligned}
dE\left[H_\nu^{st}(s)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} \mid \mathcal{F}_t\right] &= e^{\frac{\beta}{1-\beta}\int\limits_t^s k(u)\,du}\, d\left[H_\nu^{st}(t)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\right] \\
&\quad + H_\nu^{st}(t)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\, d\left[e^{\frac{\beta}{1-\beta}\int\limits_t^s k(u)\,du}\right].
\end{aligned}
$$

Mit der Itô-Formel auf Basis der stochastischen Differentialgleichung (3.23) ist das Inkrement $d\left[H_\nu^{st}(t)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\right]$ wie folgt zu bestimmen:

$$
\begin{aligned}
d\left[H_\nu^{st}(t)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\right] &= -\frac{\beta}{1-\beta} H_\nu^{st}(t)^{-\frac{1}{1-\beta}}\, dH_\nu^{st}(t) \\
&\quad -\frac{\beta}{1-\beta}\left(-\frac{1}{1-\beta}\right) H_\nu^{st}(t)^{-\frac{2-\beta}{1-\beta}} \frac{1}{2} H_\nu^{st}(t)^2 \parallel \theta_\nu(t) \parallel^2\, dt \\
&= \frac{\beta}{1-\beta} H_\nu^{st}(t)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} \left(k(t)\,dt + \theta_\nu'(t)\,dW(t)\right).
\end{aligned}
$$

Ferner gilt:

$$
d\left[e^{\frac{\beta}{1-\beta}\int\limits_t^s k(u)\,du}\right] = \frac{\beta}{1-\beta}(-k(t)) e^{\frac{\beta}{1-\beta}\int\limits_t^s k(u)\,du}\, dt.
$$

Damit ist nun:

$$
\begin{aligned}
dE\left[H_\nu^{st}(s)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} \mid \mathcal{F}_t\right] &= e^{\frac{\beta}{1-\beta}\int\limits_t^s k(u)\,du} \left[\frac{\beta}{1-\beta} H_\nu^{st}(t)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} \left(k(t)\,dt + \theta_\nu'(t)\,dW(t)\right)\right. \\
&\quad \left. -\frac{\beta}{1-\beta} H_\nu^{st}(t)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} k(t)\,dt\right] \\
&= e^{\frac{\beta}{1-\beta}\int\limits_t^s k(u)\,du} \frac{\beta}{1-\beta} H_\nu^{st}(t)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} \theta_\nu'(t)\,dW(t) \\
&= \frac{\beta}{1-\beta} E\left[H_\nu^{st}(s)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} \mid \mathcal{F}_t\right] \theta_\nu'(t)\,dW(t).
\end{aligned}
$$

Daraus wiederum lässt sich durch Einsetzen in Gl. (5.36) als Inkrement $dM_\nu^{st}(.)$ der folgende Ausdruck für $t \in [0,T]$ ableiten:

$$\begin{aligned} dM_\nu^{st}(t) &= \tfrac{x}{A(0)} \left[\int_t^T f_1(s)^{\frac{1}{1-\beta}} \tfrac{\beta}{1-\beta} E\left[H_\nu^{st}(s)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} \mid \mathcal{F}_t \right] \theta_\nu'(t)\, dW(t)\, ds \right. \\ & \quad \left. + f_2(T)^{\frac{1}{1-\beta}} \tfrac{\beta}{1-\beta} E\left[H_\nu^{st}(T)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} \mid \mathcal{F}_t \right] \theta_\nu'(t)\, dW(t) \right] \\ &= \tfrac{x}{A(0)} \tfrac{\beta}{1-\beta} E\left[\int_t^T f_1(s)^{\frac{1}{1-\beta}} H_\nu^{st}(s)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\, ds \right. \\ & \quad \left. + f_2(T)^{\frac{1}{1-\beta}} H_\nu^{st}(T)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} \mid \mathcal{F}_t \right] \theta_\nu'(t)\, dW(t) \\ &= \tfrac{x}{A(0)} \tfrac{\beta}{1-\beta} A(t) \theta_\nu'(t)\, dW(t). \end{aligned}$$

Der Prozess $\psi_\nu^{st}(.)$ in der Martingaldarstellung des Prozesses $M_\nu^{st}(.)$ hat folglich die Gestalt:

$$\psi_\nu^{st}(t) = \frac{\beta}{1-\beta} x \frac{A(t)}{A(0)} \theta_\nu(t), \quad t \in [0,T]. \tag{5.37}$$

Gemäß Gl. (3.42) lässt sich der optimale Portfolio-Prozess damit bestimmen als:

$$\begin{aligned} p_\nu^{st}(t) &= \frac{1}{1-st} (\sigma'(t))^{-1} \left(\frac{\frac{\beta}{1-\beta} x \frac{A(t)}{A(0)} \theta_\nu(t)}{H_\nu^{st}(t) \frac{x}{A(0)} \frac{1}{H_\nu^{st}(t)} A(t)} + \theta_\nu(t) \right) \\ &= \frac{1}{1-st} (\sigma'(t))^{-1} \frac{1}{1-\beta} \theta_\nu(t), \quad t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Berücksichtigt man, dass $\nu(.) \equiv \hat{\nu}(.)$ ist, so entspricht dies Gl. (3.57). Damit ist Satz 3.3 bezüglich einer simultanen Entnahme- und Endvermögensoptimierung bewiesen. Der folgende Abschnitt wendet sich dem Problem einer reinen Endvermögensoptimierung zu.

5.3.2 Situation bei Endvermögensoptimierung

Der Fall einer reinen Endvermögensoptimierung, für welche $c(.) \equiv 0$ gilt, ist im Wesentlichen analog dem Fall einer simultanen Entnahme- und Endvermögensoptimierung zu behandeln, so dass im Folgenden lediglich eine kurze Darstellung, welche die Unterschiede zum vorausgehenden Fall aufzeigt, präsentiert wird. Zugrunde liegt eine Nutzenfunktion der Gestalt $U(x) = \frac{1}{\beta} x^\beta$ ($\beta \in (0,1)$, welche $U_2(.)$ bei $f_2(T) \equiv 1$ entspricht. Damit sind $I(y) = y^{-\frac{1}{1-\beta}}$ und $\tilde{U}(y) = \frac{1-\beta}{\beta} y^{-\frac{\beta}{1-\beta}} = \frac{1}{\rho} y^{-\rho}$, wobei wiederum $\rho = \frac{\beta}{1-\beta}$ sei. (Ferner ist $U_1(t,x) = I_1(t,y) = \tilde{U}_1(t,y) \equiv 0$.)

Analog dem zuvor behandelten Fall ist die Funktion:

$$\tilde{J}_{E;\nu}^{st}(y) := E\left[\tilde{U}_2(y H_\nu^{st}(T)) \right] \tag{5.39}$$

für $y = \mathcal{Y}^{st}_{E,\hat{\nu}}(x)$ über alle $\nu(.) \in \mathcal{D}$ zu minimieren. (Es ist leicht nachzuvollziehen, dass Hilfssatz 5.1 analog gilt.)

Betrachtet wird der Prozess $\bar{y}(t) := yH^{st}_{\nu}(t),\ t \in [0,T]$, dessen Dynamik entsprechend Gl. (5.31) beschrieben wird durch:

$$d\bar{y}(t) \quad = \quad -\bar{y}(t)\left[(1-st)(r(t)+\zeta(\nu(t)))\,dt + \theta'_{\nu}(t)\,dW(t)\right],\ t \in [0,T]. \tag{5.40}$$

Die Zielfunktion $\tilde{V}_E(t,\bar{y})$ hat nun die folgende *Hamilton-Jacobi-Bellman*-Gleichung zu erfüllen:

$$\tilde{V}_{t;E} + \inf_{\nu \in \tilde{K}}\left[\frac{1}{2}\bar{y}^2 \parallel \theta_{\nu} \parallel^2 \tilde{V}_{\bar{y}\bar{y};E} - \bar{y}(1-st)(r+\zeta(\nu))\tilde{V}_{\bar{y};E}\right] \quad = \quad 0, \tag{5.41}$$

$$\tilde{V}_E(T,\bar{y}(T)) \quad = \quad \tilde{U}(\bar{y}(T)). \tag{5.42}$$

Hierfür wird wieder der Lösungsansatz $\tilde{V}_E(t,\bar{y}) = \frac{1}{\rho}(\bar{y})^{-\rho}w(t)$ gewählt, so dass gilt:

$$\tilde{V}_{t;E} = \frac{1}{\rho}\bar{y}^{-\rho}w_t,\ \tilde{V}_{\bar{y};E} = -\bar{y}^{-\rho-1}w,\ \tilde{V}_{\bar{y}\bar{y};E} = (1+\rho)\bar{y}^{-\rho-2}w.$$

Einsetzen in Gl. (5.41) führt auf:

$$\frac{1}{\rho}\bar{y}^{-\rho}\left[w_t + \inf_{\nu \in \tilde{K}}\left[\frac{\rho}{2}(1+\rho) \parallel \theta_{\nu} \parallel^2 w + \rho(1-st)\zeta(\nu)w\right] + \rho(1-st)rw\right] = 0. \tag{5.43}$$

Über

$$h_E(t) := \rho \inf_{\nu \in \tilde{K}}\left[\frac{1+\rho}{2} \parallel \theta(t) + \sigma^{-1}(t)\nu \parallel^2 + (1-st)\zeta(\nu)\right] + \rho(1-st)r(t) \tag{5.44}$$

ist mit

$$w(t) = e^{\int_t^T h(s)\,ds}, \quad t \in [0,T],$$

eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (5.43), welche sich kurz als $w_t + h_E w = 0$ schreiben lässt, gegeben. Es wird wiederum eine zeitpunktweise Optimierung des Schattenpreisprozesses möglich. Die Auswertung des Ausdruckes $h_E(.)$ führt auf denselben optimalen Schattenpreisprozess $\hat{\nu}(.)$, wie er bei der simultanen Entnahme- und Endvermögensoptimierung zu wählen ist.

Der *optimale Portfolio-Prozess* ist wie folgt herzuleiten, wobei $\nu(.) \equiv \hat{\nu}(.)$ gelte. Zunächst ist:

$$\mathcal{X}^{st}_{E,\nu}(y) \quad = \quad y^{-\frac{1}{1-\beta}} \underbrace{E\left[H^{st}_{\nu}(T)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\right]}_{=:\,A_E(0)}, \quad y \in \mathbb{R}_{++},$$

so dass gilt:

$$\mathcal{Y}^{st}_{E,\nu}(x) = \left(\frac{x}{A_E(0)}\right)^{\beta-1}, \quad x \in \mathbb{R}_{++}.$$

Das optimale Endvermögen stellt sich dann dar als:

$$\xi^{st}_{E,\nu} \quad = \quad \frac{x}{A_E(0)} H^{st}_{\nu}(T)^{-\frac{1}{1-\beta}}.$$

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Für den Vermögensprozess gilt mit $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} X^{st}_{E,\nu}(t) &= \frac{1}{H^{st}_\nu(t)} E\left[H^{st}_\nu(T)\xi^{st}_\nu \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \tfrac{x}{A_E(0)} \tfrac{1}{H^{st}_\nu(t)} \underbrace{E\left[H^{st}_\nu(T)^{-\frac{\beta}{1-\beta}} \mid \mathcal{F}_t\right]}_{=:\, A_E(t)}. \end{aligned}$$

Ferner besitzt das Martingal:

$$M^{st}_{E,\nu}(t) \quad = \quad E\left[H^{st}_\nu(T)\xi^{st}_\nu \mid \mathcal{F}_t\right],\ t \in [0,T],$$

gemäß der Herleitung des vorausgehenden Abschnittes ein Inkrement, welches sich wie folgt darstellt:

$$dM^{st}_{E,\nu}(t) \quad = \quad \frac{x}{A_E(0)} \frac{\beta}{1-\beta} A_E(t)\theta'_\nu(t)\, dW(t), \quad t \in [0,T]. \tag{5.45}$$

Der Prozess $\psi^{st}_{E,\nu}(.)$ in der Martingaldarstellung des Prozesses $M^{st}_{E,\nu}(.)$ gemäß $M^{st}_{E,\nu}(t) = x + \int_0^t \psi^{st}_{E,\nu}(s)'\, dW(s)$ ($t \in [0,T]$) hat die Gestalt:

$$\psi^{st}_{E,\nu}(t) = \frac{\beta}{1-\beta} x \frac{A_E(t)}{A_E(0)} \theta_\nu(t), \quad t \in [0,T]. \tag{5.46}$$

Der optimale Portfolio-Prozess ist somit gegeben durch:

$$p^{st}_{E,\nu}(t) \quad = \quad \frac{1}{1-st}(\sigma'(t))^{-1} \frac{1}{1-\beta} \theta_\nu(t), \quad t \in [0,T], \tag{5.47}$$

wobei $\nu(.) = \hat{\nu}(.)$. Es ergibt sich also derselbe optimale Portfolio-Prozess wie im Fall der simultanen Entnahme- und Endvermögensoptimierung, mithin der in Gl. (3.57) angegebene. Damit ist Satz 3.3 bewiesen.

5.4 Die Optimierung des Schattenpreisvektors im Fall der Verschuldungsbeschränkung mit Leerverkaufsverbot

Im Folgenden wird im Falle einer Beschränkung der Verschuldung bei gleichzeitigem Verbot von Aktienleerverkäufen die Optimalität des Schattenpreisvektors nachgewiesen, welchen der in *Abschnitt 3.3.2.2* angegebene, zweite Algorithmus $\mathcal{A}2$ bestimmt. Bei der Ermittlung des Minimums der Funktion $g(.)$ gemäß Gl. (3.70) über beliebige $\nu \in \tilde{K} = \mathbb{R}^n$ wird durch Schritt 1 zunächst der Fall einer (echten) Binnenlösung im positiven Orthanten ($\mathbb{R}^n_+$), d.h. der Fall $\hat{\nu} \in \mathbb{R}^n_{++}$, untersucht. (Dabei kennzeichnet $\hat{\nu}$ den gesuchten minimierenden Schattenpreisvektor zum Problem (P_g).) Sie würde sich formell auch als Binnenlösung zu dem folgenden, im Weiteren noch benötigten (Teil-)Optimierungsproblem (P_ν) ergeben:

$$\begin{array}{lrcl} \min & g_o(\nu) & = & \frac{1}{2} \parallel \theta \parallel^2 + \theta'\sigma^{-1}\nu + \frac{1}{2}\nu'(\sigma\sigma')^{-1}\nu \\ \text{unter} & -\nu_i & \leq & 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Mit den Lagrange-Multiplikatoren μ_i^ν $(i = 1, \ldots, n)$, welche den Vektor μ^ν charakterisieren, ergibt sich die Lagrange-Funktion:

$$L_\nu(\nu, \mu^\nu) = \frac{1}{2} \parallel \theta \parallel^2 + \theta' \sigma^{-1} \nu + \frac{1}{2} \nu' (\sigma\sigma')^{-1} \nu - \sum_{i=1}^{n} \mu_i^\nu \nu_i.$$

Die für das konvexe (Teil-)Optimierungsproblem (P_ν) notwendigen und hinreichenden *Karush-Kuhn-Tucker*-Optimalitätsbedingungen nehmen für den gesuchten Vektor $\hat{\nu}$ und den problemspezifischen, nunmehr als optimal zu betrachtenden Schattenpreisvektor μ^ν die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_o}{\partial \nu_i}(\hat{\nu}) - \mu_i^\nu = 0 \quad &= \quad \left[(\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1}\hat{\nu}\right]_i - \mu_i^\nu, \quad i = 1, \ldots, n, &(5.48)\\
0 \quad &\leq \quad \hat{\nu}_i, \quad i = 1, \ldots, n, &(5.49)\\
0 \quad &= \quad \mu_i^\nu(-\hat{\nu}_i), \quad i = 1, \ldots, n, &(5.50)\\
0 \quad &\leq \quad \mu_i^\nu, \quad k = 1, \ldots, n. &(5.51)
\end{aligned}$$

Eine Binnenlösung zum Problem (P_ν) stellt sich folglich ein, wenn das Gleichungssystem (5.48) zu einer Lösung $\hat{\nu} > 0$ führt, so dass auch $\mu^\nu = \mathbf{0}_n$ ist. Die dadurch erhaltene Binnenlösung ist dann zugleich Lösung des Problems (P_g). Falls das gesuchte Optimum des Problems (P_g) hingegen auf dem Rand des $\mathbb{R}_+^n$ liegt, wird es bei der Betrachtung eines der nachfolgend beschriebenen (Teil-)Probleme (P_i) $(i = 1, \ldots, n)$, welche in ihrer Gesamtheit eine Untersuchung des (Rest-)Bereiches $U := \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}_{++}^n$ beinhalten, erfasst.

Im Rahmen eines (Teil-)Optimierungsproblems (P_i) $(i \in \{1, \ldots, n\})$ erfolgt die Minimierung der Zielfunktion über sämtliche $\nu \in U_i$, wobei U_i für einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ steht und $\bigcup_{i=1}^{n} U_i = U$ gilt. Es wird nun zunächst für ein beliebiges $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Gestalt von U_i beschrieben und hernach gezeigt, dass die Vereinigung über alle U_i auf U führt. Daran schließt sich die Darstellung des zum Bereich U_i gehörenden (Teil-)Optimierungsproblems (P_i) an.

Es gilt:

$$U_i := \{\nu \ | \ \nu = W_i x^{B_i}, \ x^{B_i} \geq 0\}.$$

Die Matrix W_i ist hierfür charakterisiert durch: $W_i = (e_1, \ldots, e_{i-1}, -\mathbf{1}_n, e_{i+1}, \ldots, e_n)$, wobei $e_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \ldots, n)'$ $(j = 1, \ldots, n)$ den j-ten Einheitsvektor zur kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$ und $\mathbf{1}_n$, wie üblich, den n-dimensionalen Vektor, dessen Komponenten sämtlich den Wert eins aufweisen, bezeichnen. Die Matrix W_i entspricht folglich der $n \times n$-Einheitsmatrix, bei der die i-te Spalte durch den Vektor $-\mathbf{1}_n$ ersetzt ist. Ausgeschrieben stellt sich die $n \times n$-Matrix W_i wie folgt dar:

$$W_i := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & \vdots & & 0 & -1 & & & & \\ & & & 1 & -1 & & & & \\ & & & 0 & -1 & 0 & & & \\ & & & \vdots & -1 & 1 & & & \\ & & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & & & 0 & \\ 0 & 0 & & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \underbrace{-1}_{i} & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es zeigt sich unmittelbar, dass $Rang(W_i) = n$. Der Untervektorraum U_i entspricht dann dem Bildbereich einer surjektiven, linearen Abbildung: $w_i : \mathbb{R}^n_+ \to U_i$, die durch $\nu = w_i(x^{B_i}) = W_i x^{B_i}$ definiert ist. Eine Basis von U_i ist durch die Spaltenvektoren der Matrix W_i gegeben; sie soll bezeichnet werden als $B_i = \{e_1, \dots, e_{i-1}, -\mathbf{1}_n, e_{i+1}, \dots, e_n\}$, wodurch sich das Superskript des Vektors x^{B_i} erklärt.

Es ist nun zu zeigen, dass für jedes $\nu \in U$ auch $\nu \in U_i$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt. Sei hierzu $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)' \in U$ beliebig. Dann darf nicht $\nu > \mathbf{0}_n$ sein bzw. umgekehrt muss $\nu_j \leq 0$ für mindestens ein $j \in \{1, \dots, n\}$ erfüllt sein. Gilt $\nu_k = \min_{j \in \{1,\dots,n\}} \nu_j$, $\forall k \in \mathcal{J}$, dann wird $i := \min\limits_{k \in \mathcal{J}} k$ gesetzt; i nimmt also den Wert des kleinsten Index' an, dessen zugehörige Komponente des Vektors ν — ggf. mit anderen, in der (Index-)Menge $\mathcal{J}$ repräsentierten Komponenten — den geringsten Wert aufweist. Damit ist $\nu \in U_i$, denn es gilt:

$$\nu = W_i x,$$

wobei $x_i = -\nu_i \geq 0$ und $x_j = \nu_j + x_i = \nu_j - \nu_i \geq 0$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i$. Ferner lässt sich leicht ersehen, dass ν genau dann *genau einem* Raum U_i angehört, wenn $|\mathcal{J}| = 1$ ist, das Minimum über die Komponenten von ν also eindeutig ist. Es gilt nämlich unmittelbar: $\nu \in U_k$, $\forall k \in \mathcal{J}$. Allerdings ist bei Wahl eines $k \in \mathcal{J}$ mit $k \neq i$ ein anderer Vektor $\bar{x}$ heranzuziehen, um via $\nu = W_k \bar{x}$ denselben Vektor ν abzubilden. Hierbei gilt $\bar{x}_k = -\nu_k = -\nu_i \geq 0$ und $\bar{x}_j = \nu_j + \bar{x}_k = \nu_j - \nu_i \geq 0$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}, j \neq k$.

Damit kann die Abbildung w_i auch als Basistransformation im $\mathbb{R}^n$ gedeutet werden. Ausgehend von einem Vektor x^{B_i} in Koordinaten bezüglich der Basis B_i ergeben sich durch $\nu = W_i x^{B_i}$ die Koordinaten dieses Vektors bezüglich der kanonischen Basis $E_n := \{e_1, \dots, e_n\}$ des $\mathbb{R}^n$. In umgekehrter Richtung kann somit auch ein Vektor ν in Koordinaten bezüglich E_n durch $x^{B_i} = (W_i)^{-1}\nu$

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

in Koordinaten bezüglich der Basis B_i transformiert werden. Wie sich anhand der Definition von W_i leicht nachvollziehen lässt, gilt dabei:

$$W_i = (W_i)^{-1}, \tag{5.52}$$

so dass für $i, j \ \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, folgende Koordinatentransformation des Vektors x^{B_i} bezüglich der Basis B_i in eine Darstellung x^{B_j} bezüglich der Basis B_j gilt:

$$x^{B_j} = (W_j)^{-1} W_i x^{B_i} = W_j W_i x^{B_i}. \tag{5.53}$$

Die Transformationsmatrix hat dabei die folgende Gestalt, für welche o.B.d.A. von $i < j$ ausgegangen wird:

$$W_{ji} := W_j W_i = \begin{array}{r} \\ \\ \\ i\,\{ \\ \\ \\ \\ j\,\{ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccccc} & 0 & & -1 & \\ I_{i-1} & \vdots & 0_{i-1,j-i-1} & \vdots & 0_{i-1,n-j} \\ & 0 & & -1 & \\ 0 \ldots 0 & 0 & 0 \ldots 0 & -1 & 0 \ldots 0 \\ & 0 & & -1 & \\ 0_{j-i-1,i-1} & \vdots & I_{j-i-1} & \vdots & 0_{j-i-1,n-j} \\ & 0 & & -1 & \\ 0 \ldots 0 & 1 & 0 \ldots 0 & -1 & 0 \ldots 0 \\ & 0 & & -1 & \\ 0_{n-j,i-1} & \vdots & 0_{n-j,j-i-1} & \vdots & I_{n-j} \\ & \underbrace{0}_{i} & & \underbrace{-1}_{j} & \end{array} \right).$$

Dabei bezeichnen I_k die $k \times k$-Einheitsmatrix sowie $0_{k,l}$ eine $k \times l$-Matrix, deren Einträge sämtlich null sind, wobei ggf. noch 0_k vereinfachend für $0_{k,l}$ mit $k = l$ geschrieben wird. Aus der Matrix W_{ji} wird deutlich, dass jeder Vektor x^{B_i}, für den $x_j^{B_i} = 0$ gilt, eine Darstellung x^{B_j} bezüglich der Basis B_j besitzt, für welche gilt: $x_k^{B_j} = x_k^{B_i}$, $k = 1, \ldots, n, k \neq i, k \neq j$, sowie $x_j^{B_j} = x_i^{B_i}$ und $x_i^{B_j} = 0$. In einem solchen Fall besitzt der betrachtete Vektor bezüglich der kanonischen Basis E_n denselben Wert in den Komponenten i und j. Ist dabei $x^{B_i} \geq 0$ ($\Leftrightarrow$ $x^{B_j} \geq 0$), dann gehört $\nu = W_i x^{B_i} = W_j x^{B_j}$ sowohl zu U_i als auch zu U_j, d.h. ν liegt auf einem gemeinsamen Rand beider Räume. Es soll in diesem Fall davon gesprochen werden, dass die Räume U_i und U_j (in Bezug auf ν) *benachbart* sind. Gilt hingegen für $\nu = W_i x^{B_i}$, dass $x_j^{B_i} > 0$ ist, dann hat ν eine Darstellung x^{B_j} bezüglich der Basis B_j dergestalt, dass $x_i^{B_j} < 0$ sein muss. ν ist folglich nicht in U_j. In einem solchen Fall gelten die Räume U_i und U_j als (in Bezug auf ν) *nicht benachbart*.

Die Suche nach einem Minimum gemäß dem Problem (P_g) erfolgt nun in der Weise, dass, nachdem keine Binnenlösung für das Problem (P_ν) gefunden wurde, die Zielfunktion sukzessive auf sämtlichen (Teil-)Räumen U_i ($i = 1, \ldots, n$) minimiert wird. Die Räume U_i sind dabei so konstruiert, dass nach dem

Koordinatenwechsel die Minimum-Funktion entfällt. Die Minimierung der Zielfunktion auf dem (Teil-)Raum U_i ist Inhalt des im Folgenden beschriebenen (Teil-)Problems (P_i). Die zu dessen Lösung aufzustellenden Optimalitätsbedingungen finden sich — mit geeigneten Variablentransformationen — in Schritt 3 des Algorithmus' $\mathcal{A}2$, d.h. der Schleife, wieder. Die Suche kann abgebrochen werden, wenn das Minimum gefunden wurde. Dies ist genau dann der Fall, wenn ein Vektor $\hat{\nu}$ Lösung des Problems (P_i) und zugleich Lösung zu allen benachbarten Problemen (P_j), welche den zu U_i in Bezug auf $\hat{\nu}$ benachbarten Räumen U_j entsprechen, ist. Dies bedeutet, dass eine Randlösung des Problems (P_i) zugleich Randlösung zu allen i.o.S. angrenzenden Problemen sein muss. Hierbei sei betont, dass die Mengen U_i $(i = 1, \ldots, n)$ und der $\mathbb{R}^n_+$ abgeschlossen sind. Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass eine solche Abbruchbedingung durch die Bedingung (3.76) gegeben ist. Hierzu ist zunächst ein (Teil-)Problem zu formulieren. Für beliebiges $i \in \{1, \ldots, n\}$ lautet das Problem (P_i), für das im Hinblick auf das Ausgangsproblem (P_g) bereits ν durch $W_i x^{B_i}$ substituiert und zudem die Beziehung $-\gamma^{st}\zeta(\nu) = -\gamma^{st}\kappa \min_{j\in\{1,\ldots,n\}}[0, \nu_j] = -\gamma^{st}\kappa\nu_i = \gamma^{st}\kappa x_i^{B_i}$ berücksichtigt ist:

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & g_i(x^{B_i}) & = & \frac{1}{2} \parallel \theta \parallel^2 + \theta'\sigma^{-1}W_i x^{B_i} + \frac{1}{2}(W_i x^{B_i})'(\sigma\sigma')^{-1}W_i x^{B_i} + \gamma^{st}\kappa x_i^{B_i} \\
\text{unter} & -x_k^{B_i} & \leq & 0, \quad k = 1, \ldots, n.
\end{array}
$$

Die Lagrange-Multiplikatoren $\mu_k^{B_i}$ $(k = 1, \ldots, n)$ seien im Vektor μ^{B_i} zusammengefasst. Die Lagrange-Funktion hat nunmehr — unter Vernachlässigung des für die Optimierung irrelevanten konstanten Summanden — die folgende Gestalt:

$$
L_i(x^{B_i}, \mu^{B_i}) = \theta'\sigma^{-1}W_i x^{B_i} + \frac{1}{2}(W_i x^{B_i})'(\sigma\sigma')^{-1}W_i x^{B_i} + \gamma^{st}\kappa x_i^{B_i} - \sum_{k=1}^{n} \mu_k^{B_i} x_k^{B_i}.
$$

Daraus ergeben sich für das Problem (P_i) die folgenden *Karush-Kuhn-Tucker*-Optimalitätsbedingungen für das optimale $(\hat{x}^{B_i}, \hat{\mu}^{B_i})$, wobei hierfür im Folgenden einfach (x^{B_i}, μ^{B_i}) geschrieben wird:

$$
\frac{\partial g_i}{\partial x_i^{B_i}}(x^{B_i}) - \mu_i^{B_i} = 0 \quad = \quad \left[W_i'(\sigma^{-1})'\theta + W_i'(\sigma\sigma')^{-1}W_i x^{B_i}\right]_i + \gamma^{st}\kappa - \mu_i^{B_i}, \tag{5.54}
$$

$$
\frac{\partial g_i}{\partial x_k^{B_i}}(x^{B_i}) - \mu_k^{B_i} = 0 \quad = \quad \left[W_i'(\sigma^{-1})'\theta + W_i'(\sigma\sigma')^{-1}W_i x^{B_i}\right]_k - \mu_k^{B_i}, \quad k = 1, \ldots, n, k \neq i, \tag{5.55}
$$

$$
0 \leq x_k^{B_i}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{5.56}
$$

$$
0 = -\mu_k^{B_i} x_k^{B_i}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{5.57}
$$

$$
0 \leq \mu_k^{B_i}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{5.58}
$$

In Vektorschreibweise erhält das aus den Gl. (5.54) und (5.55) bestehende System die folgende Gestalt:

$$W_i' \left[(\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1} W_i x^{B_i} \right] = \mu^{B_i} - \gamma^{st}\kappa \begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \\ 1 & \} i \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}. \tag{5.59}$$

Der zum Problem (P_g) optimale Schattenpreisvektor $\hat{\nu}$ liegt dann vor, wenn ein $x^{B_i} = (W_i)^{-1}\hat{\nu}$ $(= W_i\hat{\nu})$ gefunden wurde, das mit geeignetem Schattenpreisvektor μ^{B_i} die Gl. (5.54) - (5.58) erfüllt und zugleich das Optimum für sämtliche angrenzenden Probleme $(P_j)\,(j \in \{1, \ldots, n\})$, d.h. mit U_i und U_j in Bezug auf $\hat{\nu}$ benachbart, markiert. Dementsprechend soll im Folgenden, ausgehend von (x^{B_i}, μ^{B_i}) als Lösungstupel zum Problem (P_i), untersucht werden, unter welcher/n Bedingung/en der dadurch gekennzeichnete Vektor $\hat{\nu} = W_i x^{B_i}$ auch Lösung aller angrenzenden Probleme ist. Es wird hierfür die folgende Fallunterscheidung vorgenommen:

1. Fall: $x_i^{B_i} = 0$

In diesem Fall gilt auch $\hat{\nu}_i = 0$, d.h. $\hat{\nu}$ befindet sich auf dem Rand des zum Problem (P_ν) gehörenden Bereiches $\mathbb{R}_+^n$. Aus $\hat{\nu} = W_i x^{B_i}$ folgt für diesen Fall allgemein $\hat{\nu} = x^{B_i}$. Es sind nun die folgenden nach dem Typ angrenzender Probleme differenzierenden Unterfälle zu betrachten:

1.1 Fall: Optimalität für Problem (P_ν)

Ein Vergleich der Gl. (5.55) mit den Gl. (5.48) zeigt, dass für $j = 1, \ldots, n, j \neq i$, unmittelbar $\mu_j^\nu = \mu_j^{B_i}$ gelten muss. (Hierbei ist zu beachten, dass die Matrix W_i' bis auf die i-te Zeile mit der $n \times n$-Einheitsmatrix übereinstimmt.) Betrachtet man die partielle Ableitung der Lagrange-Funktion $L_i(.)$ nach $x_i^{B_i}$, so folgt aus Gl. (5.54) unter zusätzlicher Verwendung des Gleichungssystems (5.48):

$$\begin{aligned} 0 \le \mu_i^{B_i} &= \left[W_i' \left[(\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1} W_i x^{B_i} \right] \right]_i + \gamma^{st}\kappa \\ &= \left[W_i' \left[(\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1} \hat{\nu} \right] \right]_i + \gamma^{st}\kappa \\ &= \left[W_i' \mu^\nu \right]_i + \gamma^{st}\kappa \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \mu_j^\nu + \gamma^{st}\kappa \qquad (5.60) \\ &= -\mu_i^\nu - \sum_{j \neq i} \mu_j^{B_i} + \gamma^{st}\kappa. \qquad (5.61) \end{aligned}$$

Aus der durch (5.61) repräsentierten Gleichung folgt zunächst:

$$0 \le \gamma^{st}\kappa - \sum_{j=1}^{n} \mu_j^\nu. \tag{5.62}$$

Beim Vergleich des Gleichungssystems (5.48) mit dem Ausdruck für den optimalen Portfolio-Prozess nach Gl. (3.46) bzw. (3.57) stellt sich heraus, dass im Optimum:

$$p^{st}_{KE,\hat{\nu}}\gamma^{st} = \mu^{\nu}$$

sein muss. Bezeichnet man der Einfachheit halber den sich bei der Lösung des Problems (P_i) einstellenden (Kandidaten für den optimalen) Portfolio-Prozess mit p^i_{opt} $(= \frac{1}{\gamma^{st}}\mu^{\nu})$, so muss auf Basis der Ungleichung (5.62) gelten:

$$\gamma^{st}\sum_{j=1}^{n} p^i_{opt,j} \leq \gamma^{st}\kappa \;\Leftrightarrow\; \sum_{j=1}^{n} p^i_{opt,j} \leq \kappa.$$

Wegen $\gamma^{st}p^i_{opt,j} = \mu^{\nu}_j = \mu^{B_i}_j \geq 0$ $(j = 1,\ldots,n, j \neq i)$ führt die für das Problem (P_i) gefundene Lösung gemäß Gl. (5.61) dann und nur dann nur zu einer Lösung des Problems (P_ν), wenn gilt:

$$\gamma^{st}\kappa - \sum_{j=1}^{n}\mu^{B_i}_j = \mu^{\nu}_i = \gamma^{st}p^i_{opt,i} \geq 0. \tag{5.63}$$

Insgesamt muss somit die in Schritt 3 geforderte Bedingung (3.76) erfüllt sein. Ist dies gegeben, dann ist die gefundene Lösung x^{B_i} auch optimal für das Problem (P_ν) mit einer Belegung der Schattenpreise, die sich aus dem Vorausgegangenen ergibt. Denn mit der Erfüllung von Bedingung (5.63) sind sämtliche Bedingungen des Systems (5.48)-(5.51) eingehalten, wobei die übrigen Forderungen von einer Lösung (x^{B_i}, μ^{ν}) des Problems (P_i) von selbst erfüllt werden. Im Folgenden sind noch die Randbereiche zu betrachten, welche der Raum U_i mit in Bezug auf x^{B_i} benachbarten Räumen gemein hat.

1.2 Fall: Optimalität für Problem (P_j) $(j \in \tilde{\mathcal{J}} := \{k \in \{1,\ldots,n\} \mid x^{B_i}_k = 0\} \setminus \{i\})$

In diesem Unterfall ist zu untersuchen, ob bzw. unter welchen Bedingungen der Lösungsvektor $x^{B_i} = \hat{\nu}$ zum Problem (P_i) auch als transformierter Vektor $x^{B_j} = (W_j)^{-1}\hat{\nu}$ für jedes Problem (P_j) optimal ist, für welches $\hat{\nu} \in U_j$ gilt. Wie zuvor bereits dargestellt, ist $\hat{\nu}$ genau dann in dem Raum U_j, wenn $x^{B_i}_j = 0$ ist. Für das Problem (P_j) gelten die durch die Gl. (5.54)-(5.58) gegebenen Optimalitätsbedingungen entsprechend; d.h. es ist lediglich der Index i mit dem Index j zu tauschen. Die hieraus entstehenden Gleichheits- bzw. Ungleichheitsbedingungen sollen analog als System (5.54')-(5.58') bezeichnet sein. Die Erfüllung dieser Optimalitätsbedingungen ist nun für $x^{B_j} = W_j\hat{\nu} = W_jW_ix^{B_i}$ bzw. $W_jx^{B_j} = W_jW_jW_ix^{B_i} = (W_j)^{-1}W_jW_ix^{B_i} = W_ix^{B_i}$ zu überprüfen.

1.2.1 Fall: Betrachtung der „Komponente“ k mit $k \neq i \;\wedge\; k \neq j$

Gemäß den zugehörigen Gleichungen aus den Systemen (5.55) und (5.55'), der gerade hergeleiteten Beziehung zwischen x^{B_i} und x^{B_j} sowie unter Beachtung der Struktur von W_i bzw. W_j gilt:

$$\begin{aligned}\mu_k^{B_i} &= \left[W_i'(\sigma^{-1})'\theta + W_i'(\sigma\sigma')^{-1}W_i x^{B_i}\right]_k \\ &= \left[W_i'\left[(\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1}W_j x^{B_j}\right]\right]_k \\ &= \left[(\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1}W_j x^{B_j}\right]_k \\ &= \left[W_j'\left[(\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1}W_j x^{B_j}\right]\right]_k \\ &= \mu_k^{B_j}.\end{aligned}$$

Die Schattenpreise zu sämtlichen von i und j verschiedenen Komponenten k müssen also in den Lösungen der Probleme (P_i) und (P_j) übereinstimmen. Insbesondere folgt aus $x_k^{B_i} > 0$ mit Gl. (5.57) zunächst $\mu_k^{B_i} = 0$, woraus sich also auch $\mu_k^{B_j} = 0$ ableiten lässt.

1.2.2 Fall: Betrachtung der „Komponente“ $k = i \neq j$ zum Problem (P_i)

Aus Gl. (5.54) und dem Gleichungssystem (5.54')-(5.55'), in der Darstellung der Gl. (5.59), für welche wiederum i durch j zu ersetzen ist, ergibt sich für den transformierten Vektor x^{B_j}:

$$\begin{aligned}0 \le \mu_i^{B_i} &= \left[W_i'\left[(\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1}W_j x^{B_j}\right]\right]_i + \gamma^{st}\kappa \\ &= \left[W_i'(W_j')^{-1}\left[\mu^{B_j} - \gamma^{st}\kappa(0,\ldots,0,\underbrace{1}_{j},0,\ldots,0)'\right]\right]_i + \gamma^{st}\kappa \\ &= \left[(W_j W_i)'\left[\mu^{B_j} - \gamma^{st}\kappa(0,\ldots,0,\underbrace{1}_{j},0,\ldots,0)'\right]\right]_i + \gamma^{st}\kappa \\ &= \mu_j^{B_j} - \gamma^{st}\kappa + \gamma^{st}\kappa = \mu_j^{B_j}.\end{aligned}$$

Die Nicht-Negativitätsbedingung für $\mu_j^{B_j}$ ist erfüllt, da sie nach Voraussetzung für $\mu_i^{B_i}$ erfüllt ist.

1.2.3 Fall: Betrachtung der „Komponente“ $k = j \neq i$ zum Problem (P_i)

Aus der mit $k = j$ charakterisierten Gleichung des Systems (5.55), dem System (5.54')-(5.55') sowie aus den Resultaten der vorausgehend behandelten *Fälle 1.1, 1.2.1* und *1.2.2*, wonach $\mu_k^{B_j} = \mu_k^{B_i} (= \mu_k^{\nu})$, $k = 1,\ldots,n, k \neq i, k \neq j$, und $\mu_i^{B_i} = \mu_j^{B_j}$ (sowie $\mu_j^{B_i} = \mu_j^{\nu}$) gelten, folgt:

$$\begin{aligned}0 \le \mu_j^{B_i} &= \left[W_i'\left[(\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1}W_j x^{B_j}\right]\right]_j \\ &= \left[(\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1}W_j x^{B_j}\right]_j \\ &= -\left[W_j'\left[(\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1}W_j x^{B_j}\right]\right]_j - \sum_{k\neq j}\mu_k^{B_j} \\ &= \gamma^{st}\kappa - \mu_j^{B_j} - \mu_i^{B_j} - \sum_{k\neq j,i}\mu_k^{B_j} = \gamma^{st}\kappa - \mu_i^{B_i} - \mu_i^{B_j} - \sum_{k\neq j,i}\mu_k^{B_i}.\end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\mu_i^{B_j} = \gamma^{st}\kappa - \sum_{k=1}^{n}\mu_k^{B_i}.$$

Wie bereits in *Fall 1.1* abgeleitet, entspricht die Bedingung, dass die rechte Seite dieser Gleichung nicht negativ sein muss, der Bedingung (5.63), welche die Abbruchbedingung des Schrittes 3 widerspiegelt. Damit ergibt sich, den *Fall 1* zusammenfassend, dass $x^{B_j} = W_j W_i x^{B_i}$ dann und nur dann Lösung des Problems (P_j) ist, wenn für die Lösung des Problems (P_i):

$$\gamma^{st}\kappa - \sum_{k=1}^{n} \mu_k^{B_i} \geq 0$$

ist. Im Folgenden geht es nun um eine Situation, in der sich die Lösung des Problems (P_g) nicht im abgeschlossenen Raum $\mathbb{R}_+^n$ befindet.

2. Fall: $x_i^{B_i} > 0$

Dieser Fall beinhaltet die Situation $\hat{\nu} \notin \mathbb{R}_+^n$. Aus dem Gleichungssystem (5.57) mit $k = i$ folgt unmittelbar $\mu_i^{B_i} = 0$. Mit $\gamma^{st} p_{opt}^i = \left[(\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1} \underbrace{\hat{\nu}}_{=W_i x^{B_i}}\right]$ ergibt somit aus Gl. (5.54):

$$\sum_{j=1}^{n} p_{opt,j}^i = \kappa.$$

Wird eine Lösung für diesen zweiten Fall gefunden, dann bedeutet dies, dass die Verschuldungsrestriktion (nach oben) durch κ bindend ist. Im Vergleich mit dem Ergebnis aus *Abschnitt 3.2*[524] ist dann auch ein Wert der Funktion $\zeta(.)$ größer als null möglich. Entsprechend dem *Fall 1* ist die Lösung zum Problem (P_i) dann und nur dann Lösung des Problems (P_g), wenn sie zugleich Lösung zu sämtlichen angrenzenden Problemen ist. Im Unterschied zum vorausgehenden, ersten Fall ist (P_ν) nun allerdings kein angrenzendes Problem mehr, d.h. die Überprüfung der Optimalität kann auf Probleme (P_j) $(j \in \tilde{\mathcal{J}} := \{k \in \{1,\ldots,n\} \mid x_k^{B_i} = 0\} \setminus \{i\})$ beschränkt bleiben. Im Folgenden werde ein beliebiges $j \in \tilde{\mathcal{J}}$ betrachtet.

2.1 Fall: Betrachtung der „Komponente" k mit $k \neq i, k \neq j$

Dieser Fall ist analog zu behandeln wie der *Fall 1.2.1*. Es gilt somit $\mu_k^{B_i} = \mu_k^{B_j}$. Im Fall von $x_k^{B_i} > 0$ ist dabei $\mu_k^{B_i} = \mu_k^{B_j} = 0$.

2.2 Fall: Betrachtung der „Komponente" $k = i \neq j$ zum Problem (P_i)

Entsprechend der Darstellung des *Falles 1.2.2* gilt:

$$\begin{aligned}
\mu_i^{B_i} &= \left[W_i' \left[(\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1} W_i x^{B_i}\right]\right]_i + \gamma^{st}\kappa \\
&= \left[W_j' \left[(\sigma^{-1})'\theta + (\sigma\sigma')^{-1} W_j x^{B_j}\right]\right]_j + \gamma^{st}\kappa \\
&= \mu_j^{B_j}.
\end{aligned}$$

Allerdings ist wegen Gl. (5.57) mit $x_i^{B_i} > 0$ der Schattenpreis null, d.h. $\mu_i^{B_i} = 0$. Dies überträgt sich folglich auf $\mu_j^{B_j}$, so dass sich die Verschuldungsrestriktion bezüglich κ ebenso aus Sicht einer Lösung des Problems (P_j) als bindend zeigt.

[524] Speziell vgl. S. 153.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

2.3 Fall: Betrachtung der „Komponente“ $k = j$ zum Problem (P_i)

Da es sich bei U_j um einen in Bezug auf $\hat{\nu}$ benachbarten Raum zu U_i handelt, muss $x_j^{B_i} = 0$ gelten, so dass $\mu_j^{B_i} \geq 0$ nicht weiter eingeschränkt ist, also i.d.R. echt positiv sein wird. Auch hier kann auf *Fall 1*, speziell *Fall 1.2.3*, unter analoger Berücksichtigung der Ergebnisse aus den *Fällen 2.1* und *2.2* zurückgegriffen werden. Es gilt somit:

$$\mu_i^{B_j} = \gamma^{st}\kappa - \sum_{k=1}^{n} \mu_k^{B_i} \geq 0 \tag{5.64}$$

und Problem (P_j) wird durch $(x^{B_j} = W_{ji}x^{B_i}, \mu^{B_j})$ gelöst, wenn diese mit dem zweiten Teil der Abbruchbedingung des Schrittes 3 übereinstimmende Bedingung erfüllt ist. Damit ist die durch die Bedingung (5.64) formulierte Anforderung an alle $j \in \tilde{\mathcal{J}}$ zusammen mit der sich im Rahmen einer Lösung des Problems (P_i) von selbst einstellenden Nicht-Negativität der optimalen Beteiligungsquoten notwendig und hinreichend für eine Lösung des Problems (P_g).

5.5 Ergänzungen zur myopischen Optimierung der Konzernbeteiligungen

5.5.1 Implementierung des Verfahrens

Gegenstand dieses Abschnittes ist die Angabe eines Maple-Programmes zur Ermittlung optimaler Beteiligungsquoten an Konzernunternehmen im 0-1-Fall sowie im Intervall-Fall entsprechend der Darstellung in *Abschnitt 3.3.2.3*. Die Entscheidung für eine spezifische Konzernstruktur ist im 0-1-Fall an das Ergebnis einer Simulation des Erwartungsnutzens aus dem Endvermögen geknüpft. Dies ist im folgenden Programm umgesetzt — ebenso wie die ergänzende Erwartungsnutzenberechnung im Intervall-Fall. Beide Fälle werden im Folgenden parallel simuliert, d.h. es wird, ausgehend von einer speziellen Parametersituation, sowohl der 0-1-Fall als auch der Intervall-Fall für dieselben Zufallsergebnisse simuliert. Bei isolierter Anwendung eines der beiden Fälle ist das Maple-Programm entsprechend um die dem jeweils anderen Fall zugehörigen Teile zu kürzen. Die bei einer Anwendung notwendigen Anpassungen betreffen ansonsten lediglich die Optimierungsparameter, welche in der Prozedur *defin* definiert sind. Die Einbeziehung nicht konstanter Parameter-Prozesse in die angegebene Simulation würde zusätzliche Prozeduren zur Wertbestimmung der Prozesswerte erfordern. Auf eine solche Erweiterung, welche, sofern die Parameter-Prozesse die Markov-Eigenschaft aufweisen, problemlos vorgenommen werden könnte, wurde verzichtet. Es ist noch auf Folgendes hinzuweisen: Zum einen wird hinsichtlich der Simulation von Zufallszahlen auf den in Maple integrierten Zufallszahlengenerator zurückgegriffen. Die dabei zur Verfügung stehenden gleichverteilten Zufallszahlen werden in der Prozedur *zufallsub* mit der Methode von *Marsaglia*, wie sie in *Seydel* (2000), S. 46 f., beschrieben ist[525], in normalverteilte Zufallsvariablen transformiert. Für die Restriktionenformulierung im Intervall-Fall wird vereinfachend davon ausgegangen, dass sich der Portfolio-Prozess für sämtliche Portfolio-Variablen in einem Intervall zwischen einer endlichen Unter- und einer endlichen Obergrenze bewegen muss; bezüglich der Wertpapiere mit vollständig handelbaren Risiken sind die Intervallgrenzen allerdings so gewählt, dass die Restriktion nicht bindend sein wird, so dass das Ergebnis hiervon unbeeinflusst ist. Bezüglich des Intervall-Falles stellt die Bestimmung eines optimalen Schattenpreisvektors eine Implementierung des in *Abschnitt 3.3.2.2* beschriebenen Verfahrens dar[526]. Nach der Darstellung des Programmes werden in einer Tabelle die Erwartungsnutzenwerte präsentiert, welche sich mit der angegebenen Spezifizierung der Modell- und Simulationsparameter bei einem Testdurchlauf ergeben haben. Hierbei liegt eine Situation mit drei Konzernunternehmen und vier vollständig handelbaren Wertpapieren vor.

Das Maple-Programm lautet nun wie folgt:

```
with(linalg):
with(stats):
#Monte Carlo Simulation
#zur Optimierung der Beteiligungsverhaeltnisse im Konzern
#und Bestimmung des Erwartungsnutzens aus dem entstehenden
#Endvermögen
#Aufruf der Simulation (nach Spezifikation der Parameter)

haupt(1);

#Hauptprogramm

haupt := proc(start) local i,j;
global a,abbruch,abq,ahilf01,ahilfi,anz1,anz2,a1,a2,
b,bbq,bdrift,bdriftn1max,bdriftn1q,bdriftn2,bdriftq,
beta,beta1,bool,bool1,b1,b2,c,
d,dn1,dn1max,dn1q,dn2,df,dfoc,dq,dt,dW,dWq,dW0,
dXh,dXhd,dXhilf,dXhst,dXl,dXld,dXlst,dz,dz0,
einsnmax,einsn1max,einsn1q,einsn2,fk,
ig,il,in1,jnmax,j1,j1a,j2,kn1,kpotlist,kpotlisthilf,list,list1,
nmax,nueil,nueilst,nueih,nueihst,nulln1max,nulln2,n1,n1max,n2,
ph,phiil,phiilst,phiih,phiihst,phq,phst,phstq,
pi,pil,pilst,pih,pihst,pl,plq,plst,plstq,r,
s,sd1,sd1q,sd2,sd2q,sq,sqq,st,ste,s0,s0q,s1,S,Sq,So0,
t,theta,T,v,v0,vn1,vn2,
```

[525] Ein entsprechender Hinweis findet sich nochmals im Programmtext.
[526] Vgl. hierzu den Hinweis Fn. 337, S. 179.

```
V0,V0n1,V0n1q,V0n2,V0n2q,V1n1,V1n1q,V1n2,V1,V2n1,V2n2,V2,W,W0,
x,xq,Xh,Xhd,Xhst,Xih,Xihst,Xil,Xilst,Xl,Xld,Xlst,X0,
y,yh,yhq,yhst,yhstq,yl,ylq,ylst,ylstq,
z,zaehler,zeta,zmat,pihilf,phihilf,
Xila,Xilsta,Xiha,Xihsta,dXila,dXilsta,dXiha,dXihsta,
piila,piilsta,piiha,piihsta,phiila,phiilsta,phiiha,phiihsta,
vila,vilsta,viha,vihsta,V1a;

globalinit();
for ig from 1 to anz2 do
V1n1 := evalm(V0n1);
V1n2 := evalm(V0n2);
V1 := evalm(V0);
V2n1 := evalm(V0n1);
V2n2 := evalm(V0n2);
V2 := evalm(V0);
dW := evalm(dW0);
W := evalm(W0);
v := evalm(v0);
dz := evalm(dz0);
a := evalm(abq);
a1 := evalm(abq);
a2 := evalm(abq);
b := evalm(bbq);
b1 := evalm(bbq);
b2 := evalm(bbq);
t := 0;
kn1 := 0;
in1 := 0;
schleife(1);
od;

#Ergebnisausgabe
writedata(Xlf, Xl);
fclose(Xlf);
writedata(Xlstf, Xlst);
fclose(Xlstf);
writedata(Xhf, Xh);
fclose(Xhf);
writedata(Xhstf, Xhst);
fclose(Xhstf);
writedata(Xilf, Xil);
fclose(Xilf);
writedata(Xilstf, Xilst);
fclose(Xilstf);
writedata(Xihf, Xih);
```

```
fclose(Xihf);
writedata(Xihstf, Xihst);
fclose(Xihstf);
writedata(pilf, pil);
fclose(pilf);
writedata(phiilf, phiil);
fclose(phiilf);
writedata(nueilf, nueil);
fclose(nueilf);
writedata(pilstf, pilst);
fclose(pilstf);
writedata(phiilstf, phiilst);
fclose(phiilstf);
writedata(nueilstf, nueilst);
fclose(nueilstf);
writedata(pihf, pih);
fclose(pihf);
writedata(phiihf, phiih);
fclose(phiihf);
writedata(nueihf, nueih);
fclose(nueihf);
writedata(pihstf, pihst);
fclose(pihstf);
writedata(phiihstf, phiihst);
fclose(phiihstf);
writedata(nueihstf, nueihst);
fclose(nueihstf);
end; #haupt

#Einzelprozeduren im Hauptprogramm
#Globale Initialisierung

globalinit := proc() global a,abbruch,abq,ahilf01,ahilfi,anz1,
anz2,a1,a2,b,bbq,bdrift,bdriftn1max,bdriftn1q,bdriftn2,bdriftq,
beta,beta1,bool,bool1,b1,b2,c,
d,dn1,dn1max,dn1q,dn2,df,dfoc,dq,dt,dW,dWq,dW0,
dXh,dXhd,dXhilf,dXhst,dXl,dXld,dXlst,dz,dz0,
einsnmax,einsn1max,einsn1q,einsn2,fk,
ig,il,in1,jnmax,j1,j1a,j2,kn1,kpotlist,kpotlisthilf,list,list1,
nmax,nueil,nueilst,nueih,nueihst,nulln1max,nulln2,n1,n1max,n2,
ph,phiil,phiilst,phiih,phiihst,phq,phst,phstq,
pi,pil,pilst,pih,pihst,pl,plq,plst,plstq,r,
s,sd1,sd1q,sd2,sd2q,sq,sqq,st,ste,s0,s0q,s1,S,Sq,So0,
t,theta,T,v,v0,vn1,vn2,
V0,V0n1,V0n1q,V0n2,V0n2q,V1n1,V1n1q,V1n2,V1,V2n1,V2n2,V2,W,W0,
x,xq,Xh,Xhd,Xhst,Xih,Xihst,Xil,Xilst,Xl,Xld,Xlst,X0,
```

```
y,yh,yhq,yhst,yhstq,yl,ylq,ylst,ylstq,
z,zaehler,zeta,zmat,pihilf,phihilf,
Xila,Xilsta,Xiha,Xihsta,dXila,dXilsta,dXiha,dXihsta,
piila,piilsta,piiha,piihsta,phiila,phiilsta,phiiha,phiihsta,
vila,vilsta,viha,vihsta,V1a;

#maximale Anzahl Konzernunternehmen
#(zugleich Anzahl der nicht hedgbaren Unsicherheitsquellen)
n1max := 3;
#Anzahl der vollständig gehandelten Wertpapiere
n2 := 4;
#maximale Gesamtzahl der Aktien für den relevanten Markt des
Unternehmens
nmax := n1max + n2;
#Variablen für Stichprobenumfang
anz1 := 51; #Pfadlaenge (eine Stichprobe)
            #= Anzahl der Zufallseinfluesse + 1
anz2 := 50; #Pfadbreite (Anzahl Stichprobenziehungen)
#Parameter für ‘Power-type‘-Nutzenfunktion
 beta := 0.5;
#Anfangsvermögen
X0 := 2000000;

#Vermögensentwicklung (Initialisierung)
#Matrizen der Vermögensentwicklung im 0-1-Fall für jedes
#Element der Potenzmenge = Kombination von Investitions-
#objekten; differenziert nach jeweils betrachteter
#Nutzenfunktion (l: ln(x); h: 1/beta*x^beta);
#je 3 Matrizen:
#1. Matrix für Differentialentwicklung ohne Steuern,
#2. Matrix für Differentialentwicklung mit Steuern,
#3. Matrix für analytische Entwicklung (ohne Steuern);
Initialisierung:
Xl := matrix(anz2,2^n1max,[seq(X0, i = 1..anz2*2^n1max)]);
Xlst := matrix(anz2,2^n1max,[seq(X0, i = 1..anz2*2^n1max)]);
Xld := matrix(anz2,2^n1max,[seq(0, i = 1..anz2*2^n1max)]);
Xh := matrix(anz2,2^n1max,[seq(X0, i = 1..anz2*2^n1max)]);
Xhst := matrix(anz2,2^n1max,[seq(X0, i = 1..anz2*2^n1max)]);
Xhd := matrix(anz2,2^n1max,[seq(0, i = 1..anz2*2^n1max)]);
dXl := matrix(anz2,2^n1max,[seq(0, i = 1..anz2*2^n1max)]);
dXlst := matrix(anz2,2^n1max,[seq(0, i = 1..anz2*2^n1max)]);
dXld := matrix(anz2,2^n1max,[seq(0, i = 1..anz2*2^n1max)]);
dXh := matrix(anz2,2^n1max,[seq(0, i = 1..anz2*2^n1max)]);
dXhst := matrix(anz2,2^n1max,[seq(0, i = 1..anz2*2^n1max)]);
dXhd := matrix(anz2,2^n1max,[seq(0, i = 1..anz2*2^n1max)]);
```

```
#Skalar der Vermögensentwicklung im Intervallfall; differen-
#ziert nach Nutzenfunktion und mit oder ohne Steuern
Xil := matrix(anz2,1,[seq(X0, i = 1..anz2)]);
Xilst := matrix(anz2,1,[seq(X0, i = 1..anz2)]);
Xih := matrix(anz2,1,[seq(X0, i = 1..anz2)]);
Xihst := matrix(anz2,1,[seq(X0, i = 1..anz2)]);
Xila := matrix(anz2,anz1,[seq(X0, i = 1..anz2*anz1)]);
Xilsta := matrix(anz2,anz1,[seq(X0, i = 1..anz2*anz1)]);
Xiha := matrix(anz2,anz1,[seq(X0, i = 1..anz2*anz1)]);
Xihsta := matrix(anz2,anz1,[seq(X0, i = 1..anz2*anz1)]);
dXila := matrix(anz2,anz1-1,[seq(0, i = 1..anz2*(anz1-1))]);
dXilsta := matrix(anz2,anz1-1,[seq(0, i = 1..anz2*(anz1-1))]);
dXiha := matrix(anz2,anz1-1,[seq(0, i = 1..anz2*(anz1-1))]);
dXihsta := matrix(anz2,anz1-1,[seq(0, i = 1..anz2*(anz1-1))]);
piila := matrix(anz2,(anz1-1)*nmax,[seq(0, i =
1..anz2*(anz1-1)*nmax)]);
piilsta := matrix(anz2,(anz1-1)*nmax,[seq(0, i =
1..anz2*(anz1-1)*nmax)]);
piiha := matrix(anz2,(anz1-1)*nmax,[seq(0, i =
1..anz2*(anz1-1)*nmax)]);
piihsta := matrix(anz2,(anz1-1)*nmax,[seq(0, i =
1..anz2*(anz1-1)*nmax)]);
phiila := matrix(anz2,(anz1-1)*nmax,[seq(0, i =
1..anz2*(anz1-1)*nmax)]);
phiilsta := matrix(anz2,(anz1-1)*nmax,[seq(0, i =
1..anz2*(anz1-1)*nmax)]);
phiiha := matrix(anz2,(anz1-1)*nmax,[seq(0, i =
1..anz2*(anz1-1)*nmax)]);
phiihsta := matrix(anz2,(anz1-1)*nmax,[seq(0, i =
1..anz2*(anz1-1)*nmax)]);
vila := matrix(anz2,(anz1-1)*nmax,[seq(0, i =
1..anz2*(anz1-1)*nmax)]);
vilsta := matrix(anz2,(anz1-1)*nmax,[seq(0, i =
1..anz2*(anz1-1)*nmax)]);
viha := matrix(anz2,(anz1-1)*nmax,[seq(0, i =
1..anz2*(anz1-1)*nmax)]);
vihsta := matrix(anz2,(anz1-1)*nmax,[seq(0, i =
1..anz2*(anz1-1)*nmax)]);
V1a := matrix(anz2,anz1*nmax,[seq(0, i = 1..anz2*anz1*nmax)]);

#Wertentwicklungs-, Marktdaten (zeitkonstant)
sq := matrix(n1max,n2,[0.01, 0.09, 0.00, 0.03,
0.03, 0.02, 0.00, 0.03, 0.02, 0.03, 0.09, 0.03]);
sd2 := matrix(n1max,n1max,[0.10, 0.00, 0.00,
0.00, 0.11, 0.00, 0.00, 0.00, 0.09]);
```

```
sd1 := matrix(n2,n2,[0.10, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.07,
0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.09, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.08]);
s0 := matrix(n2, n1max,[seq(0, i = 1..n2*n1max)]);
s := stackmatrix(concat(sq,sd2),concat(sd1,s0));
bdriftn1max := matrix(n1max, 1, [0.061, 0.057, 0.053]);
bdriftn2 := matrix(n2, 1, [0.065, 0.060, 0.0525, 0.0675]);
bdrift := stackmatrix(bdriftn1max, bdriftn2);
dn1max := matrix(n1max, 1, [0.01, 0.01, 0.015]);
dn2 := matrix(n2, 1, [0.00, 0.00, 0.00, 0.00]);
d := stackmatrix(dn1max, dn2);
r := 0.050;
#Steuersatz
st := 0.25;

#Anfangswerte
#risikoloses Wertpapier
So0 := 1;
#Aktienwerte (zunächst n1max, dann n2)
V0n1 := matrix(n1max, 1, [1800000, 900000, 1100000]);
V0n2 := matrix(n2, 1, [100000, 100000, 100000, 100000]);
V0 := stackmatrix(V0n1,V0n2);
V1n1 := matrix(n1max, 1, [1800000, 900000, 1100000]);
V1n2 := matrix(n2, 1, [100000, 100000, 100000, 100000]);
V1 := stackmatrix(V1n1,V1n2);
V2n1 := matrix(n1max, 1, [1800000, 900000, 1100000]);
V2n2 := matrix(n2, 1, [100000, 100000, 100000, 100000]);
V2 := stackmatrix(V2n1,V2n2);

#Entwicklungs- und Ergebnisfiles
#Schattenpreisvariablen (für Intervallfall), Entwicklung,
#differenziert nach Nutzenfunktion sowie mit und ohne Steuern
nueil := matrix(anz1-1, nmax, [seq(-10, i=1..(anz1-1)*nmax)]);
nueilst := matrix(anz1-1, nmax, [seq(-10,
i=1..(anz1-1)*nmax)]);
nueih := matrix(anz1-1, nmax, [seq(-10, i=1..(anz1-1)*nmax)]);
nueihst := matrix(anz1-1, nmax, [seq(-10,
i=1..(anz1-1)*nmax)]);

#Beteiligungsquoten, Stand und Entwicklung, differenziert nach
#Nutzenfunktion, jeweils mit und ohne Steuern
#Intervallfall (für ein ausgewähltes j in 1,..., anz2):
pil := matrix(anz1-1, nmax, [seq(-10, i=1..(anz1-1)*nmax)]);
pilst := matrix(anz1-1, nmax, [seq(-10, i=1..(anz1-1)*nmax)]);
pih := matrix(anz1-1, nmax, [seq(-10, i=1..(anz1-1)*nmax)]);
pihst := matrix(anz1-1, nmax, [seq(-10, i=1..(anz1-1)*nmax)]);
```

```
#Intervallfall:
phiil := matrix(anz1-1, nmax, [seq(-10, i=1..(anz1-1)*nmax)]);
phiilst := matrix(anz1-1, nmax, [seq(-10,
i=1..(anz1-1)*nmax)]);
phiih := matrix(anz1-1, nmax, [seq(-10, i=1..(anz1-1)*nmax)]);
phiihst := matrix(anz1-1, nmax, [seq(-10,
i=1..(anz1-1)*nmax)]);

#Zeitlaenge und Zufallselement
T := 2; #Planungshorizont in Jahren
#Laenge des Intervalls zwischen Zufallsereignissen
dt := T/(anz1-1);
#Zufallselement
W0 := matrix(nmax, 1, [seq(0, i=1..nmax)]);
dW0 := matrix(nmax, 1, [seq(0, i=1..nmax)]);
dz0 := matrix(nmax, 1, [seq(0, i=1..nmax)]);
W := matrix(nmax, 1, [seq(0, i=1..nmax)]);
dW := matrix(nmax, 1, [seq(0, i=1..nmax)]);
dz := matrix(nmax, 1, [seq(0, i=1..nmax)]);

#Initialisierung von veraenderlichen Variablen
#endliche Untergrenzen fuer die Beteiligungsquoten
#(als Vielfaches des EK)
abq := matrix(nmax, 1, [0.00, 0.00, 0.00, -1000.00,
-1000.00, -1000.00, -1000.00]);
#endliche Obergrenzen fuer die Beteiligungsquoten
#(als Vielfaches des EK)
bbq := matrix(nmax, 1, [1.00, 1.00, 1.00, 1000.00,
1000.00, 1000.00, 1000.00]);
#Initialisierung der Untergrenzen fuer den Anteil der
#Investition in die Konzernunternehmen
a1 := matrix(nmax, 1, [0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00,
0.00]);
#Initialisierung der Untergrenzen fuer den Anteil der
#Investition in die Konzernunternehmen
b1 := matrix(nmax, 1, [1.00, 1.00, 1.00, 1.00, 1.00, 1.00,
1.00]);
#Initialisierung der Untergrenzen fuer das Optimierungsprogramm
a := matrix(nmax, 1, [0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00,
0.00]);
#Initialisierung der Untergrenzen fuer das Optimierungsprogramm
b := matrix(nmax, 1, [1.00, 1.00, 1.00, 1.00, 1.00, 1.00,
1.00]);
t := 0;
zeta := matrix(1,1,[0]);
plq := matrix(n2, 1, [seq(-10, i=1..n2)]);
```

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

```
plstq := matrix(n2, 1, [seq(-10, i=1..n2)]);
phq := matrix(n2, 1, [seq(-10, i=1..n2)]);
phstq := matrix(n2, 1, [seq(-10, i=1..n2)]);
yl := matrix(n1max, 1, [seq(-10, i=1..n1max)]);
ylst := matrix(n1max, 1, [seq(-10, i=1..n1max)]);
yh := matrix(n1max, 1, [seq(-10, i=1..n1max)]);
yhst := matrix(n1max, 1, [seq(-10, i=1..n1max)]);
pi := matrix(nmax, 1, [seq(-10, i=1..nmax)]);
pihilf := matrix(nmax, 1, [seq(-10, i=1..nmax)]);
phihilf := matrix(nmax, 1, [seq(-10, i=1..nmax)]);
dWq := matrix(nmax, 1, [seq(0, i=1..nmax)]);
einsn2 := matrix(n2, 1, [seq(1, i=1..n2)]);
einsn1max := matrix(n1max, 1, [seq(1, i=1..n1max)]);
einsnmax := matrix(nmax, 1, [seq(1, i=1..nmax)]);
nulln1max := matrix(n1max, 1, [seq(0, i=1..n1max)]);
nulln2 := matrix(n2, 1, [seq(0, i=1..n2)]);
kn1 := 0;
in1 := 0;
vn1 := matrix(n1max, 1, [seq(-10, i=1..n1max)]);
vn2 := matrix(n2, 1, [seq(-10, i=1..n2)]);
v0 := stackmatrix(vn1, vn2);
v := stackmatrix(vn1, vn2);
il := matrix(1, n1max, [seq(i, i=1..n1max)]);
ahilf01 := matrix(1, 2^n1max, [seq(0, i=1..2^n1max)]);
ahilfi := matrix(1, 1, [0]);
j1a := 0;
j1 := 0;
j2 := matrix(1,1, [0]); #Testvariable
jnmax := matrix(nmax, 1, [seq(0, i=1..nmax)]); #Testvariable
dXhilf := matrix(1,1,[0]);
end; #Prozedur globalinit

#Schleife
schleife := proc(kn1) local i,j,jn,ma,q,zu;
global a,abbruch,abq,ahilf01,ahilfi,anz1,anz2,a1,a2,
b,bbq,bdrift,bdriftn1max,bdriftn1q,bdriftn2,bdriftq,
beta,beta1,bool,bool1,b1,b2,c,
d,dn1,dn1max,dn1q,dn2,df,dfoc,dq,dt,dW,dWq,dW0,
dXh,dXhd,dXhilf,dXhst,dXl,dXld,dXlst,dz,dz0,
einsnmax,einsn1max,einsn1q,einsn2,fk,
ig,il,in1,jnmax,j1,j1a,j2,kpotlist,kpotlisthilf,list,list1,
nmax,nueil,nueilst,nueih,nueihst,nulln1max,nulln2,n1,n1max,n2,
ph,phiil,phiilst,phiih,phiihst,phq,phst,phstq,
pi,pil,pilst,pih,pihst,pl,plq,plst,plstq,r,
s,sd1,sd1q,sd2,sd2q,sq,sqq,st,ste,s0,s0q,s1,S,Sq,So0,
```

```
t,theta,T,v,vn1,vn2,
V0,V0n1,V0n1q,V0n2,V0n2q,V1n1,V1n1q,V1n2,V1,V2n1,V2n2,V2,W,W0,
x,xq,Xh,Xhd,Xhst,Xih,Xihst,Xil,Xilst,Xl,Xld,Xlst,X0,
y,yh,yhq,yhst,yhstq,yl,ylq,ylst,ylstq,
z,zaehler,zeta,zmat,pihilf,phihilf,
Xila,Xilsta,Xiha,Xihsta,dXila,dXilsta,dXiha,dXihsta,
piila,piilsta,piiha,piihsta,phiila,phiilsta,phiiha,phiihsta,
vila,vilsta,viha,vihsta,V1a;

#Generierung des Zufallsvektors
zufall(in1);
W := evalm(matadd(W, dW));

#Bestimmung des Beteiligungsvektors
#0-1-Fall: Für jede mögliche Konzernstruktur ist der
#myopisch-optimale Beteiligungsvektor zu bestimmen, zudem
#wird der Vermögensprozess fortentwickelt. Beides erfolgt
 #in der Subprozedur "beteiligungsberechnung"
kpotlist := [];
kpotlisthilf := [];
list1 := [];
ma := 0;
fk := 1;
beteiligungsberechnung(list1, fk, ig);
for i from 1 to n1max do
kpotlisthilf := kpotlist;
if i > 1 then
for j from 1 to ma do
list1 := kpotlisthilf[1];
kpotlisthilf := subsop(1=NULL,kpotlisthilf);
list1 := [op(list1),i];
fk := fk +1;
beteiligungsberechnung(list1, fk, ig);
kpotlist := [op(kpotlist),list1];
od;
fk := fk + 1;
list1 := [i];
beteiligungsberechnung(list1, fk, ig);
kpotlist := [op(kpotlist),[i]];
else
kpotlist := [[1]];
fk := fk +1;
list1 := kpotlist[1];
beteiligungsberechnung(list1, fk, ig);
fi;
ma := 2*ma + 1;
```

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

```
od;
#Bestimmung des Beteiligungsvektors
#und der Vermögensentwicklung im Intervallfall
#Unter- und Obergrenzen fuer die Beteiligungsquoten
in1 := kn1; #Zaehler fuer Anzahl der Durchlaeufe;
#Schleife wird mit "1" aufgerufen
t := t + dt;
zu := 0;
#Elementauswahl für Aufzeichnung eines Beteiligungspfades
j := iquo(anz2,2) + irem(anz2,2);
einsnmax := stackmatrix(einsn1max, einsn2);
#Optimierung für Fälle mit Differenzierung nach Nutzenfunktion
#sowie mit und ohne Steuern
#1. U(x) = ln(x), ohne Steuern
for i from 1 to nmax do
if Xil[ig,1]<>0 then a1[i,1] := abq[i,1]*V1[i,1]/Xil[ig,1]
else a1[i,1] := abq[i,1]*10000; fi;
if Xil[ig,1]<>0 then b1[i,1] := bbq[i,1]*V1[i,1]/Xil[ig,1]
else b1[i,1] := bbq[i,1]*10000; fi;
od;
a := evalm(a1);
b := evalm(b1);
v := evalm(scalarmul(einsnmax, -10));
optimierung(0, 0); #st = 0 und beta = 0
pi := evalm(scalarmul(einsnmax, -10));
pi := evalm(multiply(inverse(multiply(s, transpose(s))),
matadd(matadd(matadd(bdrift,d),scalarmul(einsnmax,-r)),v)));
if ig = j then
for i from 1 to nmax do
pil[in1,i] := pi[i,1];
phiil[in1,i] := pi[i,1]*Xil[ig,1]/V1[i,1];
nueil[in1,i] := v[i,1];
od;
fi;
#Vermögensentwicklung
dXhilf[1,1] := 0;
dXhilf := evalm(matadd(scalarmul(multiply(transpose(pi),
matadd(matadd(bdrift,d),scalarmul(einsnmax,-r))),dt),
multiply(transpose(pi),multiply(s,dW))));
if not Xil[ig,1] = 0 then
for k from 1 to nmax do
piila[ig,j1a+k] := pi[k,1];
phiila[ig,j1a+k] := pi[k,1]*Xil[ig,1]/V1[k,1];
```

```
vila[ig,j1a+k] := v[k,1];
od;
Xil[ig,1] := evalf(max(Xil[ig,1]*(1 + r*dt + dXhilf[1,1]),0));
fi;

#2. U(x) = ln(x), mit Steuern
for i from 1 to nmax do
if Xilst[ig,1]<>0 then a1[i,1] := abq[i,1]*V1[i,1]/Xilst[ig,1]
else a1[i,1] := abq[i,1]*10000; fi;
if Xilst[ig,1]<>0 then b1[i,1] := bbq[i,1]*V1[i,1]/Xilst[ig,1]
else b1[i,1] := bbq[i,1]*10000; fi;
od;
a1 := evalm(scalarmul(a1, 1-st));
b1 := evalm(scalarmul(b1, 1-st));
a := evalm(a1);
b := evalm(b1);
v := evalm(scalarmul(einsnmax, -10));
optimierung(st, 0); #st = ... und beta = 0
pi := evalm(scalarmul(einsnmax, -10));
pi := evalm(scalarmul(multiply(inverse(multiply(s,
transpose(s))), matadd(matadd(matadd(bdrift, d),
scalarmul(einsnmax, -r)), v)), 1/(1-st)));
if ig = j then
for i from 1 to nmax do
pilst[in1,i] := pi[i,1];
phiilst[in1,i] := pi[i,1]*Xilst[ig,1]/V1[i,1];
nueilst[in1,i] := v[i,1];
od;
fi;
#Vermögensentwicklung
dXhilf[1,1] := 0;
dXhilf := evalm(matadd(scalarmul(multiply(transpose(pi),
matadd(matadd(bdrift, d), scalarmul(einsnmax, -r))),dt),
multiply(transpose(pi),multiply(s,dW))));
if not Xilst[ig,1] = 0 then
for k from 1 to nmax do
piilsta[ig,j1a+k] := pi[k,1];
phiilsta[ig,j1a+k] := pi[k,1]*Xilst[ig,1]/V1[k,1];
vilsta[ig,j1a+k] := v[k,1];
od;
Xilst[ig,1]
:= evalf(max(Xilst[ig,1] *(1 + (1-st)*(r*dt +
dXhilf[1,1])),0)); fi;
```

```
#3. U(x) = 1/beta*x^beta, ohne Steuern
for i from 1 to nmax do
if Xih[ig,1]<>0 then a1[i,1] := abq[i,1]*V1[i,1]/Xih[ig,1]
else a1[i,1] := abq[i,1]*10000; fi;
if Xih[ig,1]<>0 then b1[i,1] := bbq[i,1]*V1[i,1]/Xih[ig,1]
else b1[i,1] := bbq[i,1]*10000; fi;
od;
a1 := evalm(scalarmul(a1, 1-beta));
b1 := evalm(scalarmul(b1, 1-beta));
a := evalm(a1);
b := evalm(b1);
v := evalm(scalarmul(einsnmax, -10));
optimierung(0, beta); #st = 0 und beta
pi := evalm(scalarmul(einsnmax, -10));
pi := evalm(scalarmul(multiply(inverse(multiply(s,
transpose(s))), matadd(matadd(matadd(bdrift, d),
scalarmul(einsnmax, -r)), v)), 1/(1-beta)));
if ig = j then
for i from 1 to nmax do
pih[in1,i] := pi[i,1];
phiih[in1,i] := pi[i,1]*Xih[ig,1]/V1[i,1];
nueih[in1,i] := v[i,1];
od;
fi;
#Vermögensentwicklung
dXhilf[1,1] := 0;
dXhilf := evalm(matadd(scalarmul(multiply(transpose(pi),
matadd(matadd(bdrift, d), scalarmul(einsnmax, -r))),dt),
multiply(transpose(pi), multiply(s,dW))));
if not Xih[ig,1] = 0 then
for k from 1 to nmax do
piiha[ig,j1a+k] := pi[k,1];
phiiha[ig,j1a+k] := pi[k,1]*Xih[ig,1]/V1[k,1];
viha[ig,j1a+k] := v[k,1];
od;
Xih[ig,1] := evalf(max(Xih[ig,1] *(1 + r*dt + dXhilf[1,1]),0));
fi;

#4. U(x) = 1/beta*x^beta, mit Steuern
for i from 1 to nmax do
if Xihst[ig,1]<>0 then a1[i,1] := abq[i,1]*V1[i,1]/Xihst[ig,1]
else a1[i,1] := abq[i,1]*10000; fi;
if Xihst[ig,1]<>0 then b1[i,1] := bbq[i,1]*V1[i,1]/Xihst[ig,1]
else b1[i,1] := bbq[i,1]*10000; fi;
od;
```

```
a1 := evalm(scalarmul(a1, (1-st)*(1-beta)));
b1 := evalm(scalarmul(b1, (1-st)*(1-beta)));
a := evalm(a1);
b := evalm(b1);
v := evalm(scalarmul(einsnmax, -10));
optimierung(st, beta); #st und beta
pi := evalm(scalarmul(einsnmax, -10));
pi := evalm(scalarmul(multiply(inverse(multiply(s,
transpose(s))), matadd(matadd(matadd(bdrift, d),
scalarmul(einsnmax, -r)), v)), 1/((1-st)*(1-beta))));
if ig = j then
for i from 1 to nmax do
pihst[in1,i] := pi[i,1];
phiihst[in1,i] := pi[i,1]*Xihst[ig,1]/V1[i,1];
nueihst[in1,i] := v[i,1];
od;
fi;
#Vermögensentwicklung
dXhilf[1,1] := 0;
dXhilf := evalm(matadd(scalarmul(multiply(transpose(pi),
matadd(matadd(bdrift, d), scalarmul(einsnmax, -r))),dt),
multiply(transpose(pi),multiply(s,dW))));
if not Xihst[ig,1] = 0 then
for k from 1 to nmax do
piihsta[ig,j1a+k] := pi[k,1];
phiihsta[ig,j1a+k] := pi[k,1]*Xihst[ig,1]/V1[k,1];
vihsta[ig,j1a+k] := v[k,1];
od;
Xihst[ig,1]
:= evalf(max(Xihst[ig,1] *(1 + (1-st)*(r*dt +
dXhilf[1,1])),0));
fi;

#Aktualisierung der Aktienkurse
jnmax := evalm(multiply(s,dW));
for i from 1 to nmax do
V1[i,1] := evalf(V1[i,1]*(1 + bdrift[i,1]*dt + jnmax[i,1]));
if V1[i,1] < 0.000001 then V1[i,1] := 0.000001; fi;
od;
if kn1 < anz1 - 1 then schleife(kn1+1) fi;
end; #Schleife

zufall := proc(ir) local i,i1,i2,sicherzaehler;
global ahilfi, dt,dW,dzv1,dzv2,im,nmax,anz1,W;
i1 := iquo(nmax,2);
i2 := irem(nmax,2);
```

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

```
for i from 1 to (i1+i2) do
sicherzaehler := 0;
zufallsub(sicherzaehler);
if i <= i1
then
dW[2*i-1,1] := evalf(dzv1*sqrt(dt));
dW[2*i,1] := evalf(dzv2*sqrt(dt));
else #2*i=nmax+2 und i2=1
dW[nmax,1] := evalf(dzv1*sqrt(dt));
fi;
od;
end; #zufall
```

```
zufallsub := proc(sicherzaehler)
local boolzufall,gzv1,gzv2,uv1,uv2,xzv;
global dW,dzv1,dzv2;
boolzufall := false;
if sicherzaehler < 25
then
#Generierung von zwei auf [0,1] gleichverteilten
Zufallsvariablen
gzv1 := random[uniform[0,1]](1);
gzv2 := random[uniform[0,1]](1);
#Transformation in standardnormalverteilte Zufallsvariablen
nach
#dem Verfahren von Marsaglia (vgl. Seydel (2000), S. 46 f.)
uv1 := 2*gzv1 -1;
uv2 := 2*gzv2 -1;
xzv := uv1^2 + uv2^2;
if xzv < 1 then
dzv1 := uv1*sqrt(-2*ln(xzv)/xzv);
dzv2 := uv2*sqrt(-2*ln(xzv)/xzv);
boolzufall := true;
fi;
if not boolzufall then
zufallsub(sicherzaehler+1);
fi;
else writeline(default,ßicherzaehler >= 25");
fi;
end; #zufallsub
```

```
beteiligungsberechnung := proc(list, fk, ig) local i,i1,j,k;
global a,abbruch,abq,ahilf01,ahilfi,anz1,anz2,a1,a2,
b,bbq,bdrift,bdriftn1max,bdriftn1q,bdriftn2,bdriftq,
beta,beta1,bool,bool1,b1,b2,c,
d,dn1,dn1max,dn1q,dn2,df,dfoc,dq,dt,dW,dWq,dW0,
```

```
dXh,dXhd,dXhilf,dXhst,dXl,dXld,dXlst,dz,dz0,
einsnmax,einsn1max,einsn1q,einsn2,
il,in1,jnmax,j1,j1a,j2,kn1,kpotlist,kpotlisthilf,list1,
nmax,nueil,nueilst,nueih,nueihst,nulln1max,nulln2,n1,n1max,n2,
ph,phiil,phiilst,phiih,phiihst,phq,phst,phstq,
pi,pil,pilst,pih,pihst,pl,plq,plst,plstq,pihilf,phihilf,
piila,piilsta,piiha,piihsta,phiila,phiilsta,phiiha,phiihsta,
r,s,sd1,sd1q,sd2,sd2q,sq,sqq,st,ste,s0,s0q,s1,S,Sq,So0,
t,theta,T,v,vila,vilsta,viha,vihsta,vn1,vn2,V0,V0n1,V0n1q,
V0n2,V0n2q,V1a,V1n1,V1n1q,V1n2,V1,V2n1,V2n2,V2,W,W0,
x,xq,Xh,Xhd,Xhst,Xih,Xihst,Xil,Xilst,Xila,Xilsta,Xiha,Xihsta,
dXila,dXilsta,dXiha,dXihsta,Xl,Xld,Xlst,X0,
y,yh,yhq,yhst,yhstq,yl,ylq,ylst,ylstq,z,zaehler,zeta,zmat;
if fk = 1 #kein Konzernunternehmen mit nicht hedgebarem Risiko
then
plq := multiply(inverse(multiply(sd1, sd1)),
matadd(matadd(bdriftn2,dn2),scalarmul(einsn2, -r)));
plstq := scalarmul(multiply(inverse(multiply(sd1, sd1)),
matadd(matadd(bdriftn2,dn2),scalarmul(einsn2, -r))), 1/(1-st));
phq := scalarmul(multiply(inverse(multiply(sd1, sd1)),
matadd(matadd(bdriftn2,dn2),scalarmul(einsn2, -r))),
1/(1-beta));
phstq := scalarmul(multiply(inverse(multiply(sd1, sd1)),
matadd(matadd(bdriftn2,dn2),scalarmul(einsn2, -r))),
1/((1-st)*(1-beta)));
pl := stackmatrix(nulln1max, plq);
plst := stackmatrix(nulln1max, plstq);
ph := stackmatrix(nulln1max, phq);
phst := stackmatrix(nulln1max, phstq);
bdriftq := bdrift;
dq := d;
s1 := s;
dWq := dW;
#U(x) = ln(x), ohne Steuern
dXhilf[1,1] := 0;
dXhilf := evalm(matadd(scalarmul(multiply(transpose(pl),
matadd(matadd(bdriftq, dq),
scalarmul(stackmatrix(einsn1max, einsn2), -r))),dt),
multiply(transpose(pl),multiply(s1,dWq))));
dXl[ig,fk] := evalf(Xl[ig,fk]*(r*dt + dXhilf[1,1]));
if not Xl[ig,fk] = 0 then
Xl[ig,fk] := evalf(max(Xl[ig,fk] + dXl[ig,fk],0));
fi;
```

```
#U(x) = ln(x), mit Steuern
dXhilf[1,1] := 0;
dXhilf := evalm(matadd(scalarmul(multiply(transpose(plst),
matadd(matadd(bdriftq, dq),
scalarmul(stackmatrix(einsn1max, einsn2), -r))),dt),
multiply(transpose(plst),multiply(s1,dWq))));
dXlst[ig,fk] := evalf(Xlst[ig,fk]*(r*dt + dXhilf[1,1])*(1-st));
if not Xlst[ig,fk] = 0 then
Xlst[ig,fk] := evalf(max(Xlst[ig,fk] + dXlst[ig,fk],0));
fi;

#U(x) = beta^(-1)*x^beta, ohne Steuern
dXhilf[1,1] := 0;
dXhilf := evalm(matadd(scalarmul(multiply(transpose(ph),
matadd(matadd(bdriftq, dq),
scalarmul(stackmatrix(einsn1max, einsn2), -r))),dt),
multiply(transpose(ph),multiply(s1,dWq))));
dXh[ig,fk] := evalf(Xh[ig,fk]*(r*dt + dXhilf[1,1]));
if not Xh[ig,fk] = 0 then
Xh[ig,fk] := evalf(max(Xh[ig,fk] + dXh[ig,fk],0));
fi;

#U(x) = beta^(-1)*x^beta, mit Steuern
dXhilf[1,1] := 0;
dXhilf := evalm(matadd(scalarmul(multiply(transpose(phst),
matadd(matadd(bdriftq, dq),
scalarmul(stackmatrix(einsn1max, einsn2), -r))),dt),
multiply(transpose(phst),multiply(s1,dWq))));
dXhst[ig,fk] := evalf(Xhst[ig,fk]*(r*dt + dXhilf[1,1])*(1-st));
if not Xhst[ig,fk] = 0 then
Xhst[ig,fk] := evalf(max(Xhst[ig,fk] + dXhst[ig,fk],0));
fi;

else
#Berechnung der Mächtigkeit von list
zaehler := 0;
for i from 1 to n1max do
if member(i, list) then zaehler := zaehler + 1;
fi;
od;
n1 := zaehler;
#Anpassung der Standardabweichungsmatrizen und der
#Marktparametervektoren
#Initialisierung mit Ausgangsmatrizen und Parametervektoren
sqq := sq;
sd2q := sd2;
```

```
sd1q := sd1;
s0q := s0;
bdriftn1q := bdriftn1max;
dn1q := dn1max;
ylq := yl;
ylstq := ylst;
yhq := yh;
yhstq := yhst;
for i from 1 to n1max do
V0n1[i,1] := V0[i,1];
V1n1[i,1] := V1[i,1];
od;
V0n1q := evalm(V0n1);
V1n1q := evalm(V1n1);
einsn1q := einsn1max;
dWq := dW;
#Initialisierung der y
for i from 1 to n1max do
if Xl[ig,fk] <> 0 then ylq[i,1] := evalf(V1n1q[i,1]/Xl[ig,fk])
else ylq[i,1] := 0; fi;
if Xlst[ig,fk] <> 0
then ylstq[i,1] := evalf(V1n1q[i,1]/Xlst[ig,fk])
else ylstq[i,1] := 0; fi;
if Xh[ig,fk] <> 0 then yhq[i,1] := evalf(V1n1q[i,1]/Xh[ig,fk])
else yhq[i,1] := 0; fi;
if Xhst[ig,fk] <> 0
then yhstq[i,1] := evalf(V1n1q[i,1]/Xhst[ig,fk])
else yhstq[i,1] := 0; fi; od;
#Reduktion der Matrizen sowie der Marktparametervektoren
for j from 1 to n1max do
i := n1max +1 -j;
k := 0;
if zaehler = 0 then k := 1; fi;
if (zaehler <> 0) and (i = list[zaehler+k])
then zaehler := zaehler -1;
else
sqq := delrows(sqq, i..i);
sd2q := delrows(sd2q, i..i);
sd2q := delcols(sd2q, i..i);
s0q := delcols(s0q, i..i);
bdriftn1q := delrows(bdriftn1q, i..i);
dn1q := delrows(dn1q, i..i);
ylq := delrows(ylq, i..i);
ylstq := delrows(ylstq, i..i);
```

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

```
yhq := delrows(yhq, i..i);
yhstq := delrows(yhstq, i..i);
einsn1q := delrows(einsn1q, i..i );
i1 := n2 + i;
dWq := delrows(dWq, i1..i1);
fi;
od;
s1 := stackmatrix(concat(sqq,sd2q),concat(sd1q,s0q));

#Ermittlung der Beteiligungsquoten und der neuen Vermögen
#für die zu unterscheidenden Fälle nach Nutzenfunktion
#und mit/ohne Steuern
plq := evalm(matadd(multiply(inverse(multiply(sd1q, sd1q)),
matadd(matadd(bdriftn2,dn2),scalarmul(einsn2, -r))),multiply(
multiply(inverse(sd1q),transpose(sqq)),scalarmul(ylq, -1))));
plstq := evalm(matadd(scalarmul(multiply(inverse(multiply(sd1q,
sd1q)), matadd(matadd(bdriftn2,dn2),scalarmul(einsn2, -r))),
1/(1-st)), multiply(multiply(inverse(sd1q),transpose(sqq)),
scalarmul(ylstq, -1))));
phq := evalm(matadd(scalarmul(multiply(inverse(multiply(sd1q,
sd1q)), matadd(matadd(bdriftn2,dn2),scalarmul(einsn2, -r))),
1/(1-beta)), multiply(multiply(inverse(sd1q),transpose(sqq)),
scalarmul(yhq, -1))));
phstq := evalm(matadd(scalarmul(multiply(inverse(multiply(sd1q,
sd1q)), matadd(matadd(bdriftn2,dn2),scalarmul(einsn2, -r))),
1/((1-beta)*(1-st))), multiply(multiply(inverse(sd1q),
transpose(sqq)),scalarmul(yhstq, -1))));
pl := evalm(stackmatrix(ylq, plq));
plst := stackmatrix(ylstq, plstq);
ph := stackmatrix(yhq, phq);
phst := stackmatrix(yhstq, phstq);
bdriftq := stackmatrix(bdriftn1q, bdriftn2);
dq := stackmatrix(dn1q, dn2);
einsnmax := stackmatrix(einsn1q, einsn2);

#U(x) = ln(x), ohne Steuern
dXhilf[1,1] := 0;
dXhilf := evalm(matadd(scalarmul(multiply(transpose(pl),
matadd(matadd(bdriftq, dq), scalarmul(einsnmax, -r))),dt),
multiply(transpose(pl),multiply(s1,dWq))));
dXl[ig,fk] := evalf(Xl[ig,fk]*(r*dt + dXhilf[1,1]));
if not Xl[ig,fk] = 0 then
Xl[ig,fk] := evalf(max(Xl[ig,fk] + dXl[ig,fk],0));
fi;
```

```
#U(x) = ln(x), mit Steuern
dXhilf[1,1] := 0;
dXhilf := evalm(matadd(scalarmul(multiply(transpose(plst),
matadd(matadd(bdriftq, dq), scalarmul(einsnmax, -r))),dt),
multiply(transpose(plst),multiply(s1,dWq))));
dXlst[ig,fk] := evalf(Xlst[ig,fk]*(r*dt + dXhilf[1,1])*(1-st));
if not Xlst[ig,fk] = 0 then
Xlst[ig,fk] := evalf(max(Xlst[ig,fk] + dXlst[ig,fk],0));
fi;

#U(x) = beta^(-1)*x^beta, ohne Steuern
dXhilf[1,1] := 0;
dXhilf := evalm(matadd(scalarmul(multiply(transpose(ph),
matadd(matadd(bdriftq, dq), scalarmul(einsnmax, -r))),dt),
multiply(transpose(ph),multiply(s1,dWq))));
dXh[ig,fk] := evalf(Xh[ig,fk]*(r*dt + dXhilf[1,1]));
if not Xh[ig,fk] = 0 then
Xh[ig,fk] := evalf(max(Xh[ig,fk] + dXh[ig,fk],0));
fi;

#U(x) = beta^(-1)*x^beta, mit Steuern
dXhilf[1,1] := 0;
dXhilf := evalm(matadd(scalarmul(multiply(transpose(phst),
matadd(matadd(bdriftq, dq), scalarmul(einsnmax, -r))),dt),
multiply(transpose(phst),multiply(s1,dWq))));
dXhst[ig,fk] := evalf(Xhst[ig,fk]*(r*dt + dXhilf[1,1])*(1-st));
if not Xhst[ig,fk] = 0 then
Xhst[ig,fk] := evalf(max(Xhst[ig,fk] + dXhst[ig,fk],0));
fi;
fi;
end; #Prozedur beteiligungsberechnung

#Optimierungsprogramm
optimierung := proc(ste, beta1)
global a,abbruch,abq,ahilf01,ahilfi,anz1,anz2,a1,a2,
b,bbq,bdrift,bdriftn1max,bdriftn1q,bdriftn2,bdriftq,beta,bool,
bool1,b1,b2,c,d,dn1,dn1max,dn1q,dn2,df,dfoc,dq,dt,dW,dWq,dW0,
dXh,dXhd,dXhilf,dXhst,dXl,dXld,dXlst,dz,dz0,
einsnmax,einsn1max,einsn1q,einsn2,fk,
ig,il,in1,jnmax,j1,j1a,j2,kn1,kpotlist,kpotlisthilf,list,list1,
nmax,nueil,nueilst,nueih,nueihst,nulln1max,nulln2,n1,n1max,n2,
ph,phiil,phiilst,phiih,phiihst,phq,phst,phstq,
pi,pil,pilst,pih,pihst,pl,plq,plst,plstq,r,s,sd1,sd1q,sd2,
sd2q,sq,sqq,st,s0,s0q,s1,S,Sq,So0,t,theta,T,v,vn1,vn2,
V0,V0n1,V0n1q,V0n2,V0n2q,V1n1,V1n1q,V1n2,V1,V2n1,V2n2,V2,W,W0,
x,xq,Xh,Xhd,Xhst,Xih,Xihst,Xil,Xilst,Xl,Xld,Xlst,X0,
```

```
y,yh,yhq,yhst,yhstq,yl,ylq,ylst,ylstq,
z,zaehler,zeta,zmat,pihilf,phihilf,
Xila,Xilsta,Xiha,Xihsta,dXila,dXilsta,dXiha,dXihsta,
piila,piilsta,piiha,piihsta,phiila,phiilsta,phiiha,phiihsta,
vila,vilsta,viha,vihsta,V1a;

defin();
mengengen(1, ste, beta1);
end; #optimierung

#Definition der Einzelprozeduren innerhalb der Optimierung
#Variablendefinitionen als Prozedur
defin := proc () local i,k;
global a,abbruch,abq,ahilf01,ahilfi,anz1,anz2,a1,a2,
b,bbq,bdrift,bdriftn1max,bdriftn1q,bdriftn2,bdriftq,
beta,beta1,bool,bool1,b1,b2,c,d,dn1,dn1max,dn1q,dn2,df,dfoc,
dq,dt,dW,dWq,dW0,dXh,dXhd,dXhilf,dXhst,dXl,dXld,dXlst,dz,dz0,
einsnmax,einsn1max,einsn1q,einsn2,fk,
ig,il,in1,jnmax,j1,j1a,j2,kn1,kpotlist,kpotlisthilf,list,list1,
nmax,nueil,nueilst,nueih,nueihst,nulln1max,nulln2,n1,n1max,n2,
ph,phiil,phiilst,phiih,phiihst,phq,phst,phstq,
pi,pil,pilst,pih,pihst,pl,plq,plst,plstq,r,
s,sd1,sd1q,sd2,sd2q,sq,sqq,st,ste,s0,s0q,s1,S,Sq,So0,
t,theta,T,v,vn1,vn2,
V0,V0n1,V0n1q,V0n2,V0n2q,V1n1,V1n1q,V1n2,V1,V2n1,V2n2,V2,W,W0,
x,xq,Xh,Xhd,Xhst,Xih,Xihst,Xil,Xilst,Xl,Xld,Xlst,X0,
y,yh,yhq,yhst,yhstq,yl,ylq,ylst,ylstq,
z,zaehler,zeta,zmat,pihilf,phihilf,
Xila,Xilsta,Xiha,Xihsta,dXila,dXilsta,dXiha,dXihsta,
piila,piilsta,piiha,piihsta,phiila,phiilsta,phiiha,phiihsta,
vila,vilsta,viha,vihsta,V1a;

#Mengen- und Hilfsvariableninitialisierung
S := ;
Sq := ;
if n2 > 0 then
for i from n1max + 1 to n1max + n2 do
Sq := Sq union i
od;
fi;
abbruch := false;
bool := true;
k := 1;
x := matrix(nmax, 1, [seq(-100, i=1..nmax)]);
c := matrix(nmax, 1, [seq(-100, i=1..nmax)]);
theta := matrix(nmax,1, [seq(-100, i=1..nmax)]);
```

```
z := matrix(nmax,1, [seq(-100, i=1..nmax)]);
zmat := matrix(nmax, nmax, [seq(-100, i=1..nmax^2)]);
il := matrix(1, nmax, [seq(i, i=1..nmax)]); #Indexliste
#Gradientenvektor zur Zielfunktion ohne -c
dfoc := matrix(nmax, 1, [seq(-100, i=1..nmax)]);
#Gradientenvektor zur Zielfunktion
df := matrix(nmax, 1, [seq(-100, i=1..nmax)]);
y := matrix(nmax,1, [seq(-200, i=1..nmax)]);
end; #defin

mengengen := proc (ki, ste, beta1)
global a,abbruch,abq,ahilf01,ahilfi,anz1,anz2,a1,a2,
b,bbq,bdrift,bdriftn1max,bdriftn1q,bdriftn2,bdriftq,
beta,bool,bool1,b1,b2,c,
d,dn1,dn1max,dn1q,dn2,df,dfoc,dq,dt,dW,dWq,dW0,
dXh,dXhd,dXhilf,dXhst,dXl,dXld,dXlst,dz,dz0,
einsnmax,einsn1max,einsn1q,einsn2,fk,
ig,il,in1,jnmax,j1,j1a,j2,kn1,kpotlist,kpotlisthilf,list,list1,
nmax,nueil,nueilst,nueih,nueihst,nulln1max,nulln2,n1,n1max,n2,
ph,phiil,phiilst,phiih,phiihst,phq,phst,phstq,
pi,pil,pilst,pih,pihst,pl,plq,plst,plstq,r,
s,sd1,sd1q,sd2,sd2q,sq,sqq,st,s0,s0q,s1,S,So0,Sq,
t,theta,T,v,vn1,vn2,
V0,V0n1,V0n1q,V0n2,V0n2q,V1n1,V1n1q,V1n2,V1,V2n1,V2n2,V2,W,W0,
x,xq,Xh,Xhd,Xhst,Xih,Xihst,Xil,Xilst,Xl,Xld,Xlst,X0,
y,yh,yhq,yhst,yhstq,yl,ylq,ylst,ylstq,
z,zaehler,zeta,zmat,pihilf,phihilf,
Xila,Xilsta,Xiha,Xihsta,dXila,dXilsta,dXiha,dXihsta,
piila,piilsta,piiha,piihsta,phiila,phiilsta,phiiha,phiihsta,
vila,vilsta,viha,vihsta,V1a;
if ki <= n1max and not abbruch then
S := S union ki; Sq := Sq minus ki;
mengengen (ki+1, ste, beta1);
S := S minus ki; Sq := Sq union ki;
mengengen (ki+1, ste, beta1);
fi;
if ki > n1max and not abbruch then
g(1, S, Sq, ste, beta1);
fi;
end; #mengengen

g := proc (m, S, Sq, ste, beta1) local aq,bq,i,j,kl,u1;
global a,abbruch,abq,ahilf01,ahilfi,anz1,anz2,a1,a2,
b,bbq,bdrift,bdriftn1max,bdriftn1q,bdriftn2,bdriftq,
beta,bool,bool1,b1,b2,c,
d,dn1,dn1max,dn1q,dn2,df,dfoc,dq,dt,dW,dWq,dW0,
```

```
dXh,dXhd,dXhilf,dXhst,dXl,dXld,dXlst,dz,dz0,
einsnmax,einsn1max,einsn1q,einsn2,fk,
ig,il,in1,jnmax,j1,j1a,j2,kn1,kpotlist,kpotlisthilf,list,list1,
nmax,nueil,nueilst,nueih,nueihst,nulln1max,nulln2,n1,n1max,n2,
ph,phiil,phiilst,phiih,phiihst,phq,phst,phstq,
pi,pil,pilst,pih,pihst,pl,plq,plst,plstq,r,
s,sd1,sd1q,sd2,sd2q,sq,sqq,st,s0,s0q,s1,So0,t,theta,T,v,vn1,vn2,
V0,V0n1,V0n1q,V0n2,V0n2q,V1n1,V1n1q,V1n2,V1,V2n1,V2n2,V2,W,W0,
x,xq,Xh,Xhd,Xhst,Xih,Xihst,Xil,Xilst,Xl,Xld,Xlst,X0,
y,yh,yhq,yhst,yhstq,yl,ylq,ylst,ylstq,
z,zaehler,zeta,zmat,z1,pihilf,phihilf,
Xila,Xilsta,Xiha,Xihsta,dXila,dXilsta,dXiha,dXihsta,
piila,piilsta,piiha,piihsta,phiila,phiilsta,phiiha,phiihsta,
vila,vilsta,viha,vihsta,V1a;
aq := evalm(a);
bq := evalm(b);
if m <= nmax and not abbruch
then
if member(m, S) then c[m,1] := aq[m,1] fi;
if not abbruch then g(m+1, S, Sq, ste, beta1) fi;
if member(m, S) then c[m,1] := bq[m,1] fi;
if not abbruch then g(m+1, S, Sq, ste, beta1) fi;
fi;
if m > nmax and not abbruch then
bool := true;
theta := evalm(multiply(inverse(s),
matadd(matadd(bdrift, d), scalarmul(einsnmax, -r))));
z := evalm(matadd(multiply(transpose(inverse(s)), theta),
scalarmul(c, -1)));
zmat := evalm(inverse(multiply(s, transpose(s))));
for i from 1 to nmax do
il[1,i] := i; #Indexliste neu initialisieren
od;
j1 := 0;
bool1 := true;
for i from 1 to nmax do
if member(i, Sq) then
j1 := j1 + 1;
if j1 <> nmax
then
u1 := il[1,i];
z := delrows(z, u1..u1);
zmat := delrows(zmat, u1..u1);
zmat := delcols(zmat, u1..u1);
```

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

```
il[1,i] := 0;
for j from i to nmax do
if j<>i then il[1,j] := il[1,j] - 1 fi;
od;
else bool1 := false;
fi;
fi;
od;
if bool1 then
z1 := evalm(scalarmul(z, -1));
xq := evalm(linsolve(zmat, z1));
fi;
kl := 0;
for i from 1 to nmax do
if member(i, S) then
kl := kl + 1;
x[i,1] := xq[kl,1];
fi;
od;
for j from 1 to nmax do
if member(j, S) and not (x[j,1]*c[j,1] < 0 or
(x[j,1] > 0 and c[j,1] = aq[j,1] and c[j,1] = 0) or
(x[j,1] < 0 and c[j,1] = bq[j,1] and c[j,1] = 0))
then bool := false fi;
od;
if bool then
for i from 1 to nmax do
if member(i, Sq) then x[i,1] := 0;
fi;
od;
dfoc := matadd(multiply(transpose(inverse(s)), theta),
multiply(inverse(multiply(s, transpose(s))), x) );
i := 1;
while i <= nmax and bool do
if member(i, Sq) then
y[1,1] := dfoc[i,1] -aq[i,1];
y[2,1] := dfoc[i,1] -bq[i,1];
if not (y[1,1] >= 0 and y[2,1] <= 0)
then bool := false;
fi;
fi;
i := i+1;
od;
fi;
```

```
if bool then
abbruch := true;
v := evalm(x);
fi;
fi;
end; #g
#Darstellung der Listenentwicklung
kpotlist := [];
kpotlisthilf := [];
list1 := [];
n1max := 3;
ma := 0;
fk := 1;
for i from 1 to n1max do
kpotlisthilf := kpotlist;
if i > 1 then
for j from 1 to ma do
list1 := kpotlisthilf[1];
kpotlisthilf := subsop(1=NULL,kpotlisthilf);
list1 := [op(list1),i];
fk := fk +1;
kpotlist := [op(kpotlist),list1];
od;
fk := fk + 1;
list1 := [i];
kpotlist := [op(kpotlist),[i]];
else
kpotlist := [[1]];
fk := fk +1;
list1 := kpotlist[1];
fi;
ma := 2*ma + 1;
od;
kpotlist;
```

Das Ergebnis eines Simulationsverlaufes in Gestalt der im 0-1-Fall für unterschiedliche Konzernstrukturierungen sowie der im Intervall-Fall sich ergebenden Erwartungswerte des Nutzens aus den Endvermögen ist in Tabelle 5.1 angegeben. Simuliert wird im Umfang von 50 Durchläufen die Vermögensentwicklung für einen zweijährigen Planungszeitraum, der in 50 äquidistante Zeitintervalle unterteilt ist. Im 0-1-Fall werden sämtliche Konzernstrukturen aus drei potentiellen Konzernunternehmen untersucht. Eine Nummerierung der Unternehmen unterstellt, repräsentiert dann bspw. $\{1, 2\}$ eine Konzernstruktur, die sich aus jeweils einer 100 %-Beteiligung an den

Tabelle 5.1

Erwartungsnutzen aus der Simulation verschiedener Konzernstrukturen

Nutzenfunktion	logarithmisch ($U(x) = \ln x$)		„power type“ ($U(x) = \frac{1}{0,5}x^{0,5}$)	
	ohne Steuern ($st = 0$)	mit Steuern ($st = 0,5$)	ohne Steuern ($st = 0$)	mit Steuern ($st = 0,5$)
0-1-Fall (mit Differenzierung von Unternehmenskombinationen):				
$\emptyset$	14,7599325	14,7350060	3429,78255	3387,33141
$\{1\}$	14,7647063	14,7405379	3453,97393	3407,45442
$\{1,2\}$	14,7687214	14,7441423	3451,49332	3406,10797
$\{2\}$	14,7648285	14,7390893	3427,52351	3386,05825
$\{1,3\}$	14,7729338	14,7469573	*3467,46430*	*3417,85706*
$\{1,2,3\}$	*14,7773044*	*14,7507608*	3465,80115	3416,88515
$\{2,3\}$	14,7729847	14,7454958	3441,28203	3396,58415
$\{3\}$	14,7676548	14,7411751	3442,99127	3397,55484
Intervall-Fall:				
	14,7702152	14,7445621	3224,32848	3180,18123

Unternehmen 1 und 2 zusammensetzt und bei der das Unternehmen 3 nicht erworben wird. Im Beispiel zeigt sich für die Kombination aller drei möglichen Konzernunternehmen bei logarithmischer Nutzenfunktion der größte Erwartungsnutzen aus Endvermögen, und zwar sowohl mit als auch ohne Steuern. Auch bei der unterstellten Nutzenfunktion des „power type“ ergibt sich die gleiche Konzernstruktur für den Steuer- und den Vor-Steuer-Fall; allerdings sollte sich der Konzern hierbei lediglich aus dem ersten und dem dritten potentiellen Konzernunternehmen zusammensetzen. Hinzuzufügen ist für den 0-1-Fall, dass die Anwendung der logarithmischen Nutzenfunktion auf die sich aus der Optimierung nach der „Power-type“-Nutzenfunktion ergebenden Endvermögen im Beispiel für alle Kombinationen zu einem geringeren Erwartungsnutzen geführt hat gegenüber demjenigen, welcher sich aus der Optimierung nach der logarithmischen Nutzenfunktion ergab. D.h., zumindest im vorliegenden Beispiel, führte die konsistente Optimierung im Hinblick auf den logarithmischen Nutzen auch zu einem besseren Erwartungsnutzen auf Basis der logarithmischen Nutzenfunktion als eine andere Optimierung, als welche diejenige nach der „Power-type“-Nutzenfunktion herangezogen wurde. Das Gleiche gilt in umgekehrter Richtung hinsichtlich der betrachteten Nutzenfunktionen. Im Intervall-Fall ergab die myopische Optimierung allerdings im Vergleich zu den fixierten extremen Beteiligungsquoten nur ein mittleres, wenn nicht schlechtes Ergebnis, obwohl Letztere eigentlich dominiert werden sollten. Zu berücksichtigen ist hierbei allerdings, dass ein Simulationslauf für die Optimierung nach der „Power-type“-Nutzenfunktion zu einem Vermögen von null führte.

5.5.2 Zur Äquivalenz der heuristischen Portfolio-Optimierung und eines statischen Optimierungsproblems bei logarithmischer Nutzenfunktion

Im Folgenden soll die Gültigkeit der Aussage von Anmerkung 3.2 gezeigt werden, d.h. dass der nach der Heuristik des *Abschnittes 3.3.2.3* für die Endvermögensoptimierung bei logarithmischer Nutzenfunktion und ohne Steuern im Intervall-Fall zu bildende Portfolio-Prozess optimal für das statische Problem $(\mathcal{PS})$ ist.

Der Wert des optimalen Portfolio-Prozesses in $t = 0$ nach der Heuristik entspricht analog Gl. (3.46) folgendem Ausdruck:

$$p_{\hat{\nu}}(0) = (\sigma(0)\sigma'(0))^{-1} (b(0) + \delta(0) + \hat{\nu}(0) - r(0)\mathbf{1}_n)\,, \tag{5.65}$$

wobei sich der optimale Schattenpreis nach Gl. (3.50) aus:

$$\hat{\nu}(0) = \arg\min_{\nu\in\tilde{K}} \left\{ \zeta(\nu) + \frac{1}{2} \parallel \theta_\nu(t) \parallel^2 \right\} \tag{5.66}$$

ergibt und nach Gl. (3.80):

$$\zeta_{Int}(\nu) = -\sum_{i=1}^{n_1} (\alpha_i(0) \max[0, \nu_i] - \beta_i(0) \max[0, -\nu_i]) \tag{5.67}$$

gilt. Der Intervall-Fall wird im Folgenden geringfügig erweitert, indem die Untergrenze von null verschieden sein kann und lediglich $\alpha_i \leq 0$, $i = 1, \ldots, n_1$, vorausgesetzt wird. Im zeitlichen Kontext gilt $\beta_i(0) = \frac{S_i(0)}{x}$ $(i = 1, \ldots, n_1)$. α bzw. β stehen für die zugehörigen n_1-dimensionalen Vektoren. Der Zeitbezug der Prozesswerte wird vereinfachend weggelassen.

Zu zeigen ist, dass der durch Gl. (5.65) gegebene Portfolio-Prozess zugleich eine Lösung des Problems $\mathcal{PS}$ ist mit $\hat{w} = p_{\hat{\nu}}$.

Beweis:
Zunächst ist festzustellen, dass das Problem $(\mathcal{PS})$ ein *konvexes* Optimierungsproblem ist und deshalb die nachfolgend aufgestellten *Karush-Kuhn-Tucker*-Bedingungen notwendig und hinreichend für eine Lösung des Problems sind. Die Lagrange-Funktion zum Optimierungsproblem $(\mathcal{PS})$ hat unter Rückgriff auf die in *Abschnitt 3.3.2.3* eingeführte Notation die folgende Gestalt:

$$L(w, \lambda) = -\bar{b}'w + \frac{1}{2}w'\sigma\sigma'w + \lambda^{1'} (w^{n_1} - \beta) - \lambda^{2'} (w^{n_1} - \alpha) \tag{5.68}$$

mit $\lambda^{1'} = \left(\lambda_1^1, \ldots, \lambda_{n_1}^1\right)'$, $\lambda^{2'} = \left(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_{n_1}^2\right)'$ sowie $\bar{\lambda}^1 = \left(\lambda^{1'}, \mathbf{0}_{n_2}'\right)'$ und $\bar{\lambda}^2 = \left(\lambda^{2'}, \mathbf{0}_{n_2}'\right)'$. Aus der Lagrangefunktion nach der Definitionsgleichung (5.68) ergeben sich die folgenden *Karush-Kuhn-Tucker*-Optimalitätsbedingungen

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

$(GLS\ A)$[527]:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial L}{w_i}\right)_{i=1,\ldots,n_1} = 0 &= -\bar{b}^{n_1'} + \left[\left(\sigma\sigma'\right) w\right]_{1,\ldots,n_1} + \lambda^1 - \lambda^2 && (5.69)\\
\left(\frac{\partial L}{w_i}\right)_{i=n_1+1,\ldots,n} = 0 &= -\bar{b}^{n_2'} + \left[\left(\sigma\sigma'\right) w\right]_{n_1+1,\ldots,n} && (5.70)\\
0 &= \lambda^{1'}\left(w^{n_1} - \beta\right) && (5.71)\\
0 &= -\lambda^{2'}\left(w^{n_1} - \alpha\right) && (5.72)\\
0 &\leq \lambda^{1'} && (5.73)\\
0 &\leq \beta - w^{n_1} && (5.74)\\
0 &\leq \lambda^{2'} && (5.75)\\
0 &\leq w^{n_1} - \alpha. && (5.76)
\end{aligned}$$

Aus den Gleichungssystemen (5.69) und (5.70) ergibt sich unmittelbar:

$$w = \left(\sigma\sigma'\right)^{-1}\left(\bar{b} - \bar{\lambda}^1 + \bar{\lambda}^2\right). \tag{5.77}$$

Ein Vergleich des Vektors w nach Gl. (5.77) mit dem Wert des Portfolio-Prozesses p in $t = 0$ nach Gl. (5.65) zeigt, dass p genau dann Lösung des Problems $(\mathcal{PS})$ ist, wenn gilt:

$$\hat{\nu} = -\bar{\lambda}^1 - \bar{\lambda}^2$$

bzw. wenn die Schattenpreise $\lambda_1^1, \ldots, \lambda_{n_1}^1, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_{n_1}^2$ gemäß diesem Gleichungssystem gewählt werden können, wobei wegen $\hat{\nu}_i = \bar{\lambda}_i^1 = \bar{\lambda}_i^2 = 0\,(i = n_1+1, \ldots, n)$ die letzten n_2 Gleichungen bereits erfüllt sind. Zur Überprüfung der übrigen Gleichungen ist auf die Optimalitätsbedingungen des Vektors $\hat{\nu}$ zurückzugreifen, welche sich aus der Bestimmungsgleichung (5.66) ergeben. Entsprechend den Ausführungen des *Abschnittes 3.3.2.2* minimiert der optimale Schattenpreisvektor $\hat{\nu}$ des heuristischen Problems den Ausdruck $f(\nu, c(\nu))$ über $\nu \in \tilde{K}$. Die von $\hat{\nu}$ erfüllten Optimalitätsbedingungen sind danach für alle $i \in \{1, \ldots, n_1\}$:

$$\begin{aligned}
0 &= -\alpha_i + \left[\left(\sigma^{-1}\right)'\theta + \left(\sigma\sigma'\right)^{-1}\hat{\nu}\right]_i, \text{ falls } \hat{\nu}_i > 0, && (5.78)\\
0 &= -\beta_i + \left[\left(\sigma^{-1}\right)'\theta + \left(\sigma\sigma'\right)^{-1}\hat{\nu}\right]_i, \text{ falls } \hat{\nu}_i < 0; && (5.79)
\end{aligned}$$

für $i \in \{1, \ldots, n_1\}$ mit $\hat{\nu}_i = 0$ ist der Wert $\left[\left(\sigma^{-1}\right)'\theta + (\sigma\sigma')^{-1}\hat{\nu}\right]_i = p_i$ grundsätzlich beliebig. Analog *Abschnitt 3.3.2.2* gilt allerdings auch hier, dass das Minimierungsproblem hinsichtlich $f(\nu, c(\nu))$ bezüglich ν konvex ist und die Funktion ein Minimum besitzt[528], so dass für $\hat{\nu}_i = 0$ an dieser Stelle keine Abstiegsrichtung möglich sein darf. Dies bedeutet, dass sowohl $-\alpha_i + p_i \geq 0$

[527] Zur Schreibweise: $(y)_{i=j,\ldots,k}$ kennzeichnet den (Teil-)Vektor zum Vektor y, der aus dessen Komponenten j bis k unter Beibehaltung ihrer Reihenfolge besteht.

[528] Zur Argumentation vgl. S. 174; der Umstand, dass hier $\nu_{n_1+1} = \ldots = \nu_n = 0$ vorauszusetzen ist, ist diesbezüglich unbeachtlich.

als auch $-\beta_i + p_i \leq 0$ gelten müssen[529]. Damit sind jedoch bei Wahl von $\lambda_i^1 = \lambda_i^2 = \hat{\nu}_i = 0$ sowie mit $w = p$ die sich auf i beziehenden Gleichungen der Systeme (5.69) und (5.71)-(5.76) erfüllt. Im Folgenden sind somit die Fälle nicht verschwindender Komponenten des Vektors $\hat{\nu}$ zu untersuchen.

1. Fall: $\nu_i > 0$
Mit $w = p = \left(\sigma^{-1}\right)' \theta + (\sigma\sigma')^{-1}\hat{\nu}$ folgt aus Gl. (5.78):

$$w_i = \alpha_i.$$

Damit ist die zu i gehörige Gleichung des Systems (5.76) bindend und zugleich ist die i-te Gleichung des Systems (5.74) nicht bindend, so dass unmittelbar $\lambda_i^1 = 0$ folgt. Es ist leicht nachvollziehbar, dass mit $\lambda_i^2 = \hat{\nu}_i > 0$ auch die übrigen i zugehörigen Gleichungen des Systems ($GLS\ A$) erfüllt sind, insbesondere auch diejenige des Systems (5.69).

2. Fall: $\nu_i < 0$
Mit $w = p = \left(\sigma^{-1}\right)' \theta + (\sigma\sigma')^{-1}\hat{\nu}$ folgt jetzt aus Gl. (5.79):

$$w_i = \beta_i.$$

Analog *Fall 1* ergibt sich $\lambda_i^2 = 0$ und $\lambda_i^1 = -\hat{\nu}_i > 0$ und die i zuzuordnenden Gleichungen des Systems ($GLS\ A$) sind wiederum erfüllt. Damit erfüllen $w = p$ sowie $\lambda_i^1 = \max[-\hat{\nu}_i, 0]$ und $\lambda_i^2 = \max[\hat{\nu}_i, 0]$ $(i = 1, \ldots, n_1)$ das Gleichungssystem ($GLS\ A$), so dass die „heuristisch optimalen" Werte p und $\hat{\nu}$ zugleich die Lösung des statischen Optimierungsproblems ($\mathcal{PS}$) beschreiben.

5.6 Ergänzungen zu Realoptionen auf unvollständigen Märkten

5.6.1 Werte einer indizierten Kaufoption und eines „Minimum"-Calls bei Dividendenausschüttungen

Es werden explizite Darstellungen für die Werte einer indizierten Kaufoption und einer Kaufoption auf das Minimum zweier Aktien hergeleitet. Herleitungen ohne Dividendenprozesse sind in *Korn/Korn* (1999), S. 186-188, für die indizierte Kaufoption und *ebd.*, S. 188-191, für den „Minimum"-Call zu finden. Für die indizierte Kaufoption soll eine hiervon abweichende Herleitung angegeben werden; diese ist entsprechend ausführlich[530]. Hinsichtlich der „Minimum"-Kaufoption wird die Herleitung aus der zitierten Quelle übernommen und lediglich um die Dividendenprozesse ergänzt.

[529] Vgl. die Gleichungssysteme (3.63) und (3.64).
[530] Dabei wird auch eine Ergänzung der in *Korn/Korn* (1999), S. 188, aufgeführten Optionspreisformel vermieden. Vgl. auch die Herleitung von *Margrabe's* Formel [*Margrabe* (1978)] in *Zimmermann* (1998), S. 211 ff.

Wert der indizierten Kaufoption $h^E_{Call}(V,I)$:

Zu berechnen ist:

$$h^E_{Call}(V,I) = E_0\left[e^{-rT}\max\left[V(T)-I(T),0\right]\right]. \tag{5.80}$$

Die Prozesse $V(.)$ bzw. $I(.)$ sind grundsätzlich durch die Gl. (2.109) bzw. (2.110) mit unkorrelierten Wiener-Prozessen und durch die bereits eingeführten Startbedingungen beschrieben. Zudem ist ein (konstanter) Dividendenprozess durch den Vektor der Dividendenraten $\delta = (\delta_V, \delta_I)'$ gegeben. Im Folgenden werden die sich daraus für $V(.)$ und $I(.)$ ableitenden expliziten Prozessdarstellungen bezüglich P sowie unter Rückgriff auf den zum äquivalenten Martingalmaß P_0 gehörenden Wiener-Prozess $W_0(.) := (W_0^V(.), W_0^I(.))$ wiedergegeben. Zwischen den Wiener-Prozessen $W(.) := (W^V(.), W^I(.))$ und $W_0(.)$ gilt hierbei die übliche Beziehung $dW_0(.) = dW(.) + \theta\, dt$ mit $\theta := \sigma^{-1}(b+\delta-r\mathbf{1}_2)$. Damit ergibt sich:

$$V(T) = V_0 e^{(b_V-\frac{1}{2}\sigma_{11}^2)T+\sigma_{11}W^V(T)} = V_0 e^{(r-\delta_V-\frac{1}{2}\sigma_{11}^2)T+\sigma_{11}W_0^V(T)}, \tag{5.81}$$

$$\begin{aligned} I(T) &= I_0 e^{(b_I-\frac{1}{2}\|\sigma_{2.}\|^2)T+\sigma_{21}W^V(T)+\sigma_{22}W^I(T)} \\ &= I_0 e^{(r-\delta_I-\frac{1}{2}\|\sigma_{2.}\|^2)T+\sigma_{2.}W_0(T)}, \end{aligned} \tag{5.82}$$

wobei $b = (b_V, b_I)'$ sowie $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,=1,2}$ sind und $\sigma_{i.}$ $(i = 1,2)$ die Zeilenvektoren von σ repräsentieren. Darüber hinaus gilt:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{-1} & 0 \\ -\sigma_{21}(\sigma_{11}\sigma_{22})^{-1} & \sigma_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Es wird nun ein weiterer Maßwechsel auf das Wahrscheinlichkeitsmaß Q_M durchgeführt. Hierzu wird $\theta_{0M} := -\sigma'_{2.}$ gesetzt und der Wiener-Prozess $W_M(.) = (W_M^V(.), W_M^I(.))'$ über die folgende *Girsanov*-Transformation definiert:

$$dW_M := dW_0 + \theta_{0M}\, dt.$$

Der Maßwechselprozess $Z_M(.)$ ist ein Martingal, welches gegeben ist durch:

$$Z_M(t) = e^{-\frac{1}{2}\|\sigma_{2.}\|^2 t+\sigma_{2.}W_0(t)}, \quad t \in [0,T].$$

Damit gilt nun Folgendes:

$$\begin{aligned} &E_0\left[e^{-rT}\max\left[V(T)-I(T),0\right]\right] = E_M\left[\frac{e^{-rT}}{Z_M(T)}\max\left[V(T)-I(T),0\right]\right] \\ &= E_M\Big[e^{(-r+\frac{1}{2}\|\sigma_{2.}\|^2-\|\sigma_{2.}\|^2)T-\sigma_{2.}W_M(T)}\max\Big[V_0 e^{(r-\delta_V-\frac{1}{2}\sigma_{11}^2+\sigma_{11}\sigma_{21})T+\sigma_{11}W_M^V(T)} \\ &-I_0 e^{(r-\delta_I+\frac{1}{2}\|\sigma_{2.}\|^2)T+\sigma_{2.}W_M(T)}, 0\Big]\Big] \\ &= E_M\left[e^{-\delta_I T}\max\left[V_0 e^{(\delta_I-\delta_V-\frac{1}{2}\|\sigma_{1.}-\sigma_{2.}\|^2)T+(\sigma_{1.}-\sigma_{2.})W_M(T)}-I_0, 0\right]\right]. \end{aligned}$$

Da das Skalarprodukt $(\sigma_{1.}-\sigma_{2.})\,W_M(T)$ äquivalent ist dem Term $\sigma_d\, W_d(T)$ mit dem eindimensionalen Wiener-Prozess $W_d(.)$ und mit $\sigma_d = \sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{21})^2+(\sigma_{12}-\sigma_{22})^2}$, kann bezüglich des dem Wiener-Prozess $W_d(.)$

zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaßes P_d die folgende Darstellung abgeleitet werden:

$$\begin{aligned}&E_0\left[e^{-rT}\max\left[V(T)-I(T),0\right]\right]\\&=E_d\left[e^{-\delta_I T}\max\left[V_0 e^{(\delta_I-\delta_V-\frac{1}{2}\sigma_d^2)T+\sigma_d W_d(T)}-I_0,0\right]\right].\end{aligned}$$

Die Option endet im Geld, falls:

$$\begin{array}{rrcl} & 0 & \leq & V_0 e^{(\delta_I-\delta_V-\frac{1}{2}\sigma_d^2)T+\sigma_d W_d(T)}-I_0\\ \Leftrightarrow & W_d(T) & \geq & \frac{1}{\sigma_d}\left[\ln\frac{I_0}{V_0}-(\delta_I-\delta_V-\frac{1}{2}\sigma_d^2)T\right]\\ \Leftrightarrow & z_d & \geq & \frac{1}{\sigma_d\sqrt{T}}\left[\ln\frac{I_0}{V_0}-(\delta_I-\delta_V-\frac{1}{2}\sigma_d^2)T\right] =: u_d,\end{array}$$

wobei z_d die Ausprägung einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen repräsentiert, für die $z_d := \frac{W_d(T)}{\sqrt{T}}$ gilt. Für den gesuchten Optionswert ist somit zunächst ein Ausdruck A_1 wie folgt auszuwerten:

$$\begin{aligned}A_1 &:= V_0 e^{-\delta_V T}\int_{u_d}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\sigma_d^2 T+\sigma_d\sqrt{T}z_d}e^{-\frac{1}{2}z_d^2}\,dz_d\\ &= V_0 e^{-\delta_V T}\int_{u_d}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z_d-\sigma_d\sqrt{T})^2}\,dz_d = V_0 e^{-\delta_V T}\int_{\bar{u}_d}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\bar{z}_d^2}\,d\bar{z}_d\end{aligned}$$

mit $\bar{z}_d := z_d - \sigma_d\sqrt{T}$ und folglich $\bar{u}_d := u_d - \sigma_d\sqrt{T}$. Damit ist:

$$A_1 = V_0 e^{-\delta_V T}\Phi(-\bar{u}_d),$$

wobei $\Phi(.)$ die Verteilungsfunktion zur Standardnormalverteilung kennzeichnet[531]. Ferner ist:

$$A_2 := -I_0 e^{-\delta_V T}\int_{u_d}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z_d^2}\,dz_d = -I_0 e^{-\delta_I T}\Phi(-u_d),$$

so dass der gesuchte Optionswert lautet:

$$h_{Call}^{E}(V,I) = V_0 e^{-\delta_V T}\Phi(-\bar{u}_d) - I_0 e^{-\delta_I T}\Phi(-u_d) \tag{5.83}$$

mit

$$\begin{aligned}u_d &= \frac{1}{\sqrt{((\sigma_{11}-\sigma_{21})^2+\sigma_{22}^2)T}}\left[\ln\frac{I_0}{V_0}-(\delta_I-\delta_V-\tfrac{1}{2}((\sigma_{11}-\sigma_{21})^2+\sigma_{22}^2)T\right],\\ \bar{u}_d &= u_d-\sqrt{((\sigma_{11}-\sigma_{21})^2+\sigma_{22}^2)T}.\end{aligned}$$

(Es wurde hierbei berücksichtigt, dass $\sigma_{12} = 0$ ist.)

Wert der „Minimum“-Kaufoption $h_{Call}^{E;min}(V,I;I_h)$:
Die Bewertung des „Minimum“-Calls erfolgt über den Ansatz:

$$h_{Call}^{E;min}(V,I;I_h) = E_0\left[e^{-rT}\max\left[\min\left[V(T),I(T)\right]-I_h,0\right]\right]. \tag{5.84}$$

[531] Vgl. zu der hier verwendeten Dichtefunktion zur Standardnormalverteilung den Hinweis in Fn. 495, S. 258.

Hierfür gilt:

$$h^{E;min}_{Call}(V,I;I_h) = \underbrace{E_0\left[e^{-rT}V(T)1_{\{I_h\le V(T)\le I(T)\}}\right]}_{=:\,B_1} + \underbrace{E_0\left[e^{-rT}I(T)1_{\{I_h\le I(T)\le V(T)\}}\right]}_{=:\,B_2} - \underbrace{I_h e^{-rT}1_{\{I_h\le I(T)\,\wedge\, I_h\le V(T)\}}}_{=:\,B_3}.$$

Für die zugrunde liegenden Prozesse $V(.)$ bzw. $I(.)$ gilt gemäß den Gl. (3.121) und (3.122) sowie den Gl. (2.109) und (2.110):

$$\begin{aligned} dV(t) &= V(t)\left(b_V\,dt + \sigma_V\,dW^V(t)\right) = V(t)\left(b_V\,dt + \sigma_{11}\,dW^V(t)\right), \\ dI(t) &= I(t)\left(b_I\,dt + \bar\sigma_I\,d\bar W^I(t)\right) = I(t)\left(b_I\,dt + \sigma_{21}\,dW^V(t) + \sigma_{22}\,dW^I(t)\right), \end{aligned}$$

wobei $\sigma := (\sigma_{ij})_{i,j=1,2}$ mit $\sigma_{11} := \sigma_V, \sigma_{12} := 0, \sigma_{21} := \rho_{IV}\bar\sigma_I$ und $\sigma_{22} := \sqrt{1-\rho_{IV}^2}\bar\sigma_I$ ist und ρ_{IV} den Korrelationskoeffizienten zwischen den Wiener-Prozessen $W^V(.)$ und $\bar W^I(.)$ kennzeichnet. Aus der *Girsanov*-Transformation in die Wienerprozesse $W_0^V(.)$ und $\bar W_0^I(.)$ zum Martingalmaß P_0 — mit $\theta = \sigma^{-1}(b-\delta-r\mathbf{1}_2)$ — und anschließender Rücktransformation in die (wieder) mit ρ_{IV} korrelierten Wiener-Prozesse $W_0^V(.)$ und $W_0^I(.)$ (bezüglich P_0) ergibt sich:

$$\begin{aligned} dV(t) &= V(t)\left((r-\delta_V)\,dt + \sigma_{11}\,dW_0^V(t)\right) \\ &= V(t)\left((r-\delta_V)\,dt + \sigma_V\,dW_0^V(t)\right), \end{aligned} \tag{5.85}$$

$$\begin{aligned} dI(t) &= I(t)\left((r-\delta_I)\,dt + \sigma_{21}\,dW_0^V(t) + \sigma_{22}\,d\bar W_0^I(t)\right) \\ &= I(t)\left((r-\delta_I)\,dt + \bar\sigma_I\,dW_0^I(t)\right). \end{aligned} \tag{5.86}$$

Die Prozessdarstellung gemäß den Gl. (5.85) und (5.86) wird dem Weiteren zugrunde gelegt. Für den Term B_1 gilt dann[532]:

$$\begin{aligned} B_1 = &\int_a^\infty\int_b^\infty e^{-rT}V_0 e^{(r-\delta_V-\frac{1}{2}\sigma_V^2)T+\sigma_V\sqrt{T}y} \\ &\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{IV}^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{IV}^2)}(y^2-2\rho_{IV}yz+z^2)}\,dz\,dy, \end{aligned}$$

[532] Die hierfür benötigte Dichtefunktion einer bivariaten Normalverteilung der Zufallsvariablen X und Y ist in *Fahrmeier/Künstler/Pigeot/Tutz* (2001), S. 354, angegeben durch:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2-2\rho_{XY}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)+\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]}$$

mit den Verteilungsparametern: μ_X, μ_Y (Erwartungswerte), σ_X, σ_Y (Standardabweichungen) und ρ_{XY} (Korrelationskoeffizient). Ein Verfahren zur Berechnung eines diesbezüglichen Wahrscheinlichkeitswertes kann aus *Kocherlakota/Kocherlakota* (1985), S. 670 f., abgeleitet werden. Vgl. jedoch insbesondere auch die in *Hull* (2000), S. 272, beschriebene Näherung sowie die Approximation, welche sich aus der angenäherten Dichtefunktion in *Knobloch* (1998), S. 238, ergibt; zu Letzterer beachte den Hinweis in *Knobloch* (2003), S. 183.

wobei

$$V(T) \geq I_h \;\Leftrightarrow\; y \geq \frac{1}{\sigma_V\sqrt{T}}\left(\ln\frac{I_h}{V_0} - (r - \delta_V - \tfrac{1}{2}\sigma_V^2)T\right) =:\; a,$$
$$I(T) \geq V(T) \;\Leftrightarrow\; z \geq \frac{1}{\bar{\sigma}_I\sqrt{T}}\left(\ln\frac{V_0}{I_0} + (\delta_I - \delta_V + \tfrac{1}{2}(\bar{\sigma}_I^2 - \sigma_V^2))T + \sigma_V\sqrt{T}y\right) =:\; b.$$

Es ist nun:

$$\begin{aligned} B_1 \;&=\; V_0 e^{-\delta_V T}\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-\sigma_V\sqrt{T})^2} \\ &\quad \int_b^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho_{IV}^2)}} e^{-\frac{1}{2}\left(-\frac{\rho_{IV}y}{\sqrt{1-\rho_{IV}^2}}+\frac{z}{\sqrt{1-\rho_{IV}^2}}\right)^2} dz\,dy. \end{aligned}$$

Mit der Substitution:

$$\tilde{z} := \frac{1}{\sqrt{1-\rho_{IV}^2}}(z - \rho_{IV}y),$$

so dass $dz = \sqrt{1-\rho_{IV}^2}d\tilde{z}$ gilt, ist mit:

$$\begin{aligned} \tilde{b} &:= -\frac{1}{\sqrt{1-\rho_{IV}^2}}(b - \rho_{IV}y) \\ &= \underbrace{\frac{1}{\bar{\sigma}_I\sqrt{(1-\rho_{IV}^2)T}}\left[\ln\frac{I_0}{V_0} - (\delta_I - \delta_V + \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_I^2 - \sigma_V^2))T\right]}_{=:\,d} + \underbrace{\frac{\rho_{IV}\bar{\sigma}_I - \sigma_V}{\bar{\sigma}_I\sqrt{1-\rho_{IV}^2}}}_{=:\,k} y \end{aligned}$$

aufgrund der Symmetrie der Dichte zur Standardnormalverteilung in Bezug auf den Ursprung:

$$\begin{aligned} B_1 \;&=\; V_0 e^{-\delta_V T}\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-\sigma_V\sqrt{T})^2}\int_{-\infty}^{\tilde{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\tilde{z}^2}\,d\tilde{z}\,dy \\ &=\; V_0 e^{-\delta_V T}\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-\sigma_V\sqrt{T})^2}\Phi(d+ky)\,dy. \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$B_1 = V_0 e^{-\delta_V T} P(Z_1 \geq a, \underbrace{Z - kZ_1}_{=:\,Z_2} \leq d),$$

wobei Z für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable steht, die als stochastisch unabhängig von Z_1 zu betrachten ist. Die Zufallsvariablen Z_1 und Z_2 sind dann normalverteilt gemäß:

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \sigma_V\sqrt{T} \\ -k\sigma_V\sqrt{T} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -k \\ -k & 1+k^2 \end{pmatrix}\right).$$

Transformiert man diese Zufallsvariablen entsprechend:

$$\tilde{Z}_1 := \sigma_V\sqrt{T} - Z_1;\;\; \tilde{Z}_2 := \frac{\bar{\sigma}_I\sqrt{1-\rho_{IV}^2}(Z_2 + k\sigma_V\sqrt{T})}{\hat{\sigma}}$$

mit $\hat{\sigma} := \bar{\sigma}_I^2 + \sigma_V^2 - 2\rho_{IV}\bar{\sigma}_I\sigma_V$, dann zeigt sich:

$$B_1 = V_0 e^{-\delta_V T} P(\tilde{Z}_1 \leq \tilde{a}, \tilde{Z}_2 \leq \tilde{d}),$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \sigma_V\sqrt{T} - a = \frac{1}{\sigma_V\sqrt{T}}\left(\ln\frac{V_0}{I_h} + (r - \delta_V + \tfrac{1}{2}\sigma_V^2)T\right) \\ \tilde{d} &= \frac{\bar{\sigma}_I\sqrt{1-\rho_{IV}^2}(d + k\sigma_V\sqrt{T})}{\hat{\sigma}} \\ &= \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\left[\ln\frac{I_0}{V_0} - (\delta_I - \delta_V + \tfrac{1}{2}\hat{\sigma}^2)T\right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{pmatrix} \tilde{Z}_1 \\ \tilde{Z}_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\rho} \\ \tilde{\rho} & \frac{\bar{\sigma}_I^2(1-\rho_{IV}^2)(1+k^2)}{\hat{\sigma}^2} = 1 \end{pmatrix}\right)$$

mit $\tilde{\rho} := k\frac{\bar{\sigma}_I\sqrt{1-\rho_{IV}^2}}{\hat{\sigma}} = \frac{\rho_{IV}\bar{\sigma}_I - \sigma_V}{\hat{\sigma}}$. Damit ist:

$$B_1 = V_0 e^{-\delta_V T}\Phi^{(\tilde{\rho})}(\tilde{a}, \tilde{d}).$$

$\Phi^{(\tilde{\rho})}(\tilde{a}, \tilde{d})$ steht hierbei für den Wert der Verteilungsfunktion einer bivariaten Standardnormalverteilung, deren Zufallsvariablen einen Korrelationskoeffizienten von $\tilde{\rho}$ aufweisen, an der Stelle $(\tilde{a}, \tilde{d})$.

Der Ausdruck B_2 ergibt sich analog als:

$$B_2 = I_0 e^{-\delta_I T}\Phi^{(\bar{\rho})}(\bar{a}, \bar{d})$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{1}{\bar{\sigma}_I\sqrt{T}}\left(\ln\frac{I_0}{I_h} + (r - \delta_I + \tfrac{1}{2}\bar{\sigma}_I^2)T\right), \\ \bar{d} &= \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\left[\ln\frac{V_0}{I_0} - (\delta_V - \delta_I + \tfrac{1}{2}\hat{\sigma}^2)T\right], \\ \bar{\rho} &= \frac{\rho_{IV}\sigma_V - \bar{\sigma}_I}{\hat{\sigma}}. \end{aligned}$$

Schließlich gilt für den dritten Summanden B_3 zur Ermittlung des Optionswertes:

$$B_3 = I_h e^{-rT} P(\min[V(T), I(T)] \geq I_h) = I_h e^{-rT} P(V(T) \geq I_h, I(T) \geq I_h).$$

Aus der vorausgehenden Herleitung wird der Term a übernommen und zusätzlich der Term $\hat{b}$ definiert; für beide Terme gilt:

$$\begin{aligned} V(T) \geq I_h \quad &\Leftrightarrow \quad Z_3 \geq \frac{1}{\sigma_V\sqrt{T}}\left(\ln\frac{I_h}{V_0} - (r - \delta_V - \tfrac{1}{2}\sigma_V^2)T\right) =:\ a, \\ I(T) \geq I_h \quad &\Leftrightarrow \quad Z_4 \geq \frac{1}{\bar{\sigma}_I\sqrt{T}}\left(\ln\frac{I_h}{I_0} - (r - \delta_I - \tfrac{1}{2}\bar{\sigma}_I^2)T\right) =:\ \hat{b}, \end{aligned}$$

wobei Z_3 und Z_4 standardnormalverteilte Zufallsvariablen mit einem Korrelationskoeffizienten von ρ_{IV} sind. Damit ist:

$$B_3 = I_h e^{-rT} P(Z_3 \geq a, Z_4 \geq \hat{b}).$$

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Tabelle 5.2

Rückzahlungsstrukturen und Ausübungsmuster alternativer Realoptionen

Szenario	$B_{PO}(T)$	$B_{PO}^{Alt.}(T)$	Handlung zu $B_{PO}^{Alt.}(T)$
$V(T) > I(T) > I_h$	$V(T) - I_h$	$V(T) - I_h$	Prod.; Opt.-Ausüb.;
$V(T) > I_h \geq I(T)$	$V(T) - I(T)$	$V(T) - I(T)$	Prod.; Verf. der P.-Option
$I(T) \geq V(T) > I_h$	$V(T) - I_h$	$I(T) - I_h$	keine Prod.; Opt.-Ausüb.; Verk. des Vorprodukts
$I(T) \geq I_h \geq V(T)$	0	$I(T) - I_h$	keine Prod.; Opt.-Ausüb.; Verk. des Vorprodukts
$I_h > I(T) \geq V(T)$	0	0	keine Prod.; Verf. der P.-Option
$I_h \geq V(T) > I(T)$	$V(T) - I(T)$	$V(T) - I(T)$	Prod.; Verf. der P.-Option

Da mit Bezug auf die Normalverteilungsdichten gilt: $P(Z_3 \geq a, Z_4 \geq \hat{b}) = P(\breve{Z}_3 \leq \breve{a}, \breve{Z}_4 \leq \breve{b})$ mit $\breve{Z}_3 = -Z_3, \breve{Z}_4 = -Z_4, \breve{a} = -a$ und $\breve{b} = -\hat{b}$, ist:

$$B_3 = I_h e^{-rT} \Phi^{(\rho_{IV})}(\breve{a}, \breve{b}),$$

wobei

$$\begin{aligned} \breve{a} &= \frac{1}{\sigma_V \sqrt{T}} \left(\ln \frac{V_0}{I_h} + (r - \delta_V - \tfrac{1}{2}\sigma_V^2)T \right), \\ \breve{b} &= \frac{1}{\bar{\sigma}_I \sqrt{T}} \left(\ln \frac{I_0}{I_h} + (r - \delta_I - \tfrac{1}{2}\bar{\sigma}_I^2)T \right). \end{aligned}$$

Mit

$$h_{Call}^{E;min}(V, I; I_h) = B_1 + B_2 - B_3 \tag{5.87}$$

ist somit der Wert der „Minimum"-Kaufoption bei Dividendenausschüttungen vollständig beschrieben.

5.6.2 Charakterisierung einer alternativen Preisoption

Im Folgenden soll die Rückflussstruktur der Kaufoption dargestellt werden, welcher der durch Gl. (3.128) gegebene Anspruch $B_{PO}(T)$ zugrunde liegt. Darüber hinaus wird ein analoger Ausdruck für einen bedingten Anspruch formuliert, welcher aus der in Anmerkung 3.4 beschriebenen Situation hervorgeht. Diesem liegt somit eine Situation zugrunde, in der die betrachtete Unternehmung produzieren kann, indem sie sich das Vorprodukt am Markt zu $I(T)$ oder über die Ausübung der Preisoption zu I_h beschafft. Falls sich eine Produktion aufgrund eines gesunkenen Verkaufserlöses des eigenen Produktes nicht lohnt, kann die Unternehmung einen Barausgleich in Höhe des Ausübungswertes ihrer Preisoption vom Zulieferer verlangen. Der dadurch beschriebene Anspruch wird mit $B_{PO}^{Alt.}(T)$ gekennzeichnet.

Der Vergleich der Ansprüche erfolgt anhand ihrer Rückflüsse für das betrachtete Unternehmen, differenziert nach den möglichen Preisszenarien gemäß Tabelle 3.2, welche bereits die bedingten Rückflüsse zu $B_{PO}(T)$ ausweist. Tabelle 5.2 zeigt die Rückflüsse beider Optionen und beschreibt für $B_{PO}^{Alt.}(T)$ die Handlung des Unternehmens. Es ist daraus zu ersehen, dass der Anspruch $B_{PO}^{Alt.}(T)$ den Anspruch $B_{PO}(T)$ dominiert. Dies zeigt sich zunächst im Fall $I(T) \geq V(T) > I_h$, da dann unmittelbar $I(T) - I_h \geq V(T) - I_h$ gilt; zudem beinhaltet der Anspruch $B_{PO}^{Alt.}(T)$ im Fall $I(T) \geq I_h \geq V(T)$ einen Rückfluss i.H.v. $I(T) - I_h \geq 0$, während der Inhaber von $B_{PO}(T)$ leer ausgeht. Die beiden angesprochenen Fälle stehen für Situationen, in denen die Technologie des betrachteten Unternehmens verglichen mit dem aktuellen Wert des Vorproduktes wertlos ist. Im ersten dieser Fälle ist im Rahmen des Anspruches $B_{PO}(T)$ die Technologie nur durch die Ausübung der Preisoption vorteilhaft. Hinsichtlich des Anspruches $B_{PO}^{Alt.}(T)$ ist davon auszugehen, dass das betrachtete Unternehmen den aktuellen Wert des Vorproduktes erlösen kann. Dies bringt im ersten dieser Fälle mehr als eine Verwendung in der eigenen Produktion, folglich auch mehr als nach dem Anspruch $B_{PO}(T)$. Im anderen Fall ist damit ein finanzieller Zufluss außerhalb der eigenen Produktion erzielbar. Daraus ist nun zu folgern, dass ein für den Anspruch $B_{PO}(T)$ abgeleiteter Käuferpreis zugleich eine Untergrenze für den dem Anspruch $B_{PO}^{Alt.}(T)$ zuzuordnenden Käuferpreis bildet.

Aus dem Rückzahlungsmuster der Tabelle 5.2 ist darüber hinaus zu ersehen, dass Folgendes gilt[533]:

$$\begin{aligned} B_{PO}^{Alt.}(T) &= \max[V(T), I(T)] - \min[I(T), I_h] \\ &\sim \max\left[\max\left[V(T), I(T)\right] - I_h + \max\left[I_h - I(T), 0\right], 0\right], \end{aligned}$$

wodurch für die alternativ betrachtete Realoption eine analoge Darstellung zu Gl. (3.128) gegeben ist. Damit ist die Dominanz des Anspruches $B_{PO}^{Alt.}(T)$ gegenüber dem Anspruch $B_{PO}(T)$ auch unmittelbar zu ersehen. Allerdings lässt sich auf Basis dieser Darstellung nicht in einfacher Weise eine Preisuntergrenze für den Fall eines in Bezug auf $I(.)$ unvollständigen Marktes i.e.S. ableiten.

5.6.3 Herleitung des Wertes einer up-add Cross-Verkaufsoption

Gegenstand der folgenden Ausführungen ist die Herleitung der Bewertungsgleichung (3.147) für eine up-add Cross-Verkaufsoption[534]. Ausgangspunkt ist der durch Gl. (3.146) gegebene Anspruch:

$$B_{CP}(T) := \max\left[I_h - I^L(T), 0\right] \mathbf{1}_{\{I(T) \geq I_h\}}.$$

[533] Vgl. Gl. (3.132).

[534] Die Herleitung ist eine Modifikation derjenigen für verschwindende Dividendenprozesse in *Knobloch* (2003), S. 186 ff.

Der Wert der Option muss sich somit aus dem Ansatz:

$$h_{Put}^{E;up}(I^L; I; I_h) = E_0 \left[e^{-rT} \max \left[I_h - I^L(T), 0 \right] \mathbf{1}_{\{I(T) \geq I_h\}} \right]$$

ergeben.

Gemäß den Gl. (3.143) und (3.122) liegen für $t \in [0, T]$ die Prozessgleichungen:

$$\begin{aligned} dI^L(t) &= I^L(t) \left(b_L \, dt + \sigma_L \, dW^L(t) \right), \\ dI(t) &= I(t) \left(b_I \, dt + \bar{\sigma}_I \, d\bar{W}^I(t) \right) \end{aligned}$$

zugrunde mit den Prozessanfangswerten I_0^L und I_0. $W^L(.)$ und $\bar{W}^I(.)$ kennzeichnen zwei ggf. korrelierte Wiener-Prozesse. $\rho_{LI} (\neq 1)$ steht für den konstanten Korrelationskoeffizienten. Analog der Vorgehensweise in Anhang 5.6.1 werden die Prozesse mit Hilfe von zwei unkorrelierten Wiener-Prozessen ausgedrückt. Hiermit gilt ($t \in [0, T]$):

$$\begin{aligned} dI^L(t) &= I^L(t) \left(b_L \, dt + \sigma_{11} \, dW^L(t) \right), \\ dI(t) &= I(t) \left(b_I \, dt + \sigma_{21} \, dW^L(t) + \sigma_{22} \, dW^J(t) \right), \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten der Wiener-Prozesse wie bisher in der Matrix $\sigma := (\sigma_{ij})_{i,j=1,2}$ zusammengefasst sind, für die folgende Herleitung allerdings die Bedeutung $\sigma_{11} := \sigma_L, \sigma_{12} := 0, \sigma_{21} := \rho_{LI} \bar{\sigma}_I$ und $\sigma_{22} := \sqrt{1 - \rho_{LI}^2} \bar{\sigma}_I$ erhalten. Aus der *Girsanov*-Transformation $dW_0^k(.) := (dW_0^1(.), dW_0^2(.))' = (dW^L(.), dW^J(.))' + \theta \, dt$ mit $\theta := \sigma^{-1}(\bar{b} - \bar{\delta} - r\mathbf{1}_2)$, wobei $\bar{b} := (b_L, b_I)'$ und $\bar{\delta} := (\delta_L, \delta_I)'$ sind, folgt ($t \in [0, T]$):

$$\begin{aligned} dI^L(t) &= I^L(t) \left((r - \delta_L) \, dt + \sigma_{11} \, dW_0^1(t) \right), \\ dI(t) &= I(t) \left((r - \delta_I) \, dt + \sigma_{21} \, dW_0^1(t) + \sigma_{22} \, W_0^2(t) \right). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Prozessdarstellung:

$$I^L(T) = I_0^L e^{(r - \delta_L - \frac{1}{2}\sigma_{11}^2)T + \sigma_{11} \, W_0^1(T)}, \tag{5.88}$$

$$I(T) = I_0 e^{(r - \delta_I - \frac{1}{2}\|\sigma_{2.}\|^2)T + \sigma_{2.} \, W_0^k(T)}. \tag{5.89}$$

Die Ausübungsbedingungen der Option ergeben:

$$\begin{aligned} & & I_h &\geq I^L(T) \\ &\Leftrightarrow & I_h &\geq I_0^L e^{(r - \delta_L - \frac{1}{2}\sigma_{11}^2)T + \sigma_{11} \, W_0^1(T)} \\ &\Leftrightarrow & W_0^1(T) &\leq \frac{1}{\sigma_{11}} \left[\ln \frac{I_h}{I_0^L} - (r - \delta_L - \tfrac{1}{2}\sigma_{11}^2)T \right] \\ &\Leftrightarrow & z_1 &\leq \frac{1}{\sigma_{11}\sqrt{T}} \left[\ln \frac{I_h}{I_0^L} - (r - \delta_L - \tfrac{1}{2}\sigma_{11}^2)T \right] =: o_L \end{aligned}$$

sowie analog:

$$\begin{aligned} & & I_h &\leq I(T) \\ &\Leftrightarrow & \sigma_{21} W_0^1(T) + \sigma_{22} W_0^2(T) &\geq \ln \frac{I_h}{I_0} - \left(r - \delta_I - \tfrac{1}{2} \left(\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2 \right) \right) T, \end{aligned}$$

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

was äquivalent ist zu

$$\tilde{z}_2 \geq \frac{1}{\sigma_{22}\sqrt{T}} \underbrace{\left[\ln\frac{I_h}{I_0} - \left(r - \delta_I - \frac{1}{2}\left(\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2\right)\right) T - \sigma_{21}\sqrt{T} z_1\right]}_{=: \tilde{u}_I}.$$

Dabei kennzeichnen z_1 und $\tilde{z}_2$ zwei jeweils standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Es sei der Erwartungswert (unter P_0) der (diskontierten) positiven Auszahlung im Falle der Ausübung wie folgt definiert:

$$x_1 := I_h e^{-rT} P(I_h \geq I^L(T) \wedge I_h \leq I(T)).$$

Dann gilt unmittelbar:

$$x_1 = I_h e^{-rT} \int\limits_{-\infty}^{o_L} \int\limits_{\tilde{u}_I}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(z_1^2 + \tilde{z}_2^2)}\, d\tilde{z}_2\, dz_1.$$

Mit der Substitution:

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2}}(\sigma_{21} z_1 + \sigma_{22}\tilde{z}_2) = \frac{1}{\bar{\sigma}_I}(\sigma_{21} z_1 + \sigma_{22}\tilde{z}_2);\; d\tilde{z}_2 = \frac{\bar{\sigma}_I}{\sigma_{22}}\, dz_2,$$

wobei die Beziehung $\bar{\sigma}_I = \sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2}$ verwendet wurde, folgt:

$$x_1 = I_h e^{-rT} \int\limits_{-\infty}^{o_L} \int\limits_{u_I}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(z_1^2 + \frac{1}{\sigma_{22}^2}(\bar{\sigma}_I z_2 - \sigma_{21} z_1)^2\right)} \frac{\bar{\sigma}_I}{\sigma_{22}}\, dz_2\, dz_1$$

mit

$$u_I = \frac{1}{\bar{\sigma}_I}(\sigma_{21} z_1 + \sigma_{22}\tilde{u}_I) = \frac{1}{\bar{\sigma}_I\sqrt{T}}\left[\ln\frac{I_h}{I_0} - \left(r - \delta_I - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_I\right) T\right].$$

Unter Verwendung der Beziehungen zwischen den Volatilitätsparametern lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned} x_1 &= I_h e^{-rT} \int\limits_{-\infty}^{o_L} \int\limits_{u_I}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{L,I}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{L,I}^2)}\left((1-\rho_{L,I}^2) z_1^2 + z_2^2 - 2\rho_{L,I} z_1 z_2 + \rho_{L,I}^2 z_1^2\right)}\, dz_2\, dz_1 \\ &= I_h e^{-rT} \int\limits_{-\infty}^{o_L} \int\limits_{-\infty}^{o_I} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{L,I}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{L,I}^2)}\left(z_1^2 - 2(-\rho_{L,I}) z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_2^2\right)}\, d\bar{z}_2\, dz_1, \end{aligned}$$

wobei im zweiten Umformungsschritt die Variable z_2 durch $\bar{z}_2$ substituiert wurde, so dass die folgende Intervallgrenze entsteht[535]:

$$o_I := -u_I = \frac{1}{\bar{\sigma}_I\sqrt{T}}\left[\ln\frac{I_0}{I_h} + \left(r - \delta_I - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_I\right) T\right].$$

Bezeichnet $\Phi^{\rho}(.,.)$ die Verteilungsfunktion der bivariaten Normalverteilung mit Korrelationskoeffizient ρ[536], dann gilt folglich:

$$x_1 = I_h e^{-rT} \Phi^{(-\rho_{L,I})}(o_L, o_I). \tag{5.90}$$

[535] Das negative Vorzeichen aus $dz_2 = -d\bar{z}_2$ wurde durch die Vertauschung der Intervallgrenzen berücksichtigt.

[536] Vgl. Fn. 532, S. 338.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Es ist nunmehr der Erwartungswert (unter P_0) der (diskontierten) negativen Auszahlung im Falle der Ausübung zu berechnen. Hierfür ist der folgende Ausdruck auszuwerten:

$$\begin{aligned} x_2 &:= e^{-rT} I^L(T) P(I_h \geq I^L(T) \wedge I_h \leq I(T)) \\ &= e^{-rT} I_0^L \int_{-\infty}^{o_L} \int_{\tilde{u}_I}^{\infty} e^{(r-\delta_L-\frac{1}{2}\sigma_{11}^2)T+\sigma_{11}\sqrt{T}z_1} \tfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(z_1^2+\tilde{z}_2^2)}\, d\tilde{z}_2\, dz_1 \\ &= I_0^L e^{-\delta_L T} \int_{-\infty}^{o_L} \int_{\tilde{u}_I}^{\infty} \tfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(z_1^2+\tilde{z}_2^2)-\frac{1}{2}\sigma_{11}^2 T+\sigma_{11}\sqrt{T}z_1}\, d\tilde{z}_2\, dz_1. \end{aligned}$$

Mit der ersten Substitution:

$$\bar{z}_1 = z_1 - \sigma_{11}\sqrt{T}, \text{ so dass } d\bar{z}_1 = dz_1 \text{ gilt, ist:}$$

$$x_2 = I_0^L e^{-\delta_L T} \int_{-\infty}^{\bar{o}_L} \int_{\check{u}_I}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(\bar{z}_1^2+\tilde{z}_2^2)}\, d\tilde{z}_2\, d\bar{z}_1.$$

Hierbei sind:

$$\begin{aligned} \bar{o}_L &:= o_L - \sigma_{11}\sqrt{T} = \frac{1}{\sigma_{11}\sqrt{T}} \left[\ln \frac{I_h}{I_0^L} - (r - \delta_L + \tfrac{1}{2}\sigma_{11}^2)T \right], \\ \check{u}_I &:= \frac{1}{\sigma_{22}\sqrt{T}} \left[\ln \frac{I_h}{I_0} - \left(r - \delta_I - \tfrac{1}{2}\left(\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2\right) + \sigma_{11}\sigma_{21}\right) T - \sigma_{21}\sqrt{T}\bar{z}_1 \right]. \end{aligned}$$

Eine zweite Substitution mit:

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{(\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2)}} (\sigma_{21}\bar{z}_1 + \sigma_{22}\tilde{z}_2) \Leftrightarrow \tilde{z}_2 = \frac{1}{\sigma_{22}} \left(\sqrt{(\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2)} z_2 - \sigma_{21}\bar{z}_1 \right)$$

führt analog der Vorgehensweise zur Bestimmung von x_1 auf:

$$x_2 = I_0^L e^{-\delta_L T} \int_{-\infty}^{\bar{o}_L} \int_{\hat{u}_I}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{LI}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{LI}^2)}\left(\bar{z}_1^2 - 2\rho_{LI}\bar{z}_1 z_2 + z_2^2\right)}\, dz_2\, d\bar{z}_1,$$

mit

$$\hat{u}_I = \frac{1}{\bar{\sigma}_I\sqrt{T}} \left[\ln \frac{I_h}{I_0} - \left(r - \delta_I - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_I^2 + \sigma_{11}\sigma_{21} \right) T \right].$$

Nach der Substitution $\hat{z}_2 = -z_2$ ist folglich:

$$x_2 = I_0^L e^{-\delta_L T} \Phi^{(-\rho_{LI})}(\bar{o}_L, -\hat{u}_I). \tag{5.91}$$

Zusammenfassend ist der Wert der Cross-Verkaufsoption also gegeben durch:

$$h_{Put}^{E;up}(I^L; I; I_h) = x_1 - x_2 = I_h e^{-rT} \Phi^{(-\rho_{LI})}(d_1, d_2) - I_0^L e^{-\delta_L T} \Phi^{(-\rho_{LI})}(d_3, d_4)$$

mit

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\sigma_L\sqrt{T}} \left[\ln \frac{I_h}{I_0^L} - (r - \delta_L - \tfrac{1}{2}\sigma_L^2)T \right], \\ d_2 &= \frac{1}{\bar{\sigma}_I\sqrt{T}} \left[\ln \frac{I_0}{I_h} + \left(r - \delta_I - \tfrac{1}{2}\bar{\sigma}_I\right) T \right], \\ d_3 &= \frac{1}{\sigma_L\sqrt{T}} \left[\ln \frac{I_h}{I_0^L} - (r - \delta_L + \tfrac{1}{2}\sigma_L^2)T \right], \\ d_4 &= \frac{1}{\bar{\sigma}_I\sqrt{T}} \left[\ln \frac{I_0}{I_h} + \left(r - \delta_I - \tfrac{1}{2}\bar{\sigma}_I^2 + \rho_{LI}\sigma_L\bar{\sigma}_I\right) T \right]. \end{aligned}$$

Dies entspricht der Formel nach Gl. (3.147).

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Literaturverzeichnis

Arrow, K. J. (1953): Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques, in: Econométrie, Colloques Internationaux du Centre Nationale de la Recherche Scientifique (40), S. 41-47; englische Version: The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing, in: Review of Financial Studies (31), S. 91-96.

— (1971): Essays in the Theory of Risk-Bearing, Amsterdam u.a.

Bachelier, L. (1953): Théorie de la spéculation, Annales Scientifique de l'Ecole Normal Superieure (17), S. 21-86.

Bakshi, G./*Cao,* C./*Chen,* Z. (1997): Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models, in: The Journal of Finance (52), S. 2003-2049.

Barber, W. J. (1997; ed.): The Works of Irving Fisher, Vol. 9: The Theory of Interest, London.

Bardhan, I. (1994): Consumption and Investment under Constraints, in: Journal of Economic Dynamics and Control (18), S. 919-929.

Basak, S. (1995): A General Equilibrium Model of Portfolio Insurance, in: Review of Financial Studies (8), S. 1059-1090.

Becker, G. S. (1976): The Economic Approach to Human Behavior, Chicago/London.

Bellini, F./*Fritelli,* M. (2002): On the Existence of Minimax Martingale Measures, in: Mathematical Finance (12), S. 1-21.

Bernardo, A. E./*Ledoit,* O. (2000): Gain, Loss, and Asset Pricing, in: Journal of Political Economy (108), S. 144-172.

Billingsley, P. (1999): Convergence of Probability Measures, 2^{nd} ed., New York u.a.

— (1979): Probability and Measure, 3^{rd} ed., New York u.a.

Bingham, N. H./*Kiesel,* R. (2004): Risk-Neutral Valuation — Pricing and Hedging of Derivatives, 2^{nd} ed., London u.a.

Bismut, J.-M. (1975): Growth and Optimal Intertemporal Allocation of Risks, in: Journal of Economic Theory (10), S. 239-257.

Bitz, M. (1981): Entscheidungstheorie, München.

Bjerksund, P./*Ekern,* S. (1990): Managing Investment Opportunities under Price Uncertainty: from „Last Chance" to „Wait and See" Strategies, in: Financial Management (19), S. 65-83.

Black, F./*Scholes,* M. (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities, in: Journal of Political Economy (81), S. 637-654.

Bockemühl, M. (2001): Realoptionstheorie und die Bewertung von Produktinnovationen, Wiesbaden.

Branger, N. (2002): Bewertung nicht redundanter Finanzderivate mittels Entropie und Cross-Entropie, Wiesbaden.

Branger, N./*Schlag,* C. (2004): Zinsderivate, Berlin u.a.

Brennan, M. J./*Trigeorgis,* L. (2000; eds.): Project Flexibility, Agency, and Competition, New York.

Breuer, W./*Gürtler,* M. (2001): Hedging in Incomplete Markets: an Approximation Procedure for Practical Application, in: Journal of Futures Markets (21), S. 599-631.

Breuer, W./*Gürtler,* M./*Schuhmacher,* F. (1999): Portfoliomanagement, Wiesbaden.

Broadie, M./*Cvitanić,* J./*Soner,* H. M. (1998): Optimal Replication of Contingent Claims under Portfolio Constraints, in: The Review of Financial Studies (11), S. 59-79.

Büning, H./*Naeve,* P./*Trenkler,* G./*Waldmann,* K.-H. (2000): Mathematik für Ökonomen im Hauptstudium, München/Wien.

Carter, M. (2001): Foundations of Mathematical Economics, Cambridge/London.

Černý, A./*Hodges,* S. (2002): The Theory of Good-Deal Pricing in Financial Markets, in: *Geman,* H./*Madan,* D./*Pliska,* S. R./*Vorst,* T. (eds.), Mathematical Finance — Bachelier Congress 2000, Berlin u.a., S. 175-202.

Cochrane, J. H./*Saá-Requejo,* J. (2000): Beyond Arbitrage: Good-Deal Asset Price Bounds in Incomplete Markets, in: Journal of Political Economy (108), S. 79-119.

Copeland, T. E./*Weston,* J. F./*Shastri,* K. (2005): Financial Theory and Corporate Policy, 4^{th} ed., Boston u.a.

Cossin, D./*Leleux,* B./*Saliasi,* E. (2002): Understanding the Economic Value of Legal Covenants in Investment Contracts: A Real-Options Approach to Venture Equity Contracts, Paper submitted to the 6^{th} Annual Real Options Conference, July 4-6, Paphos, Cyprus, S. 1-57.

Cox, J. C./*Rubinstein,* M. (1985): Options Markets, Englewood Cliffs.

Cuoco, D. (1997): Optimal Consumption and Equilibrium Prices with Portfolio Constraints and Stochastic Income, in: Journal of Economic Theory (72), S. 33-73.

Cvitanić, J./*Karatzas,* I. (1992): Convex Duality in Constrained Portfolio Optimization, in: The Annals of Applied Probability (2), S. 767-818.

— (1993): Hedging Contingent Claims with Constrained Portfolios, in: The Annals of Applied Probability (3), S. 652-681.

Cvitanić, J./*Pham,* H./*Touzi,* N. (1999): Super-Replication in Stochastic Volatility Models under Portfolio Constraints, in: Journal of Applied Probability (36), S. 523-545.

Cvitanić, J./*Schachermayer,* W./*Wang,* H. (2001): Utility Maximization in Incomplete Markets with Random Endowment, in: Finance & Stochastics (5), S. 259-272.

Davis, M. H. A. (1997): Option Pricing in Incomplete Markets, in: *Dempster,* M. A. H./*Pliska,* S. R. (eds.), Mathematics of Derivative Securities, S. 216-226.

Debreu, G. (1959): The Theory of Value, New York.

Delbaen, F./*Grandits,* P./*Rheinländer,* T./*Samperi,* D./*Schweizer,* M./*Stricker,* C. (2002): Exponential Hedging and Entropic Penalties, in: Mathematical Finance (12), S. 99-123.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Delbaen, F./*Schachermayer,* W. (1996): The Variance-optimale Martingal Measure for Continuous Processes, in: Bernoulli (2), S. 81-105.

Dixit, A. K./*Pindyck,* R. S. (1994): Investment under Uncertainty, Princeton.

Dothan, M. U. (1990): Prices in Financial Markets, New York/Oxford.

Duffie, D. (1996): Dynamic Asset Pricing Theory, 2^{nd} ed., New Jersey.

Duffie, D./*Fleming,* W./*Soner,* H. M./*Zariphopoulou,* T. (1997): Hedging in Incomplete Markets with HARA Utility, in: Journal of Economic Dynamics and Control (21), S. 753-782.

Duffie, D./*Richardson,* H. R. (1991): Mean-Variance Hedging in Continuous Time, in: The Annals of Applied Probability (1), S. 1-15.

Duffie, D./*Zariphopoulou,* T. (1997): Optimal Investment with Undiversifiable Income Risk, in: Mathematical Finance (3), S. 135-148.

Eberlein, E./*Keller,* U. (1995): Hyperbolic Distributions in Finance, in: Bernoulli (1), S. 281-299.

Eberlein, E./*Keller,* U./*Prause,* K. (1998): New Insights into Smile, Mispricing, and Value at Risk: The Hyperbolic Model, in: Journal of Business (71), S. 371-405.

Eisele, W. (1974): Betriebswirtschaftliche Kapitaltheorie und Unternehmensentwicklung, Stuttgart.

— (2002): Technik des betrieblichen Rechnungswesens, 7. Aufl., München.

Eisele, W./*Knobloch,* A. P. (2000): Value at Risk: Tool for Managing Trading Risks, in: *Frenkel, M./Hommel, U./Rudolf, M.* (eds.), Risk Management — Challenge and Opportunity, Essays in Honor of Gunter *Dufey*, Berlin u.a., S. 155-179.

El Karoui, N./*Quenez,* M.-C. (1991): Programmation dynamique et évaluation des actifs contingents en marché incomplet, in: C. R. Académie des Sciences Paris, t. 313, S. 851-854.

— (1995): Dynamic Programming and Pricing of Contingent Claims in an Incomplete Market, in: SIAM Journal of Control and Optimization (33), S. 29-66.

Elliott, R. J. (1982): Stochastic Calculus and Applications, New York u.a.

Elliott, R. J./*Kopp,* P. E. (1999): Mathematics of Financial Markets, New York u.a.

Esser, A. (2004): Pricing in (In)Complete Markets, Berlin u.a.

Fahrmeier, L./*Künstler,* R./*Pigeot,* I./*Tutz,* G. (2001): Statistik, 3. Aufl., Berlin u.a.

Fishburn, P. C. (1964): Independence in Utility Theory with Whole Product Sets, in: Operations Research (13), S. 28-45.

Fishman, G. S. (1996): Monte Carlo, New York u.a.

Fleming, W. H./*Rishel,* R. W. (1975): Deterministic and Stochastic Optimal Control, New York u.a.

Föllmer, H./*Schweizer,* M. (1991): Hedging of Contingent Claims Under Incomplete Information, in: *Davis,* M. H. A./*Elliott,* R. J. (eds.), Applied Stochastic Analysis, London, New York, S. 389-414.

Föllmer, H./*Sondermann,* D. (1986): Hedging of Non-Redundant Contingent Claims, in: *Hildenbrand,* W./*Mas-Colell,* A. (eds.), Contributions to Mathematical Finance — in Honor of Gérard *Debreu*, Amsterdam u.a., S. 205-223.

Franke, G./*Hax,* H. (2004): Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt, 5. Aufl., Berlin u.a.

Frey, R./*Sin,* C. A. (1999): Bounds on European Option Prices under Stochastic Volatility, in: Mathematical Finance (9), S. 97-116.

Friend, I./*Blume,* M. E. (1975): The Demand for Risky Assets, in: The American Economic Review (65), S. 900-922.

Fritelli, M. (2000a): Introduction to a Theory of Value Coherent with the No-Arbitrage Principle, in: Finance & Stochastics (4), S. 275-297.

— (2000b): The Minimal Entropy Martingale Measure and the Valuation Problem in Incomplete Markets, in: Mathematical Finance (10), S. 39-52.

Gale, D./*Hellwig,* M. (1985): Incentive-Compatible Debt Contracts: The One-Period Problem, in: Review of Economic Studies (52), S. 647-663.

Geske, R. (1979): The Valuation of Compound Options, in: Journal of Financial Economics (7), S. 63-81.

Goldberg, V. P. (1990): Aversion to Risk Aversion in the New Institutional Economics, in: Journal of Institutional and Theoretical Economics (146), S. 216-222.

Grünewald, B. (1998): Absicherungsstrategien für Optionen bei Kurssprüngen, Wiesbaden.

Hachmeister, D. (2000): Der Discounted Cash Flow als Maß der Unternehmenswertsteigerung, Frankfurt am Main u.a.

Hansen, L. P./*Jagannathan,* R. (1991): Implications of Security Market Data for Models of Dynamic Economies, in: The Journal of Political Economy (99), S. 225-262.

Harrison, J. M./*Kreps,* D. M. (1979): Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, in: Journal of Economic Theory (20), S. 381-408.

Harrison, J. M./*Pliska,* S. R. (1981): Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading, in: Stochastic Processes and their Applications (11), S. 215-260.

Häuselmann, H. (2001): Wertpapierleihe und Repo-Geschäfte, in: *Gerke,* W./*Steiner,* M. (Hrsg.), Handwörterbuch des Bank- und Finanzwesens, 3. Aufl., Stuttgart, Sp. 2258-2267.

Hax, H. (1985): Investitionstheorie, 5. Aufl., Würzburg/Wien.

He, H./*Pearson,* N. D. (1991): Consumption and Portfolio Policies with Incomplete Markets and Short-Sale Constraints: The Infinite Dimensional Case, in: Journal of Economic Theory (54), S. 259-304.

Hempelmann, B./*Lürwer,* M./*Brackschulze,* K. (2002): Modellierung der Zeitpräferenz bei intemporalen Entscheidungen, in: Wirtschaftswissenschaftliches Studium (31), S. 381-386.

Henderson, V. (2002): Valuation of Claims on Nontraded Assets Using Utility Maximization, in: Mathematical Finance (12), S. 351-373.

Hindy, A. (1995): Viable Prices in Financial Markets with Solvency Constraints, in: Journal of Mathematical Economics (24), S. 105-135.

Hoel, P. G./*Port,* S. C./*Stone,* C. J. (1972): Introduction to Stochastic Processes, Boston u.a.

Holtrode, R. (2000): Zum Hedging Europäischer Aktienoptionen bei stochastischen Volatilitäten, Lohmar/Köln.

Hubalek, F./*Schachermayer,* W. (2001): The Limitations of No-Arbitrage Arguments for Real Options, in: Journal of Theoretical and Applied Finance (4), S. 361-373.

Hull, J. C. (2000): Options, Futures and Other Derivatives, 4^{th} ed., Upper Saddle River.

Ingersoll, J. E. (1987): Theory of Financial Decision Making, Savage.

Irle, A. (1998): Finanzmathematik — die Bewertung von Derivaten, Stuttgart.

Jorion, P. (2001): Value at Risk, 2^{nd} ed., New York u.a.

Kallsen, J. (1998): Duality Links between Portfolio Optimization and Derivative Pricing, Technical Report 40/1998, Mathematische Fakultät, Universität Freiburg im Breisgau.

— (1999): A Utility Maximization Approach to Hedging in Incomplete Markets, in: Mathematical Methods of Operations Research (51), S. 357-374.

— (2000): Optimal Portfolios for Exponential Lèvy Processes, in: Mathematical Methods of Operations Research (50), S. 321-338.

— (2002a): Utility-Based Derivative Pricing in Incomplete Markets, in: *Geman,* H./*Madan,* D./*Pliska,* S. R./*Vorst,* T. (eds.), Mathematical Finance — Bachelier Congress 2000, Berlin u.a., S. 313-338.

— (2002b): Derivative Pricing Based on Local Utility Maximization, in: Finance & Stochastics (6), S. 115-140.

Karatzas, I./*Kou,* S. G. (1996): On the Pricing of Contingent Claims under Constraints, in: The Annals of Applied Probability (6), S. 321-369.

— (1998): Hedging American Contingent Claims with Constrained Portfolios, in: Finance & Stochastics (2), S. 215-258.

Karatzas, I./*Lehoczky,* J. P./*Sethi,* S. P./*Shreve,* S. E. (1986): Explicit Solution of a General Consumption/Investment Problem, in: Mathematics of Operations Research (11), S. 261-294.

Karatzas, I./*Lehoczky,* J. P./*Shreve,* S. E. (1987): Optimal Portfolio and Consumption Decisions for a „Small Investor" on a Finite Horizon, in: SIAM Journal of Control and Optimization (25), S. 1557-1586.

Karatzas, I./*Lehoczky,* J. P./*Shreve,* S. E./*Xu,* G.-L. (1991): Martingale and Duality Methods for Utility Maximization in an Incomplete Market, in: SIAM Journal of Control and Optimization (29), S. 702-730.

Karatzas, I./*Shreve,* S. S. (1991): Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2^{nd} ed., New York u.a.

— (1998): Methods of Mathematical Finance, New York u.a.

Kempf, A. (1999): Wertpapierliquidität und Wertpapierpreise, Wiesbaden.

Kilka, M. (1995): Realoptionen, Frankfurt am Main.

Knobloch, A. P. (1998): Zur kurzfristigen Finanzplanung des internationalen Konzerns, Heidelberg.

— (2003): Bewertungsansätze und Arbitragegrenzen auf unvollständigen (Kapital-)Märkten, in: *Knobloch,* A. P./*Kratz,* N., Neuere Finanzprodukte — Anwendung, Bewertung, Bilanzierung, Festschrift für Wolfgang *Eisele*, München, S. 157-190.

Kocherlakota, S./*Kocherlakota,* K. (1985): Multinormal Distributions, in: *Johnson,* N. L./*Kotz,* S. (eds.), Encyclopedia of Statistical Sciences, Vol. 5, New York u.a., S. 668-676.

Koo, H. K. (1998): Consumption and Portfolio Selection with Labor Income in a Continuous Time Approach, in: Mathematical Finance (8), S. 49-65.

Korn, R./*Korn,* E. (1999): Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung, Braunschweig/Wiesbaden.

Kruschwitz, L. (2002): Finanzierung und Investition, 3. Aufl., München/Wien.

Kruschwitz, L. (2003): Investitionsrechnung, 9. Aufl., München/Wien.

Kruschwitz, L./*Kruschwitz,* P. (1996): Entwurf einer neuen Theorie zur Bewertung von Lotterien, in: Die Betriebswirtschaft (56), S. 733-742.

Kürsten, W. (2002): „Unternehmensbewertung unter Unsicherheit", oder Theoriedefizit einer künstlichen Diskussion über Sicherheitsäquivalent- und Risikozuschlagsmethode, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung (54), S. 128-144.

Laux, H. (2003): Entscheidungstheorie, 5. Aufl., Berlin u.a.

Lucke, C. (2001): Investitionsprojekte mit mehreren Realoptionen, Sternenfels.

Lund, D./*Øksendal,* B. (1991; eds.): Stochastic Models and Option Values, Amsterdam u.a.

Madan, D. B./*Seneta,* E. (1990): The Variance Gamma (V.G.) Model for Share Market Returns, in: Journal of Business (63), S. 511-524.

Magill, M. J. P./*Quinzii,* M. (1996): Theory of Incomplete Markets, Cambridge/London (Nachdruck 1998).

Margrabe, W. (1978): The Value of an Option to Exchange One Asset for Another, in: The Journal of Finance (33), S. 177-186.

Markowitz, H. (1952): Portfolio Selection, in: The Journal of Finance (7), S. 77-91.

— (1991): Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, 2^{nd} ed., New York u.a. (Nachdruck 1997).

McDonald, R./*Siegel,* D. (1986): The Value of Waiting to Invest, in: The Quarterly Journal of Economics (101), S. 707-727.

McKean, H. P. (1965): A Free Boundary Problem for the Heat Equation Arising from a Problem of Mathematical Economics (Appendix zu *Samuelson* (1965)), in: Industrial Management Review (6), S. 32-39.

Meise, F. (1998): Realoptionen als Investitionskalkül, München/Wien.

Merton, R. C. (1969): Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case, in: The Review of Economics and Statistics (51), S. 247-257.

— (1971): Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model, in: Journal of Economic Theory (3), S. 373-413; Erratum ebd. (1973; 6), S. 213-214.

— (1973): An Intertemporal Capital Asset Pricing Model, in: Econometrica (3), S. 867-887.

Moxter, A. (1964): Präferenzstruktur und Aktivitätsfunktion des Unternehmers, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung (16), S. 6-35.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Munk, C. (2000): Optimal Consumption/Investment Policies with Undiversifiable Income Risk and Liquidity Constraints, in: Journal of Economic Dynamics and Control (24), S. 1315-1343.

Musiela, M./*Rutkowski,* M. (1998): Martingale Methods in Financial Modelling, 2. korrigierter Druck, Berlin u.a.

v. Neumann, J./*Morgenstern,* O. (1973): Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, 3. Aufl., aus dem Englischen übersetzt von M. *Leppig*, Würzburg.

Neus, W. (2001): Einführung in die Betriebswirtschaftslehre, 2. Aufl., Tübingen.

Niemann, R. (1999): Investitionsneutrale Steuersysteme unter Unsicherheit — Eine realoptionstheoretische Analyse, in: Zeitschrift für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften (119), S. 351-372.

— (2001): Neutrale Steuersysteme unter Unsicherheit, Bielefeld.

Niemann, R./*Sureth,* C. (2002): Taxation under Uncertainty — Problems of Dynamic Programming and Contingent Claims Analysis in Real Option Theory, CESifo, Working Paper No. 709, S. 1-27.

Nietert, B. (1996): Dynamische Portfolio-Selektion, Karlsruhe.

Øksendal, B. (2003): Stochastic Differential Equations, 6^{th} ed., Berlin u.a.

Paddock, J. L./*Siegel,* D. R./*Smith,* J. L. (1988): Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases, in: The Quarterly Journal of Economics (103), S. 479-508.

Panayi, S./*Trigeorgis,* L. (1998): Multi-stage Real Options: The Cases of Information Technology Infrastructure and International Bank Expansion, in: The Quarterly Review of Economics and Finance (38), Special Issue, S. 675-692.

Pawlina, G./*Kort,* P. M. (2002): The Strategic Value of Flexible Quality Choice: A Real Options Analysis, Working Paper, Universität Tilburg, S. 1-35.

Pham, H./*Rheinländer,* T./*Schweizer,* M. (1998): Mean-variance Hedging for Continuous Processes: New Proofs and Examples, in: Finance & Stochastics (2), S. 173-198.

Pindyck, R. S. (1988): Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm, in: The American Economic Review (78), S. 969-985.

Pratt, J. W. (1964): Risk Aversion in the Small and in the Large, in: Econometrica (32), S. 122-136.

Reiß, A. (1998): Bewertung von Optionen unter Transaktionskosten, Heidelberg.

Rockafellar, R. T. (1970): Convex Analysis, Princeton.

Ross, S. A./*Westerfield,* R. W./*Jaffe,* J. F. (2002): Corporate Finance, 6^{th} ed., Boston u.a.

Rudolf, M. (2000): Zinsstrukturmodelle, Heidelberg.

Rümmele, P. (1998): Zeitliche und sachliche Abgrenzung von Entscheidungsmodellen in der Steuerplanung, Berlin.

Samuelson, P. A. (1965): Rational Theory of Warrant Pricing, in: Industrial Management Review (6), S. 13-32.

Sandmann, K. (2001): Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte, 2. Aufl., Berlin u.a.

Schäl, M. (1994): On Quadratic Cost Criteria for Option Hedging, in: Mathematics of Operations Research (19), S. 121-131.

Schmidt, P./*Wissel,* H./*Stöckler,* M. (1996): The New Croatian Tax System, in: Bulletin for International Fiscal Documentation, S. 155-163.

Schneider, D. (1992): Investition, Finanzierung und Besteuerung, 7. Aufl., Wiesbaden.

Schwark, E. (2001): Kapitalanlagegesellschaften, Gesetz über (KAGG), in: *Gerke,* W./*Steiner,* M. (Hrsg.) Handwörterbuch des Bank- und Finanzwesens, 3. Aufl., Stuttgart.

Schwartz, E. S./*Moon,* M. (2000): Evaluating Research and Development Investments, in: *Brennan,* M. J./*Trigeorgis,* L. (eds.), Project Flexibility, Agency, and Competition, New York, S. 85-106.

Schwartz, E. S./*Trigeorgis,* L. (2001; eds.): Real Options and Investment under Uncertainty, Cambridge/London.

Schwartz, E. S./*Zozaya-Gorostiza,* C. (2000): Valuation of Information Technology Investments as Real Options, Working Paper, University of California at Los Angeles, S. 1-37.

Schweizer, M. (1988): Hedging of Options in a General Semimartingale Model, Dissertation Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, No. 8615.

— (1991): Option Hedging for Semimartingales, in: Stochastic Processes and their Applications (37), S. 339-363.

— (1992): Mean-variance Hedging for General Claims, in: The Annals of Applied Probability (2), S. 171-179.

— (1995): On the Minimal Martingale Measure and the Föllmer-Schweizer Decomposition, in: Stochastic Analysis and Applications (13), S. 573-599.

— (1996): Approximation Pricing and the Variance-optimal Martingale Measure, in: The Annals of Applied Probability (24), S. 206-236.

Schwinger, R. (1992): Einkommens- und konsumorientierte Steuersysteme, Heidelberg.

Seydel, R. (2000): Einführung in die numerische Berechnung von Finanz-Derivaten, Berlin u.a.

Sharpe, W. F. (1966): Mutual Fund Performance, in: Journal of Business (39), S. 119-138.

— (1970): Portfolio Theory and Capital Markets, New York u.a.

Sick, G. (1995): Real Options, in: *Jarrow,* R. A./*Maksimovic,* V./*Ziemba,* W. T. (eds.), Handbooks in Operations Research and Management Science — Finance, Vol. 9, Amsterdam u.a., S. 631-691.

Steiner, H./*Uhlir,* P. (2001): Wertpapieranalyse, 4. Aufl., Heidelberg.

Sureth, C. (1999): Der Einfluß von Steuern auf Investitionsentscheidungen bei Unsicherheit, Wiesbaden.

— (2002): Partially Irreversible Investment Decisions and Taxation under Uncertainty: A Real Option Approach, in: German Economic Review (3), S. 185-221.

Sureth, C./*Niemann,* R. (2002): Limits of Integrating Taxation in Real Option Theory, Extended Abstract to the Paper submitted to the 6^{th} Annual Real Options Conference, July 4-6, Paphos, Cyprus, S. 1-57.

Taylor, J. C. (1997): An Introduction to Measure and Probability, New York u.a.

Trigeorgis, L. (1996): Real Options, Cambridge/London. (5. Nachdruck 2000.)

Troßmann, E. (1990): Finanzplanung mit Netzwerken, Berlin.

— (1998): Investition, Stuttgart.

Varian, H. (1990): The Role of Risk Aversion in Financial Modeling, in: Journal of Institutional and Theoretical Economics (146), S. 223-225.

Wagner, F. W./*Dirrigl,* H. (1980): Die Steuerplanung der Unternehmung, Stuttgart/New York.

Wagner, F. W./*Schwinger,* R. (1991): Der Einfluss einer Cash-flow-Steuer auf Finanzierung und Rechnungslegung, in: *Rose,* M. (Hrsg.), Konsumorientierte Neuordnung des Steuersystems, Berlin u.a.

v. Weizsäcker, H./*Winkler,* G. (1990): Stochastic Integrals, Braunschweig.

Wenger, E. (1983): Gleichmäßigkeit der Besteuerung von Arbeits- und Vermögenseinkünften, in: Finanzarchiv (41), S. 207-252.

— (1986): Einkommensteuerliche Periodisierungsregeln, Unternehmenserhaltung und optimale Einkommensbesteuerung, Teil II: Einkommensteuerliche Periodisierungsregeln, neutrale und optimale Besteuerung, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft (56), S. 132-151.

Werner, T. (2000): Investitionen, Unsicherheit und Realoptionen, Wiesbaden.

Wilhelm, J. (1983): Finanztitelmärkte und Unternehmensfinanzierung, Berlin u.a.

Williams, D. (1991): Probability with Martingales, Cambridge u.a.

Wilmott, P./*Howison,* S./*Dewynne,* J. (1999): The Mathematics of Financial Derivatives, Cambridge (Nachdruck).

Xu, G.-L. (1990): A Duality Method for Optimal Consumption and Investment under Short-Selling Prohibition, Departments of Mathematics, Carnegie-Mellon University.

Zimmermann, H. (1998): State-Preference Theorie und Asset Pricing, Heidelberg.

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8

Stichwortverzeichnis

DOI https://doi.org/10.3790/978-3-428-51630-8