

# Beiträge zur Produktions- und Wachstumstheorie

Von

Heinz König

Helmut Reichardt

Carl Christian v. Weizsäcker

Herausgegeben von Prof. Dr. Wilhelm Krelle



VERLAG VON DUNCKER & HUMBLLOT  
BERLIN 1966

**Schriften des Vereins für Socialpolitik**  
**Gesellschaft für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften**  
**Neue Folge Band 44**

# SCHRIFTEN DES VEREINS FÜR SOCIALPOLITIK

Gesellschaft für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften

Neue Folge Band 44

---

## Beiträge zur Produktions- und Wachstumstheorie



VERLAG VON DUNCKER & HUMBLOT  
BERLIN 1966

# Beiträge zur Produktions- und Wachstumstheorie

Von

Heinz König

Helmut Reichardt

Carl Christian v. Weizsäcker

Herausgegeben von Prof. Dr. Wilhelm Krelle



VERLAG VON DUNCKER & HUMBLOT  
BERLIN 1966

**Alle Rechte vorbehalten**

© 1966 Duncker & Humblot, Berlin 41  
Gedruckt 1966 bei Berliner Buchdruckerei Union GmbH., Berlin 61  
Printed in Germany

## **Vorwort des Herausgebers**

Der vorliegende Band enthält einen Teil der Referate, die auf den Sitzungen des Theoretischen Ausschusses der Gesellschaft für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften (Verein für Socialpolitik) am 19./20. 9. 1964 in Kiel und am 21./23. 5. 1965 in Schönau bei Heidelberg vorgetragen wurden. Jedes Referat wurde ausführlich diskutiert; die Diskussionsbemerkungen sind aber nicht gesondert festgehalten, sondern, soweit sie von den Autoren akzeptiert wurden, gleich in die schriftliche Fassung der Referate eingearbeitet.

Leider konnten einige andere Referate nicht in diesen Band aufgenommen werden. Die Autoren wollen ihre Referate noch weiter ausbauen. Sie werden dann später, eventuell an anderer Stelle, veröffentlicht.

Dieser Band zusammen mit dem vorhergehenden („Theorien des einzelwirtschaftlichen und des gesamtwirtschaftlichen Wachstums“, Schriften des Vereins für Socialpolitik, Neue Folge, Band 34, Berlin 1965) zeigt den Schwerpunkt der Arbeiten des Theoretischen Ausschusses in den letzten beiden Jahren an: er lag auf der Produktions- und Wachstumstheorie. Dies ist ja auch das Gebiet innerhalb der Wirtschaftswissenschaften, das in den letzten Jahren international im Vordergrund des Interesses gestanden hat und am stärksten ausgebaut werden konnte. Die vorliegenden Arbeiten sind der Beitrag des Theoretischen Ausschusses hierzu.

Bonn, Herbst 1966

*W. Krelle*



## Inhaltsverzeichnis

|                                                                                                  | Seite |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Über die Existenz von Produktionsfunktionen                                                      |       |
| Von Prof. Dr. <i>Helmut Reichardt</i> , Tübingen .....                                           | 9     |
| Über einige Wachstumsprobleme in Zwei-Sektoren-Modellen bei Faktor-<br>substitutionalität        |       |
| Von Prof. Dr. <i>Heinz König</i> , Mannheim .....                                                | 27    |
| Zum Problem der Definition und Existenz optimaler Wachstumspfade<br>bei unendlichem Zeithorizont |       |
| Von Prof. Dr. <i>Carl Christian von Weizsäcker</i> , Heidelberg .....                            | 49    |





# Über die Existenz von Produktionsfunktionen<sup>1</sup>

Von *Helmut Reichardt*, Tübingen

## 1. Produktionsfunktion, Verbrauchsfunktion, Surrogatfunktion

Gegenstand dieser Betrachtung ist die allgemeine makroökonomische, hochaggregierte Produktionsfunktion, wie sie üblicherweise für die globale Beschreibung ökonomisch empirischer Tatbestände oder für die Formulierung einer uni-sektoralen Distributionstheorie oder Wachstumstheorie verwendet wird, und deren Einführung vor allem auf *Wicksteed*, *Clark* und *Ramsey* zurückgeht<sup>2</sup>. Die Fragestellung ist in dem Sinne metaökonomisch, als nicht nach einer Eignung einer Begriffsbildung für die Beschreibung der ökonomischen Realität gefragt wird, sondern nach dem formalen Inhalt und der Konsistenz dieser Begriffsbildung selbst. Eine gewisse Aktualisierung erfährt dieses Thema einmal durch den intensiven Gebrauch, der von Produktionsfunktionen solcher Art in zahlreichen Referaten und Diskussionen in den vergangenen zehn Jahren in diesem Kreise gemacht wurde, sowie durch einige bemerkenswerte Beiträge, die zu dieser engeren Fragestellung in jüngerer Zeit geleistet wurden.

In seinem großen Aufsatz über die volkswirtschaftliche Produktionsfunktion hat *Streißler* das in Frage stehende Konzept als *Faktorproduktionsfunktion* bezeichnet, um es von den *elementaren Produktionsfunktionen* zu unterscheiden<sup>3</sup>, welch letztere *technische Verbrauchsfunktionen* bedeuten<sup>4</sup>. Nun kann man sich als Grenzfall, zumindest im Modell,

---

<sup>1</sup> Dieser Aufsatz gibt im wesentlichen den Inhalt eines Referats wieder, das Verf. am 19. 9. 1964 in Kiel vor dem theoretischen Ausschuß des Vereins für Socialpolitik gehalten hat. Für die lebhafteste, ausführliche und anregende Diskussion, deren Beitrag hier im einzelnen nicht aufgewiesen werden kann, weiß ich Verfasser den Teilnehmern zu großem Dank verpflichtet.

<sup>2</sup> P. H. *Wicksteed* „A Coordination of the Laws of Distribution“ (1894). J. B. *Clark* „The Distribution of Wealth“ (1908). F. P. *Ramsey* „A Mathematical Theory of Saving“, *Economic Journal* (1928). Zu nennen sind hier natürlich auch Ch. W. *Cobb* und P. H. *Douglas* für den Bereich empirisch deskriptiver Anwendung.

<sup>3</sup> E. *Streißler* „Die volkswirtschaftliche Produktionsfunktion in dynamischer Betrachtung“, *Zeitschrift für Nationalökonomie XLX* (1959). Nach *Streißler* gehen diese beiden Begriffsbildungen auf *Sagoroff* zurück.

<sup>4</sup> Vgl. z. B. H. *Albach* „Produktionsplanung auf der Grundlage technischer Verbrauchsfunktionen“, *Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, H. 105* (1962).

eine derart primitive Gesellschaftswirtschaft vorstellen, bei der Faktorproduktionsfunktion und elementare Produktionsfunktion zusammenfallen. Im folgenden soll zur Vereinfachung der Ausdrucksweise die Faktorproduktionsfunktion als *Produktionsfunktion* schlechthin und die elementare Produktionsfunktion als *Verbrauchsfunktion* bezeichnet werden. Es lassen sich dann vier typische Verwendungsweisen der Produktionsfunktion in der ökonomischen Analyse unterscheiden, die man als *heuristisch*, als *approximativ*, als *aggregativ* und als *surrogativ* bezeichnen kann.

Den „klassischen“, heuristischen Gebrauch von der Produktionsfunktion macht man in der uni-sektoralen Distributionstheorie und Wachstumstheorie. Eine Art homogener Arbeit  $A$  und eine Art homogenen Kapitals (*capital jelly*)  $K$  sind die Argumente einer Produktionsfunktion

$$(1) \quad y = F(A, K)$$

in einem entsprechend primitiven Modell. Diese Konzeption ist meta-ökonomisch unproblematisch. Erst differenziertere Fragestellungen können hinsichtlich der Spezifizierung der Produktionsfunktion mathematische Probleme aufwerfen<sup>5</sup>.

Die lange Reihe der empirischen Arbeiten zur *Cobb-Douglas-Funktion* mag den approximativen Gebrauch der Produktionsfunktion illustrieren. Auch hier erhebt sich kein metaökonomisches Problem. Die oft unüberwindlichen Schwierigkeiten liegen in der Interpretation der empirischen Aggregate und Relationen<sup>6</sup>.

Interpretiert man hingegen im Rahmen einer Modellwirtschaft die Produktionsfunktion als direktes Aggregationsergebnis über Verbrauchsfunktionen, dann erhebt sich ein echtes metaökonomisches Problem. Kann in konsistenter Weise ein disaggregierter, aus vielen Einzelprozessen mit qualitativ verschiedenen Kapitalgütern zusammengesetzter komplexer Produktionsprozeß zu einer Produktionsfunktion zusammengefaßt werden? Über den derzeitigen und in einem gewissen Sinne abgeschlossenen Stand der Diskussion wird kurz im nächsten Abschnitt berichtet werden.

Schließlich wurde in jüngster Zeit das metaökonomische Problem einer Produktionsfunktion von *Samuelson*<sup>7</sup> noch anders formuliert. Ein bezüglich der Produktion disaggregiertes Wirtschaftsmodell wird

<sup>5</sup> Vgl. J. B. Ramsey (a. a. O.). S. Chakravarti "The Existence of Optimum Savings Program", *Econometrica* 30 (1962). C. Ch. von Weizsäcker „Wachstum, Zins und optimale Investitionsquote“ (1962).

<sup>6</sup> Insbesondere haben W. Krelle und G. Bombach diese Probleme diskutiert. Vgl. z. B. Schriften des Vereins für Socialpolitik N. F. 13 u. 15 (1957) und (1959).

<sup>7</sup> P. S. Samuelson "Parable and Realism in Capital Theory", *Review of Economic Studies*, XXIX (1962).

gewisse, z. B. verteilungsrelevante ökonomische Relationen bestimmen. Läßt sich dann als Surrogat für dieses disaggregierte Produktionsmodell eine Produktionsfunktion (*Surrogatfunktion*) bestimmen, die zu den gleichen ökonomischen Relationen führt? Einige Betrachtungen zu diesem Konzept bilden das Hauptanliegen dieses Aufsatzes.

## 2. Direkte Aggregation

In radikaler Weise wurde das formale Problem der Aggregation von Verbrauchsfunktionen zu einer Produktionsfunktion erstmalig von *Leontief* gestellt<sup>8</sup>. Man fragt im einfachsten Fall nach den Bedingungen, um die Funktion

$$Y = f(X_{11}, \dots, X_{1n_1}, \dots, X_{m1}, \dots, X_{mn_m}),$$

in der Form

$$Y = F(X_1, \dots, X_m)$$

mit

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1(X_{11}, \dots, X_{1n_1}) \\ &\dots\dots\dots \\ X_m &= X_m(X_{m1}, \dots, X_{mn_m}) \end{aligned}$$

darstellen zu können. Notwendig und hinreichend dafür ist, daß die Verhältnisse der Grenzerträge bezüglich der inputs einer Gruppe von den inputs anderer Gruppen unabhängig sind, in Formeln also

$$(f_{x_{rj}} / f_{x_{rk}})_{x_{qi}} = 0 \quad r \neq q \quad )$$

Dieses von *Leontief* so benannte Theorem der (schwachen) *funktionalen Separabilität* war der Ausgangspunkt einer inzwischen zu einem gewissen Abschluß gekommenen Analyse formaler Aggregationsprobleme, die in einem jüngst erschienenen Buch von *Green* eine systematische Darstellung gefunden hat<sup>10</sup>.

Um die dortigen Ergebnisse auf das hier anstehende Aggregationsproblem anzuwenden, werde als typischer Fall ein disaggregiertes Produktionsmodell betrachtet, das aus einer Reihe von individuellen Verbrauchsfunktionen besteht,

$$Y_s = f_s(A_s, K_{s1}, \dots, K_{sn}), \quad s = 1, \dots, n.$$

<sup>8</sup> W. W. *Leontief* „A note on the interrelation of subjects of independent variables of a continuous function with continuous first derivatives“, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 53 (1947).

<sup>9</sup> Partielle Ableitungen werden in diesem Aufsatz durch Indizierung mit derjenigen Variablen bezeichnet, nach der abgeleitet wurde.

<sup>10</sup> H. A. T. *Green* „Aggregation in Economic Analysis“ (1964).

$A_s$  bedeutet den Arbeitsinput bei der „Firma“ ( $s$ ) und  $K_{si}$  das in der gleichen „Firma“ inputierte Kapital von der Qualität ( $i$ ), beides gemessen in natürlichen Einheiten. Eine Produktionsfunktion ist dann das Ergebnis eines zweistufigen Aggregationsprozesses. Zunächst sind die individuellen Verbrauchsfunktionen  $f_s$  zu einer globalen Verbrauchsfunktion

$$f = f(A, K_1, \dots, K_n)$$

zu aggregieren, mit

$$A = A_1 + \dots + A_m, K_i = K_{1i} + \dots + K_{mi}.$$

Sodann ist diese globale Verbrauchsfunktion zu einer Produktionsfunktion (1) zu aggregieren mit

$$K = K(K_1, \dots, K_n).$$

Spezialisiert man die bei *Green* angegebenen Ergebnisse auf diesen einfachsten aber typischen Fall, dann lauten die Bedingungen für die Möglichkeit einer solchen Aggregation:

1. Alle Funktionen  $f_s$  sind Funktionen einer einzigen Funktion  $h$ ,  
 $f_s = f_s(h(A_s, K_{s1}, \dots, K_{sn})).$
2.  $h$  ist homogen vom Grade Eins in seinen inputs.
3.  $K$  ist homogen vom Grade Eins in den  $K_1 \dots K_n$ .
4.  $F$  ist homogen vom Grade Eins in  $A$  und  $K$ .
5. Alle Firmen benutzen ihre inputs in gleichen Proportionen.

Dieses Ergebnis besagt, daß die direkte Aggregation der individuellen Verbrauchsfunktionen nur in dem trivialen Fall proportionaler, linearer Funktionen möglich ist oder negativ ausgedrückt, daß eine allgemeine, konsistente, direkte Aggregation individueller Verbrauchsfunktionen formal nicht möglich ist.

### 3. Faktorpreiskurve

Mit dem Konzept der Surrogatfunktion wird versucht, die ökonomisch relevante Substanz eines disaggregierten Produktionsprozesses in einer Produktionsfunktion auszudrücken. Angenommen, im Modell einer Konkurrenzwirtschaft, in der nur Lohn Einkommen und Zinseinkommen existieren und in der die Arbeit der einzige originäre (und als homogen angenommener) Produktionsfaktor ist, ließe sich der Wert des Sozialproduktes (das Ergebnis eines in viele Verbrauchsfunktionen mit verschiedenen Kapitalgütern disaggregierten Produktionsprozesses

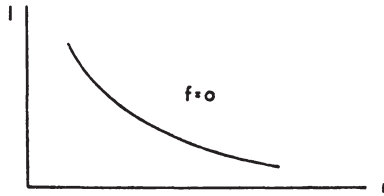
$$(4) \quad \tau = F_K$$

• • • • •

$$p = p(l, \tau, m) \text{ .}$$

$$(5) \quad f(l, r) = 0 \text{ .}$$

<sup>11</sup> Die Betrachtungen in dieser Arbeit bleiben auf die statische Analyse und damit auf Modelle mit existierendem Gleichgewicht beschränkt. Über den Stand der Diskussion bezüglich Existenz und Eindeutigkeit von Gleichgewichtszuständen disaggregierter Modelle unterrichtet vorzüglich R. Kuenne "The Theory of General Economic Equilibrium" (1963).



Figur 1

Schreibt man nämlich (5) in der Form

$$1 = p(r, l)$$

und bedenkt, daß  $r$  und  $l$  Parameter darstellen, die beide positiv mit dem Güterpreis korreliert sind, dann können wegen

$$p_l dl + p_r dr = 0$$

und

$$p_l > 0, p_r > 0$$

offenbar  $dr$  und  $dl$  nicht das gleiche Vorzeichen haben. Daraus folgt aber unsere Behauptung. In den nächst folgenden Abschnitten soll zunächst die Faktorpreiskurve an Beispielen aus der Literatur illustriert werden.

#### 4. Von Thüzens Modell

Ihre erste bedeutende Rolle spielte die Faktorpreiskurve bei der Ableitung des berühmten *von Thünen*schen Distributionsgesetzes. *Von Thünen* selbst schlägt allerdings, nachdem er die Faktorpreiskurve entwickelt hat<sup>12</sup>, aus Gründen einer breiteren, anschaulichen Argumentation einen formal nicht notwendigen Umweg ein<sup>13</sup>. An der Grenze des isolierten Staates, wo nur Lohneinkommen und Zinseinkommen, aber keine Bodenrenten mehr existieren, sei

$a$  Subsistenzfonds für einen Arbeiter, gemessen in Konsumguteinheiten,  
 $y$  der über  $a$  hinausgehende Teil des Lohnes, gemessen in Konsumguteinheiten,

$p$  das Nettoprodukt pro Arbeiter, gemessen in Konsumguteinheiten,

<sup>12</sup> J. H. von Thünen „Der isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft und Nationalökonomie“, Zweiter Teil (1850) § 14.

<sup>13</sup> Ebd. § 15.

$q$  das pro Arbeiter erforderliche Kapital, gemessen in Arbeitseinheiten,  $q(a+y)$  das erforderliche Kapital, gemessen in Konsumguteinheiten.

Angenommen sind konstante Skalenerträge. Dann beträgt der Zinssatz  $r$  offenbar

$$r = (p - (axy)) / q(a + y)$$

$a$ ,  $q$ ,  $p$  sind in diesem Modell technologische oder biologische Daten. Dann stellt die obige Relation eine Faktorpreiskurve dar, die wegen

$$dr/dl = -pq/(ql)^2 < 0$$

den typisch gegenläufigen Verlauf ihrer Argumente aufweist. Aufgrund der folgenden *von Thünen*schen Argumentation kommt man über die Faktorpreiskurve zu dessen *natürlichen Arbeitslohn*. Spart der Arbeiter (und er kann nur  $y$  sparen), dann erhält er die Rente  $R$ ,

$$R = yr = (p - (a + y))y/q(a + y) .$$

Als natürlich im Sinne *von Thünen* wird nun der Lohn angesehen, der diese Rente maximiert. Aus dem so bedingten Ansatz

$$dR/dy = 0$$

folgt dann nach einigen leichten Umformungen die berühmte Formel

$$(a + y) = \sqrt{ap} .$$

## 5. Von Neumanns Modell

Auch in disaggregierten Konkurrenzmodellen mit konstanter Wachstumsrate vom *von Neumann*schen Typ läßt sich eine Faktorpreiskurve ableiten. Da es hier nur um einen grundsätzlichen Nachweis geht, wird auf das klassische *von Neumann*-Modell abgestellt. Dadurch werden die — für die Existenz der Faktorpreiskurve nicht grundsätzlichen — Komplikationen vermieden, die in dem realistischeren Modell von *Kemeny*, *Morgenstern* und *Thompson* entstehen können, wenn die Gesamtwirtschaft in produktionstechnisch unverbundene Teile zerfällt.

Sei  $A$  die Matrix der inputs,  $B$  die Matrix der outputs mit

$$A \geq 0, B \geq 0, A + B > 0,$$

dann existiert stets ein Expansionsgleichgewicht<sup>14</sup> mit  $(x, y, a, b)$ , wobei  $x$  den Intensitätsvektor,  $y$  den Preisvektor,  $a$  die Expansionsrate und

<sup>14</sup> J. von Neumann „Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes“. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, H. 8 (1937).



$b$  den Zinssatz bedeuten. Dabei sind  $a$  und  $b$  durch  $A$  und  $B$  eindeutig bestimmt und es gilt

$$a = b = r .$$

Kemeny, Morgenstern und Thompson<sup>15</sup> haben darüberhinaus gezeigt, daß für die Lösung  $(x', y', r')$  des modifizierten Modells  $(A', B)$  mit

$$A' \geq A, A' - A > 0$$

$r > r'$  gilt<sup>16</sup>.

Bei von Neumann geht die Lohnkomponente, dort als eine reine Subsistenzgröße gedacht, im System der technischen Koeffizienten der Matrix  $A$  unter. Um einen Lohnsatz in das von Neumannsche Modell zu installieren, denke man sich den Einheitswarenkorb der Subsistenzmittel durch den Zeilenvektor

$$k = (k_1, \dots, k_n)$$

dargestellt, den Arbeitsinput, gemessen in Arbeitseinheiten je Einheitsprozeß, durch den Spaltenvektor

$$c' = (c_1, \dots, c_m)' .$$

$l$  bezeichnet wieder den Reallohnsatz. Dann beschreibt die Matrix  $l c' k$  den Lohnanteil des Systems bei einem herrschenden Reallohnsatz  $l$ . Das so modifizierte von Neumann-Modell hat die Form

$$(A + l c' k, B) .$$

Nach den obigen Ausführungen folgt aus  $l^* > l$  wegen

$$(A + l^* c' k) \geq (A + l c' k)$$

und

$$(A + l^* c' k) - (A + l c' k) \geq 0$$

für die jeweils zugeordneten Gleichgewichtszinssätze

$$r^* < r .$$

Damit ist der Nachweis einer typischen Faktorpreiskurve erbracht.

<sup>15</sup> T. G. Kemenny, O. Morgenstern, G. L. Thompson „A Generalisation of the von-Neumann-Model of an Expanding Economy“ *Econometrica*, 24, (1956).

<sup>16</sup> R. Henn „Expansionsmodelle vom von Neumannschen Typ“ *Schriften des Vereins für Socialpolitik*, N. F. 27 (1962).

Ders.: „Expansionsgleichgewichte bei vollständiger Konkurrenz“, *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft*, 118 (1962).

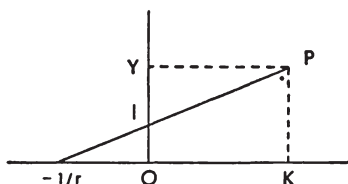
## 6. Robinsons Modell

J. Robinson<sup>17</sup> hat ein Produktionsmodell entwickelt, das als Besonderheit eine positive Korrelation zwischen Kapitalwert und Zins aufweist. Die Grundvorstellung läßt sich skizzieren, wenn man sich vorstellt, daß ein bestimmtes Kapitalgut über einen Zeitraum von  $n$  Perioden sukzessive durch die Arbeitseinsätze  $a_1, a_2, \dots, a_n$  aufgebaut wird. Dann wird für seinen Neuwert in Arbeitseinheiten die Formel

$$a_1(1+r)^n + \dots + a_n(1+r)$$

angenommen. Will man statt dessen den Kapitalwert in Reallohneinheiten messen, so hat man diesen Ausdruck noch mit der Reallohneinheit zu multiplizieren. In beiden Fällen steigt der Wert des Kapitals mit wachsendem Zins. Diesen Grundgedanken haben *Champernowne* und *Kahn*<sup>18</sup> verfeinert und verallgemeinert und auf dieses Konzept stützt sich *Robinson* bei ihren Entwicklungen. Hier wird jedoch nicht das *Robinsonsche* Originalmodell dargestellt, das diskrete Kapitalqualitäten aufweist, sondern eine unseren Zwecken angepaßte kontinuierliche Modifikation.

In einem Koordinatensystem sei auf der Abszisse die kontinuierliche Folge der Kapitalgüter (gemessen in Arbeitseinheiten) aufgetragen und auf der Ordinate das jeweils korrespondierende Netto-Sozialprodukt in Form eines homogenen Konsumgutes und in dessen natürlichen Einheiten gemessen. Alle Prozesse, als homogen und mit konstanten Skalenerträgen angenommen, sind auf eine Arbeitseinheit normiert. Es herrsche der Zinssatz  $r$ . Wird ein bestimmter Prozeß — dargestellt durch eine bestimmte Kapitalintensität  $K$  — aktiviert, so stellt sich ein bestimmtes Nettoprodukt  $Y$  ein. Sei  $l$  der Reallohn, dann ergibt sich Figur 2, denn offenbar ist  $l \cdot K$  der Kapitalwert in Konsumein-



Figur 2

<sup>17</sup> J. Robinson "The Production Function" *The Economic Journal* LXV (1955).

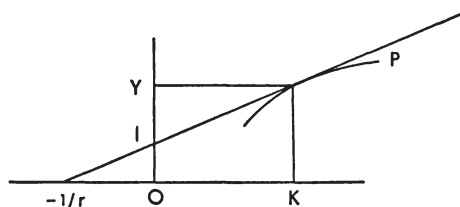
*Dies.*: "The Accumulation of Capital" (1956).

<sup>18</sup> D. G. Champernowne, R. F. Kahn „The Production Function and the Theory of Capital. A Comment“, *Review of Economic Studies*, XXI, (1953/54).

heiten,  $Y - l$  der Profit in Konsumeinheiten, und demnach

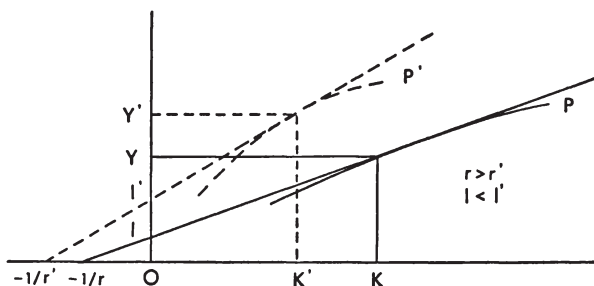
$$r = (Y - l) / K \cdot l ,$$

und das stimmt mit den Proportionen in Figur 2 überein. Nun denke man sich die gesamte Produktionsfunktion bei einem festen Zinssatz  $r$  aufgetragen (Figur 3).



Figur 3

Offenbar bestimmt die Tangente an  $P$  durch den Punkt  $(-1/r, 0)$  die Gleichgewichtsproduktion, denn bei einem vorgegebenen Zinssatz ermöglicht der so bestimmte Prozeß den größten Reallohn. Eine Veränderung des Zinssatzes hat eine Verzerrung des Maßstabs auf der Abszisse und eine korrespondierende Deformation der  $P$ -Kurve zur Folge und also auch einen neuen Gleichgewichts-Reallohn. Damit ist aber bereits eine Faktorpreiskurve gegeben und ein Blick auf Figur 4 zeigt, daß diese Faktorpreiskurve die notwendige Gegenläufigkeit von  $l$  und  $r$  aufweist.



Figur 4

## 7. Sraffas Modell

*Sraffa*<sup>19</sup> hat in jüngster Zeit die Katallaktik der Produktionssysteme ausführlich dargestellt, die sich aus limitationalen Verbrauchsfunktionen mit konstanten Skalenerträgen zusammensetzen. Hier sollen einige seiner Entwicklungen skizziert werden, die sich auf die Faktorpreiskurve beziehen. Ausgangspunkt bilden die Verbrauchsfunktionen. Sei  $K_{ik}$  die Menge an Gut ( $i$ ) die zur Produktion der Menge  $K_k$  an Gut ( $k$ ) erforderlich ist und sei  $A_k$  die hierzu notwendige Arbeitsmenge, dann hat man die Verbrauchsfunktionen

$$K_1 = V_1(K_{11}, \dots, K_{n1}, A_1)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$K_n = V_n(K_{1n}, \dots, K_{nn}, A_n)$$

Sei  $l$  der Reallohn und  $r$  die Zinsrate, dann lauten die Tauschrelationen

$$(K_{11} p_1 + \dots + K_{n1} p_n) (1 + r) + A_1 l = K_1 p_1$$

$$(6) \quad \dots\dots\dots$$

$$(K_{1n} p_1 + \dots + K_{nn} p_n) (1 + r) + A_n l = K_n p_n .$$

Für die Arbeit, in Bruchteilen des gesamten Arbeitseinsatzes gemessen, ergibt sich die Normierung

$$(7) \quad A_1 + \dots + A_n = 1 .$$

Als numéraire dient das Nettoprodukt, d. h.

$$(8) \quad (K_1 - (K_{11} + \dots + K_{1n})) p_1 + \dots + (K_n - (K_{n1} + \dots + K_{nn})) p_n = 1 .$$

Aus den Gleichungen (6) und (8) ergibt sich eine Faktorpreiskurve. Diese  $n + 1$  Gleichungen enthalten die  $n + 2$  Variablen, nämlich  $p_1, \dots, p_n, r, l$ . Wird eine davon vorgegeben, z. B.  $l$ , dann sind alle anderen bestimmt, also auch  $r$ . Konsolidiert man die Gleichungen (6) unter Berücksichtigung der Normierungsgleichungen (7) und (8) und bezeichnet man den Wert der inputierten produzierten Produktionsmittel mit  $C$ ,

$$C = K_{11} p_1 + \dots + K_{nn} p_n ,$$

dann folgt die Gleichung

$$(9) \quad C \cdot r + l = 1$$

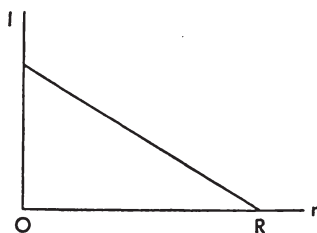
---

<sup>19</sup> P. *Sraffa* „Production of Commodities by Means of Commodities — Prelude to a Critique of Economic Theory“ (1960).

für die Distribution des Nettoproduktes. Sie stellt zugleich eine Faktorpreiskurve dar. Diese ist aber im allgemeinen keine Gerade, denn der Wertfaktor  $C$  enthält die Güterpreise, die ihrerseits von dem vorgegebenen Distributionsparameter, z. B. von  $r$ , abhängen. Die maximale Zinsrate ergibt sich offenbar bei einem Lohnsatz  $l = 0$ . Sie werde mit  $R$  bezeichnet. Aus diesem System hat *Sraffa* ein interessantes Standardproduktionssystem abgeleitet, in dem die Faktorpreiskurve eine besonders einfache Gestalt annimmt. Eine Veränderung der Distributionsparameter wird im allgemeinen eine Veränderung der Güterpreise zur Folge haben. Fällt z. B. der Lohnsatz, so würden bei konstanten Preisen die relativ lohnintensiven Prozesse einen Gewinn machen und die relativ kapitalintensiven Prozesse einen Verlust erleiden. Diese Abweichungen vom Produktionsgleichgewicht sind katalaktisch, also durch Preisveränderungen auszugleichen. Wenn man nun das ursprüngliche Produktionsmodell so modifiziert, daß Bruttoproduct, Nettoproduct und Kapitalgut-input die gleichen physischen Proportionen aufweisen, dann ist der Preis dieses zusammengesetzten Gutes gegenüber Veränderungen der Verteilungsparameter invariant. Die Existenz dieses *Standardgutes* und dieses *Standardsystems* hat *Sraffa* in seinem Buche nachgewiesen. Es zeigt sich ferner, daß die kritische Proportion von Arbeits-input zu Kapital-input, bei der das Produkt gegenüber einer Veränderung in den Verteilungsparametern invariant ist und die das Standardsystem realisiert in einem geeigneten Maßstab gemessen gleich  $R$  ist.

Im Standardsystem ist also  $C$  in (9) bei Veränderungen von  $r$  und  $l$  konstant und gleich  $1/R$  und die Faktorpreiskurve (Fig. 5) wird zu einer Geraden mit der Gleichung

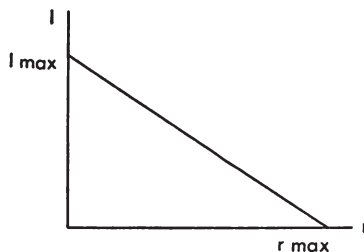
$$r = R(1 - l) .$$



Figur 5

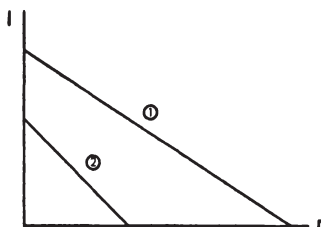
### 8. Samuelsons Modell

Um die Beziehung zwischen einem disaggregierten — oder in dessen Ausdrucksweise *quasi-realistischen* — Produktionsmodell und der Faktorpreiskurve extrem durchsichtig zu machen, hat *Samuelson*<sup>7</sup> die folgende Konstruktion angegeben. Es gibt so viele Prozesse wie Kapitalgüter. Jeder Prozeß inputiert den Dienst eines Kapitalgutes und Arbeit, ist limitational, homogen, hat konstante Skalenerträge und kann alternativ ein für alle Prozesse gleiches, homogenes Konsumgut erzeugen oder ein Kapitalgut von der Qualität des inputierten. Betrachtet wird der Nettoprozeß, d. h. es wird angenommen, daß während der Wirtschaftsperiode zunächst der Kapitalverschleiß reproduziert wird und die Produktionsalternative nur auf die verbleibende Nettokapazität bezogen wird. Seine Grafik ist, wenn man auf der Abszisse die alternative Kapitalproduktion aufträgt, ausgedrückt in Bruchteilen des beschäftigten Kapitals, und auf der Ordinate die jeweils komplementäre Konsumgutproduktion, eine Gerade, die unter einer zusätzlichen ökonomischen Annahme unmittelbar als Faktorpreiskurve erscheint. Fügt man nämlich dieses Produktionssystem in ein Zwei-Klassen-Modell ein, in dem die Kapitalisten nur akkumulieren und die Arbeiter nur konsumieren, dann ergibt die ursprünglich rein technologisch bedeutsame Transformationskurve zugleich die Faktorpreiskurve.



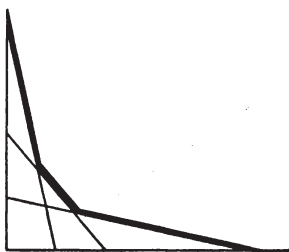
Figur 6

Ihre Linearität folgt aus den technologischen Voraussetzungen. Sie ist negativ geneigt, ihre Achsenabschnitte bedeuten den größtmöglichen Reallohn bzw. den größtmöglichen Zinssatz. Da jetzt der Zinssatz identisch ist mit der Wachstumsrate des Kapitalstocks, so gibt diese Linie zugleich den größtmöglichen Reallohn bei einer vorgegebenen Wachstumsrate an oder die größtmögliche Wachstumsrate bei einem vorgegebenen Reallohn. Haben zwei solche Faktorpreiskurven eine relative Lage wie in Fig. 7, dann wird der der inneren Linie korres-



Figur 7

pondierende Prozeß durch den anderen dominiert. Liegen viele Prozesse vor, so wird die Faktorpreiskurve durch die Enveloppe der elementaren Prozeßlinien beschrieben.



Figur 8

Sie leistet zugleich die optimale Prozeßauswahl, wenn einer der Verteilungsparameter  $r$  oder  $l$  gegeben ist, ähnlich, wie es auch das Robinsonsche Modell tut. Wird jedoch die Zwei-Klassen-Hypothese aufgehoben, so versagt diese Interpretation als Faktorpreiskurve. Es muß also immer mit der Einkommensverteilung auch zugleich die Einkommensverwendung festgelegt sein.

### 9. Solows Modell

*Solow*<sup>20</sup> hat ebenfalls ein Modell mit potentiell vielen heterogenen Kapitalgütern angegeben, in dem sich auf durchsichtige Weise eine Faktorpreiskurve ergibt und von dem eine vereinfachte statische Version hier angegeben werden soll. Sei  $a$  ein Maschinentyp, der  $a$  Arbeitskräfte zu seiner Betreibung benötigt und  $a^{-g}$  Arbeitskräfte zu seiner Produktion.  $g$  ist eine positive technologische Konstante des Systems. Das Produkt dieser Maschine sei ein einheitliches homogenes Konsumgut, die Kapazität einer Maschine sei Eins pro Produktionsperiode und ihre Lebensdauer unbegrenzt. Sei  $l$  der Reallohn und  $r$  der Zins, dann ist der Periodengewinn

$$G = 1 - al - a^{-g}lr.$$

Bei vollständiger Konkurrenz ist  $G = 0$ , d. h. es gilt

$$(10) \quad 1 - al - a^{-g}lr = 0.$$

Der Parameter zur Gewinnmaximierung seitens der Unternehmer ist in diesem Konkurrenzmodell der Maschinentyp  $a$ . Es gilt also ferner

$$(11) \quad dG/da = 0$$

oder

$$-l + ga^{-g}lr = 0.$$

Hier ergibt sich die Faktorpreiskurve durch Eliminierung von  $a$  aus (10) und (11). Setzt man

$$(g/g + 1)g^{+1} \cdot 1/g = k$$

so lautet die Formel für die Faktorpreiskurve

$$lg^{+1} \cdot r - k = 0,$$

aus der man den typischen Verlauf der Verteilungsparameter  $l$  und  $r$  unmittelbar ablesen kann. Sowohl das im vorigen Abschnitt behandelte *Samuelson*-Modell als auch das *Solow*-Modell sind zwar über einer Menge potentieller Prozesse mit heterogenen Kapitalgütern errichtet, es findet aber keine Aggregation über diese Kapitalgütermenge statt, sondern eine Selektion aus ihr.

---

<sup>20</sup> R. M. Solow "Substitution and fixed Proportions in the Theory of Capital", Review of Economic Studies, XXIX (1962).

Ders.: "Heterogeneous Capital and Smooth Production Functions", Econometrica, 31, (1963).



### 10. Produktionsfunktion und Faktorpreiskurve als duale Gebilde

In diesem Abschnitt bildet die homogene, lineare Produktionsfunktion (1) den Ausgangspunkt der Betrachtung, ohne Beachtung ihrer Provenienz. Es mag sich bei  $F$  um die mit ihr identische Verbrauchsfunktion eines primitiven „Zwei-Faktor-Ein-Produkt“-Modelles handeln oder um das geglückte Ergebnis einer direkten Aggregation oder um die erfolgreich bestimmte Surrogatfunktion in einem disaggregierten Modell. Dann erweisen sich Produktionsfunktion und Faktorpreiskurve als duale Gebilde. Aus der Linearhomogenität der Produktionsfunktion folgen leicht die Relationen

$$(12) \quad F_A/F_K = l/r$$

$$(13) \quad f_l/f_r = A/K.$$

Geometrisch besagen diese Gleichungen, daß die Neigung der Isoquanten  $F = 1$  gleich dem negativen Wert der Neigung des korrespondierenden Fahrstrahls zur Faktorpreiskurve ist und die Neigung der Faktorpreiskurve gleich dem negativen Wert der Neigung des korrespondierenden Fahrstrahls zur Isoquanten.

Ist die Isoquante  $F = 1$  gegeben, dann bestimmt sich zu einem angegebenen  $A$  das zugeordnete  $K$  und daraus die zugeordneten  $F_A$  und  $F_K$  und also nach (3) und (4) die zugeordneten  $l$  und  $r$ , womit die Konstruierbarkeit von  $f$  aus  $F = 1$  gezeigt ist. Statt von  $A$  hätte man ebenso auch von  $K$  ausgehen können. Ist die Faktorpreiskurve  $f = 0$  gegeben, dann bestimmt sie zu einem vorgegebenen  $l$  das zugehörige  $r$  und aus (13) und der Formel

$$1 = A \cdot l + K \cdot r$$

lassen sich die zugehörigen  $A$  und  $K$  bestimmen, womit die Konstruierbarkeit von  $F$  aus  $f$  gezeigt ist. Statt von  $l$  hätte man ebenso auch von  $r$  ausgehen können. Damit ist aber die Äquivalenz von  $F$  und  $f$  erwiesen.

*Samuelson*<sup>7</sup>, der als erster eine Produktionsfunktion aus einer Faktorpreiskurve konstruiert hat, zeigte zugleich, daß das Verhältnis der Einkommensquoten gleich der Elastizität der Faktorpreiskurve ist. *Von Weizsäcker*<sup>21</sup> hat den beiden Alternativen — einmal von  $A$  und einmal von  $K$  ausgehend aus der Produktionsfunktion die Faktorpreiskurve zu konstruieren — interessante Interpretationen gegeben.

---

<sup>21</sup> C. Ch. von Weizsäcker „Bemerkungen zu einem ‚Symposium über Wachstumstheorie und Produktionsfunktionen‘,“ *Kyklos*, XVI (1963).

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde die Existenz der Produktionsfunktion vorausgesetzt. Im Falle des Zweifaktormodells, wo Produktionsfunktion und Verbrauchsfunktion identisch sind, ist diese unproblematisch. Hier ist sie zugleich identisch mit der Surrogatfunktion, wenn man mit dieser Bezeichnung genauer die Konstruktion aus der Faktorpreiskurve meint. Solange man sich in dem in Abschnitt 3 näher umschriebenen Modellrahmen bewegt, ist aber auch für ein quasi-realistisches Modell die Existenz einer Faktorpreiskurve gesichert. Das in diesem Falle zu  $f$  duale Gebilde wäre dann eine Surrogatfunktion, wenn  $A$  mit dem originalen Arbeitsinput und  $K$  mit dem originalen Kapitalinput in einem systematischen ökonomischen Zusammenhang stünde, d. h.  $l.A/r.K$  müßte zumindest das originale Verhältnis der Einkommensquoten beschreiben. Nichts bei der rein formalen Gewinnung von  $F$  aus  $f$  bietet jedoch einen Anhalt zu solch einer Hoffnung. Wie Samuelson<sup>7</sup> andeutet, scheint das hier in Abschnitt 8 dargestellte und in seiner Interpretation sehr problematische Modell einen solchen Zusammenhang zu versprechen. Das wäre außer dem trivialen Fall der einheitlichen Zwei-Faktor-Ein-Produkt-Produktion der einzige bisher bekannte Fall einer nicht-trivialen Existenz der Surrogatfunktion. Die Nichtexistenz der Surrogatfunktion mindert aber zugleich auch den Aussagegehalt der Faktorpreisfunktion, denn nur im Falle der Existenz der Surrogatfunktion beschreibt die Elastizität von  $f$  die quotale Verteilung des Nettoproduktes. Die oben angegebene Konstruktion einer *Quasi-Surrogatfunktion* aus  $f$  besagt nur, daß es zu jeder quasi-realistischen Modellwirtschaft eine andere primitive Modellwirtschaft gibt, die die gleiche Zins-Reallohn-Relation aufweist. Diese Aussage ist ungefähr genau so interessant wie die, daß man zu jedem Menschen einen Wachsklumpen konstruieren kann, der genauso schwer ist. Die bescheidenen Möglichkeiten der direkten Aggregation, wie sie oben in Abschnitt 2 skizziert wurden, lassen ihrerseits keine großen Hoffnungen bezüglich ökonomisch sinnvoller Surrogatfunktionen aufkommen. Man wird nach diesen Ergebnissen wohl noch entschiedener die Bedeutung der Produktionsfunktion auf den Bereich der Approximation und der Heuristik beschränken. Bedenkt man den ungeheuren Informationsverlust, der beim Übergang von einem quasi-realistischen System zu einer Produktionsfunktion eintreten muß, so scheint diese Einschränkung durchaus plausibel.



## Über einige Wachstumsprobleme in Zwei-Sektoren-Modellen bei Faktorsubstitutionalität\*

Von *Heinz König*, Mannheim

Den in den vergangenen Jahren entwickelten postkeynesianischen und neoklassischen Wachstumsmodellen ist gemeinsam, daß Konsum- und Kapitalgüterindustrie mit derselben Rate wachsen, wenn auch den das Gleichgewichtswachstum determinierenden Faktoren wie Spar-(Investitions)quote, technischem Fortschritt und Bevölkerungsentwicklung je nach dem Modellansatz unterschiedliche Bedeutung zukommt<sup>1</sup>. Aufbauend auf der Theorie der Produktionsumwege von *Böhm-Bawerk* hat jedoch bereits *W. G. Hoffmann*<sup>2</sup> gezeigt, daß der Industrialisierungsprozeß aller Länder durch typische Strukturwandlungen gekennzeichnet ist: bei langfristig ungefähr konstanter Sparquote wächst die Produktion der Kapitalgüterindustrie stärker als die Produktion der Konsumgüterindustrie, allerdings mit Phasenverschiebungen und unterschiedlichem Tempo in den einzelnen Ländern. Im folgenden wird versucht, die Voraussetzungen und Implikationen dieses von Hoffmann empirisch festgestellten Prozesses mit Hilfe eines einfachen Zwei-Sektoren-Modells darzustellen, in dem Faktorsubstitutionalität zugelassen ist. Daran anschließend wird untersucht, wie sich eine Zeitpräferenzfunktion auf den langfristigen Gleichgewichtswert der optimalen Sparquote und den entsprechenden Anpassungsprozeß auswirkt.

Unter der Voraussetzung neoklassischer Hypothesen wird u. a. gezeigt, daß bei neutralem technischen Fortschritt

für eine gegebene Nettoinvestitionsquote gleichgewichtiges Wachstum trotz unterschiedlicher Wachstumsraten der Konsum- und Kapitalgüterproduktion möglich ist,

eine gleiche Lohnentwicklung in der Gesamtwirtschaft bei unterschiedlichen Wachstumsraten der Konsum- und Kapitalgüterproduk-

---

\* Überarbeitete Fassung eines im September 1964 gehaltenen Vortrages vor dem Theoretischen Ausschuß des Vereins für Socialpolitik.

<sup>1</sup> Zum Unterschied zwischen neoklassischen und postkeynesianischen Modellen vgl. z. B. *G. Bombach*, Optimales Wachstum und Gleichgewichtswachstum, Schriften des Vereins für Socialpolitik N.F. 27 (1962), S. 47 ff. — *W. Krelle*, Investition und Wachstum, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Band 176 (1964), S. 1 ff.

<sup>2</sup> *W. G. Hoffmann*, Stadien und Typen der Industrialisierung, Jena 1931. — derselbe, *The Growth of Industrial Economies*, Manchester 1958.

tion die laufende Änderung des realen Austauschverhältnisses zwischen den Sektoren zur Folge hat,

die optimale, den Konsum maximierende Wachstumsrate dann gegeben ist, wenn bei autonomem technischen Fortschritt die marginale Sparneigung gleich dem Anteil der Kapitaleinkommen am Volkseinkommen ist,

die optimale Sparrate bei Berücksichtigung einer Zeitpräferenzfunktion mit zunehmender Gegenwartsvorliebe abnimmt.

Zwei-Sektor-Modelle sind neuerdings von J. Meade<sup>3</sup>, H. Uzawa<sup>4</sup>, K. I. Inada<sup>5</sup>, E. M. Drandakis<sup>6</sup>, A. Takayama<sup>7</sup> sowie T. N. Srinivasan<sup>8</sup> vornehmlich zur Untersuchung der Eigenschaften der Stabilität des Wachstumsprozesses verwendet worden. Der Ausgangspunkt ist in diesen „Walrasschen Gleichgewichtsmodellen en miniature“, wie sie R. Solow treffend bezeichnet hat, immer gleich: Eine geschlossene Volkswirtschaft ohne staatliche Aktivität besteht aus zwei Sektoren — der Konsumgüter- und der Investitionsgüterindustrie —, von denen jeder mit den beiden Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital ein homogenes Gut erzeugt. Die Produktionsfunktionen sind homogen vom Grade Eins, technischer Fortschritt ist ausgeschlossen. Die Sparfunktion ist entweder keynesianischer Art (ein fester Bruchteil des Einkommens wird gespart) oder vom klassischen Typ (die Kapitaleinkommen werden restlos der Akkumulation zugeführt, die Arbeitseinkommen vollständig für Konsumgüter verausgabt). Wird nun weiterhin eine Entlohnung der Faktoren mit ihrem Wertgrenzprodukt unterstellt, dann ist sog. „golden age“-Wachstum für eine klassische Sparfunktion immer gewährleistet, für den Fall einer keynesianischen Sparfunktion dann, wenn der Konsumgütersektor kapitalintensiver als der Investitionsgütersektor ist. Die Produktion beider Sektoren wächst dann mit der vorgegebenen Rate des Arbeitsangebots. Die Kapitalintensitäten beider Sektoren sowie die gesamtwirtschaftliche Kapitalintensität sind eindeutig bestimmt<sup>9</sup>.

<sup>3</sup> J. E. Meade, *A Neo-Classical Theory of Economic Growth*, London 1961.

<sup>4</sup> H. Uzawa, *On a Two-Sector Model of Economic Growth: I, The Review of Economic Studies*, Vol. XXIX (1961), S. 40 ff. — *derselbe*, *On a Two-Sector Model of Economic Growth: II, The Review of Economic Studies*, Vol. XXX (1963), S. 105 ff. —, *derselbe*, *Optimal Growth in a Two Sector-Model of Capital Accumulation, The Review of Economic Studies*, Vol. XXXI (1964), S. 1 ff.

<sup>5</sup> K. I. Inada, *On The Stability of Growth Equilibria in Two-Sector Models, The Review of Economic Studies*, Vol. XXXI (1964), S. 127 ff.

<sup>6</sup> E. M. Drandakis, *Factor Substitution in the Two-Sector Growth Model, The Review of Economic Studies*, Vol. XXX (1963), S. 217 ff.

<sup>7</sup> A. Takayama, *On a Two-Sector Model of Economic Growth: A Comparative Statics Analysis, The Review of Economic Studies*, Vol. XXX (1963), S. 95 ff.

<sup>8</sup> T. N. Srinivasan, *Optimal Savings in a Two-Sector Model of Growth, Econometrica*, Vol. 32 (1964), S. 358 ff.

<sup>9</sup> A. Amano hat kürzlich bewiesen, daß eine hinreichende Bedingung für die Stabilität des Wachstumsprozesses darin besteht, daß die Substitutions-

## I.

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen sei ein Modell, dem folgende Annahmen zugrunde liegen:

1. Es handelt sich um eine geschlossene Wirtschaft ohne staatliche Aktivität, die aus zwei Sektoren besteht, wovon der eine Sektor Konsumgüter, der andere Kapitalgüter produziert.
2. Es existieren die homogenen Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital, die in den Sektoren zur Produktionserstellung eingesetzt werden. Beide Faktoren sind vollständig mobil und verformbar, d. h. Änderungen der Faktorpreisrelationen bewirken eine entsprechende intra- und interindustrielle Umkombination des Faktorbestandes.
3. Die Produktionsfunktionen in beiden Sektoren sind vom Cobb-Douglas-Typ, es existieren weder Kuppelprodukte noch externe Ersparnisse oder externe Kosten. Der technische Fortschritt in beiden Sektoren ist autonom und wegen der Verwendung einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion sowohl *Hicks*- als auch *Harrod*-neutral.
4. Das Arbeitsangebot reagiert nicht auf Lohnsatzänderungen, sondern wächst mit einer vorgegebenen Rate.
5. Es herrscht vollkommene Konkurrenz, die Faktoren werden mit ihrem Wertgrenzprodukt entlohnt.

Folgende Symbole werden verwendet:

$Y$  Bruttosozialprodukt (in Konsumgütereinheiten)

$Y_c$  Konsumgüterproduktion

$Y_k$  Kapitalgüterproduktion

$S$  gesamtwirtschaftliche Ersparnis

$K_i$  Kapitaleinsatz im Sektor  $i = c, k$

$L_i$  Arbeitseinsatz im Sektor  $i = c, k$

$w$  Lohnsatz

$r$  Zinssatz

$p_k$  Preis der Kapitalgüter (in Konsumgütereinheiten)

Wenn der Preis der Konsumgüter als numéraire verwendet und gleich Eins gesetzt wird, ist das in Konsumgütereinheiten gemessene Bruttosozialprodukt definiert als

$$(1.1) \quad Y(t) = Y_c(t) + p_k(t) Y_k(t)$$

---

elastizität in beiden Sektoren jeweils nicht kleiner als Eins ist. Vgl. A. Amano, A Further Note on Professor Uzawa's Two-Sector Model of Economic Growth, *The Review of Economic Studies*, VI. XXXI (1964), S. 97 ff.

Die Produktionsfunktionen beider Sektoren sind gegeben mit

$$(1.2) \quad Y_c(t) = e^{\sigma t} K_c(t)^\alpha L_c(t)^\beta \quad ; \quad \sigma \geq 0 ; \quad \begin{matrix} 0 < \alpha < 1 \\ 0 < \beta < 1 \end{matrix}$$

$$Y_k(t) = e^{\pi t} K_k(t)^\gamma L_k(t)^\delta \quad ; \quad \pi \geq 0 ; \quad \begin{matrix} 0 < \gamma < 1 \\ 0 < \delta < 1 \end{matrix}$$

Der Parameter  $\sigma$  gibt die Rate des technischen Fortschritts im Konsumgütersektor, der Parameter  $\pi$  die Fortschrittsrate im Kapitalgütersektor an. Ohne Zweifel ist die Einführung des technischen Fortschritts in dieser Form problematisch, denn es wird damit weder der Tatsache Rechnung getragen, daß die Durchsetzung „produktiverer“ Produktionsmethoden zum Teil nur auf dem Wege der Re- und Nettoinvestition erfolgt, noch wird berücksichtigt, daß in gewissem Ausmaß die Fortschrittsrate selbst wiederum von der Investitionsaktivität abhängig ist<sup>10</sup>.

Für das Arbeitsangebot gilt die Beziehung

$$(1.3) \quad L_c(t) + L_k(t) = e^{nt} \quad n \geq 0$$

Wir wollen ferner annehmen, daß die Kapitalgüter mit einer technologisch bestimmten Rate  $\lambda$  abgeschrieben werden<sup>11</sup>. Bezeichnet man die reale Bruttoinvestition im Zeitpunkt  $t$  mit  $I(t)$ , dann ist die Nettoinvestition definiert als

$$(1.4) \quad \dot{K}_c + \dot{K}_k = I(t) - \lambda (K_c(t) + K_k(t))$$

Die gesamtwirtschaftliche Bruttoersparnis  $S(t)$  sei proportional vom Einkommen abhängig und ex ante gleich dem Wert der Bruttoinvestition, somit

<sup>10</sup> R. Solow hat ein Modell entwickelt, in dem der an den Investitionsprozeß gebundene technische Fortschritt (embodied technical progress) berücksichtigt wird. Wegen der mathematischen Schwierigkeit der Behandlung in einem Zwei-Sektor-Modell mußte auf die Verwendung dieses Ansatzes verzichtet werden. Vgl. R. Solow, *Investment and Technical Progress*, in: K. J. Arrow, S. Karlin and P. Suppes (eds.), *Mathematical Models in the Social Sciences*, *Proceedings of The First Stanford Symposium*, Stanford 1960, S. 89 ff.

Eine Aufspaltung des technischen Fortschritts in eine autonome und in eine induzierte Komponente, wie z. B. bei C. Ch. von Weizsäcker, wurde nicht vorgenommen, weil dies u. E. zu keinen wesentlichen Veränderungen der Ergebnisse führt. Vgl. C. Ch. von Weizsäcker, *Wachstum, Zins und optimale Investitionsquote*, Basel 1962. H. Riese, *Gleichgewichtswachstum und optimales Wachstum in der neoklassischen Wachstumstheorie*, *Kyklos*, Vol. XVII (1964), S. 40 ff.

<sup>11</sup> Diese Abschreibungsmethode, die gleichsam einen radioaktiven Zerfall der Kapitalgüter unterstellt, ist sicherlich nicht unproblematisch, da sie impliziert, daß die Kapitalgüter nicht in endlicher Zeit aus dem Produktionsprozeß ausscheiden. Gegenüber anderen Verfahren — so z. B. Abschreibung auf Grund eines „plötzlichen Ausscheidens“ aus dem Produktionsprozeß — besitzt sie jedoch den Vorteil, daß die Wertminderung der Kapitalausrüstung unabhängig vom Altersaufbau des Kapitalstocks ist.



$$(1.5) \quad p_k(t) I(t) = s [Y_c(t) + p_k(t) Y_k(t)] \quad 0 < s < 1 .$$

Zu dieser Gleichgewichtsbedingung tritt die weitere Bedingung, daß das gesamtwirtschaftliche Investitionsvolumen gleich der Kapitalgüterproduktion ist, also

$$(1.6) \quad Y_k(t) = \dot{K}_c + \dot{K}_k + \lambda (K_c(t) + K_k(t)) .$$

Weiterhin gilt auf Grund der Annahme einer Entlohnung der Faktoren mit ihrem Wertgrenzprodukt

$$(1.7) \quad w(t) = \frac{\partial Y_c(t)}{\partial L_c(t)} = \frac{\partial Y_k(t)}{\partial L_k(t)} p_k(t)$$

$$(1.8) \quad r(t) = \frac{\partial Y_c(t)}{\partial K_c(t)} = \frac{\partial Y_k(t)}{\partial K_k(t)} p_k(t)$$

Dieses Modell enthält als Unbekannte die Größen  $Y(t)$ ,  $Y_c(t)$ ,  $Y_k(t)$ ,  $K_c(t)$ ,  $K_k(t)$ ,  $L_c(t)$ ,  $L_k(t)$ ,  $I(t)$ ,  $w(t)$ ,  $r(t)$  und  $p_k(t)$ . Zur Bestimmung dieser 11 Unbekannten stehen 11 Gleichungen zur Verfügung. Aus den Gleichungen (1.1), (1.2), (1.5) bis (1.8) folgt

$$(1.9) \quad K_c(t) = \frac{\alpha(1-s)}{\gamma s} K_k(t)$$

$$(1.10) \quad L_c(t) = \frac{\beta(1-s)}{\delta s} L_k(t)$$

Das Verhältnis zwischen Faktoreinsatz in der Konsumgüterindustrie und der Kapitalgüterindustrie wird durch die Produktionselastizität und die marginale Sparneigung eindeutig bestimmt. Je höher die marginale Sparneigung, um so größer ist der Anteil der Kapitalgüterindustrie am gesamtwirtschaftlichen Faktoreinsatz.

Ebenfalls von der Sparneigung hängt die sektorale Einkommensverteilung ab, denn aus (1.1) und (1.4) bis (1.6) folgt

$$(1.11) \quad \frac{p_k(t) Y_k(t)}{Y_c(t)} = \frac{s}{1-s} .$$

Für die funktionale Einkommensverteilung erhält man

$$(1.12) \quad \frac{w(t) [L_c(t) + L_k(t)]}{Y(t)} = \delta s + \beta(1-s) .$$

und

$$(1.13) \quad \frac{r(t) K(t)}{Y(t)} = \gamma s + \alpha(1-s) .$$



Während im neoklassischen Wachstums-Modell des Solow-Swan-Typs die Bedeutung der Sparneigung für die Einkommensverteilung von den Eigenschaften der Produktionsfunktion bestimmt wird, und deshalb für den Fall einer Cobb-Douglas-Funktion die relativen Einkommensanteile unabhängig von der Sparneigung sind, ist im Zwei-Sektor-Modell die Verteilung eine Funktion der Sparquote, wenn die Faktorintensitäten in beiden Sektoren voneinander abweichen. Eine Erhöhung der Sparquote hat eine Umverteilung zugunsten der Arbeitseinkommen zur Folge, wenn  $\delta > \beta$  ist, d. h. wenn die Kapitalintensität im Kapitalgütersektor kleiner als im Konsumgütersektor ist. Die Faktorpreisrelation verändert sich dann bei steigendem Anteil der Kapitalgüterproduktion zugunsten des Faktors Arbeit, so daß die Lohnquote zunimmt<sup>12</sup>. Die Feststellung, daß im Rahmen des neoklassischen Modells die funktionale Verteilung nur durch die Produktionsfunktion bestimmt sei und die Sparneigung nur von Bedeutung für die Aufteilung des Sozialprodukts in Konsum und Investition sei<sup>13</sup>, trifft somit nur für Ein-Sektor-Modelle zu. Im Zwei-Sektor-Modell determiniert die Sparneigung in Verbindung mit dem Bevölkerungswachstum und dem technischen Fortschritt nicht nur die Höhe des Zinssatzes, sondern auch die Verteilung.

Definiert man den Kapitalkoeffizienten jedes Sektors als das Verhältnis zwischen dem Wert des Kapitaleinsatzes und dem Produktionswert, also als  $k_k(t) = \frac{K_k(t)}{Y_k(t)}$  für den Kapitalgütersektor und als  $k_c(t) = \frac{K_c(t)p_k(t)}{Y_c(t)}$  für den Konsumgütersektor, dann folgt aus (1.9) und

$$(1.14) \quad k_c(t) = \frac{\alpha}{\gamma} k_k(t) ,$$

d. h. die Kapitalkoeffizienten beider Sektoren stehen in einem linearen, durch die Produktionselastizitäten des Kapitals bestimmten Zusammenhang zueinander.

Die im vorhergehenden aufgezeigten Beziehungen zwischen der marginalen Sparquote, den sektoralen Wertschöpfungsanteilen sowie dem Kapitalgüterpreis lassen sich graphisch recht einfach darstellen. Wie *Inada*<sup>14</sup> gezeigt hat, impliziert die Annahme einer konstanten Sparquote eine Nutzenfunktion vom Cobb-Douglas Typ. Wenn nämlich die

<sup>12</sup> Vgl. dazu auch R. Findlay, *Economic Growth and the Distributive Shares*, The Review of Economic Studies, Vol. XXVII (1960), S. 167 ff.

<sup>13</sup> Vgl. beispielsweise G. Bombach, *Wirtschaftswachstum*, Handwörterbuch der Sozialwissenschaften, 54. Lieferung, 1965, S. 789.

<sup>14</sup> K. I. Inada, *On the Stability of Growth Equilibria in Two-Sector Models*, a.a.O., S. 127 ff.

Nutzenfunktion  $U(Y_c, Y_k) = AY_c^{1-s} Y_k^s$  unter der Nebenbedingung (1.1) zu maximieren ist, dann erhält man als notwendige Bedingung für ein Maximum die Gleichung (1.11).

Der gesamtwirtschaftliche Kapitalstock sowie das Arbeitspotential in einer Periode seien gegeben. Aus (1.2) folgt dann eine gesamtwirtschaftliche Transformationsfunktion, die den in Schaubild 1 gezeigten Verlauf aufweist.

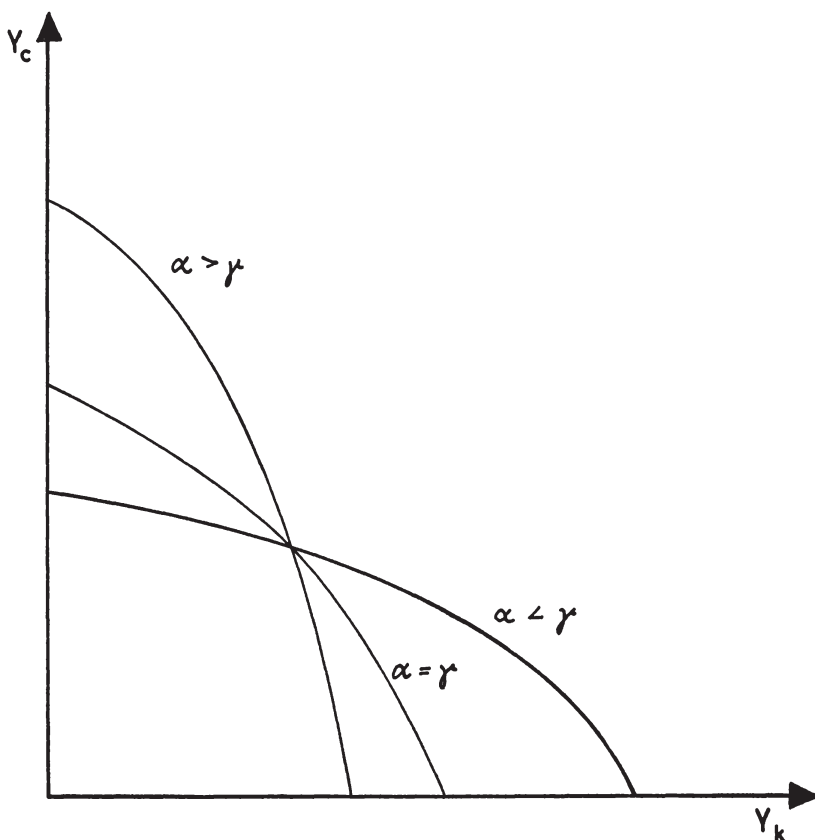


Schaubild 1

Der Schnittpunkt der Transformationskurve mit den Achsen gibt jeweils die Situation an, in der der gesamte Faktorbestand für die Produktion eines Gutes eingesetzt wird.

Das gesamtwirtschaftliche Nutzenmaximum wird durch den Tangentialpunkt einer sozialen Indifferenzkurve mit der Transformationskurve gekennzeichnet. In Schaubild (2) gibt der Tangens des Winkels  $\psi$  den Kapitalgüterpreis  $p_k$  an. Bei einer Sparquote  $s_0$  werden vom Ein-

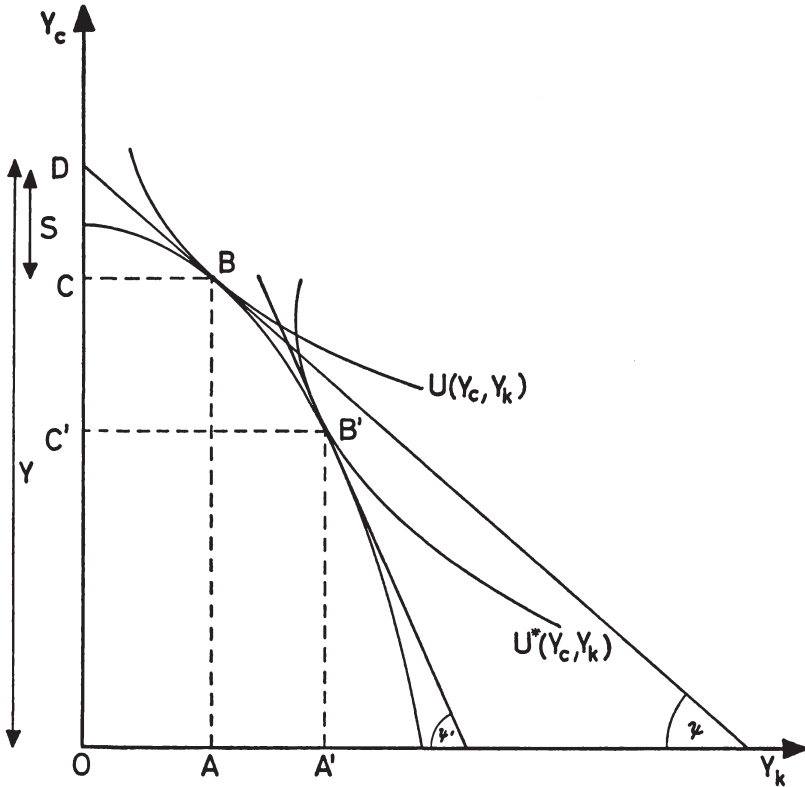


Schaubild 2

kommen  $YDC = S$  Einheiten gespart,  $OA$  Mengeneinheiten Kapitalgüter und  $OC$  Einheiten Konsumgüter erzeugt. Eine Erhöhung der Sparneigung hat eine Produktionsumschichtung zugunsten der Kapitalgüterindustrie zur Folge, nämlich  $OA'$  gegenüber  $OA$  Einheiten: das in Konsumgütereinheiten gemessene Volkseinkommen nimmt zu. Durch den vermehrten Faktoreinsatz sinkt das Grenzprodukt der Faktoren im Kapitalgütersektor, so daß notwendigerweise zur Erhaltung des Konkurrenzgleichgewichts der Kapitalgüterpreis steigen muß.

Schaubild 1 in Verbindung mit Schaubild 2 verdeutlicht auch, daß bei gegebener Sparneigung die Produktionsaufteilung nur von den Produktionselastizitäten abhängig ist. Unterscheiden sich zwei Volkswirtschaften nur durch die Faktorintensitäten, dann produziert die Wirtschaft mehr Kapitalgüter zu einem niedrigeren Preis, die eine größere Produktionselastizität des Kapitals im Kapitalgütersektor aufweist<sup>15</sup>.

Aus (1.2), (1.3), (1.9) erhält man die grundlegende Differentialgleichung für dieses Modell, die den zeitlichen Verlauf des Kapitaleinsatzes im Kapitalgütersektor als Funktion der Fortschrittsrate und der Wachstumsrate des Arbeitspotentials beschreibt. Die Integration dieser Differentialgleichung ergibt als eindeutig bestimmte Lösung für  $K_k(t) = K_k(0)$  für  $t = 0$  die Gleichung

$$(1.15) \quad K_k(t) = [(k_k(0) - \bar{k}_k) e^{-\lambda(1-\gamma)t} + \bar{k}_k] e^{(\pi+\delta n)t} \frac{1}{1-\gamma}$$

Dabei bezeichnen  $k_k(0)$  den Kapitalkoeffizienten der Kapitalgüterindustrie im Anfangszeitpunkt und  $\bar{k}_k$  den langfristig konstanten Kapitalkoeffizienten, dessen Wert bestimmt wird durch

$$(1.16) \quad k_k(t) = \bar{k}_k + (k_k(0) - \bar{k}_k) e^{-\mu t}$$

mit

$$\bar{k}_k = \frac{(1-\gamma)a}{\mu}$$

und

$$\mu = \pi + \delta n + (1-\gamma)\lambda \quad \text{sowie} \quad a = \frac{\gamma s}{\alpha(1-s) + \gamma s}.$$

Langfristig hängt nach Gleichung (1.15) die Wachstumsrate des Kapitalstocks im Kapitalgütersektor und wegen (1.9) auch diejenige im Konsumgütersektor bei gegebenen Produktionselastizitäten nur von der Rate des technischen Fortschritts im Kapitalgütersektor und von der Zuwachsrate des Arbeitspotentials ab. Sie ist auf die Dauer unabhängig vom Abschreibungssatz, der nur für die Art des Übergangs zu dieser langfristigen Entwicklung wichtig ist. Bei gegebener Anfangsbedingung erfolgt die Anpassung um so schneller, je höher der Abschreibungssatz ist. Gleichung (1.16) gibt den zeitlichen Verlauf des

<sup>15</sup> Hier liegt eine Analogie zur Theorie des internationalen Handels vor, daß nämlich bei gleicher Faktorausstattung und bei gleicher gesellschaftlicher Nutzenfunktion für die Spezialisierung nur die Faktorintensitäten in der Produktion der beiden Güter maßgebend sind.

Kapitalkoeffizienten an, dessen langfristiger Gleichgewichtswert mit zunehmender Sparquote steigt. Für  $k_k(0) > \bar{k}_k$  beispielsweise vollzieht sich der Anpassungsprozeß von oben; der Produktionswert wächst zunächst schneller als der Kapitaleinsatz.

Die Wachstumsrate der Kapitalgüterproduktion ist gegeben durch

$$(1.17) \quad \frac{\dot{Y}_k}{Y_k} = \pi + \delta n + \frac{\gamma}{1-\gamma} \left[ \frac{\pi + \delta n - \lambda(1-\gamma) g e^{-\mu t}}{1 + g e^{-\mu t}} \right],$$

wobei

$$g = \frac{k_k(0) - \bar{k}_k}{\bar{k}_k}$$

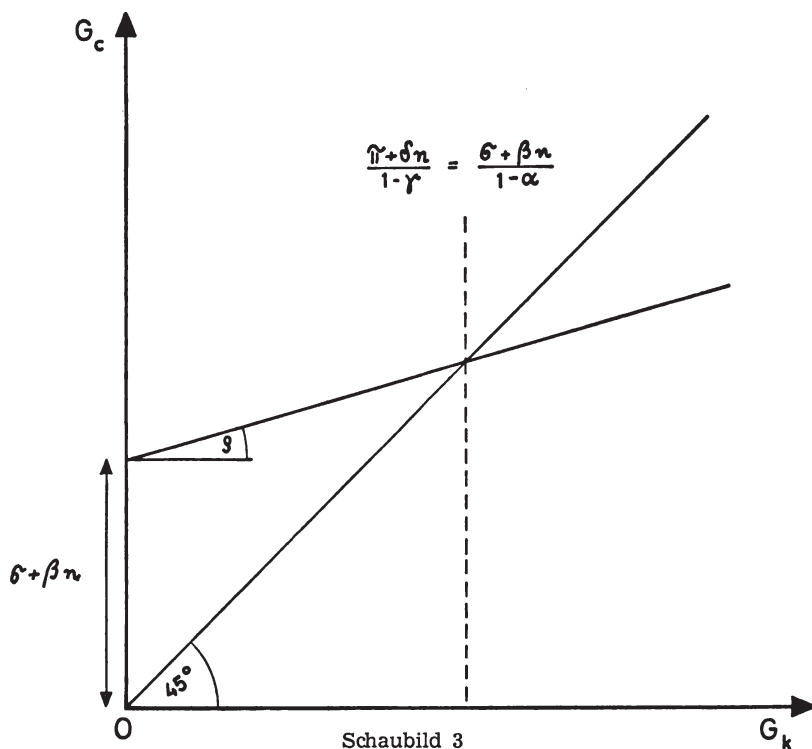
ist. Langfristig nimmt somit die Kapitalgütererzeugung mit der natürlichen Rate  $G_k = \frac{\pi + \delta n}{1-\gamma}$  zu. Der relative Unterschied zwischen dem Kapitalkoeffizienten im Anfangszeitpunkt und dem langfristigen Kapitalkoeffizienten bestimmt wiederum die Art des Anpassungspfad, denn für  $g > 0$  liegt die Zuwachsrates zunächst unterhalb der „golden age“-Rate, da die durchschnittliche Kapitalproduktivität kleiner als der Gleichgewichtswert ist, so daß wegen eines optimalen Faktoreinsatzes weniger Kapital akkumuliert werden muß.

Für die natürliche Wachstumsrate der Konsumgüterproduktion gilt

$$(1.18) \quad G_c = \sigma + \beta n + \frac{\alpha(\pi + \delta n)}{1-\gamma}$$

Die Zunahme der Konsumgüterproduktion ist also eine Funktion der Zuwachsrates des Arbeitspotentials und des technischen Fortschritts in beiden Sektoren. Im Gegensatz zum Ein-Sektor-Modell, in dem Konsum- und Kapitalgütererzeugung sich gleichmäßig ausdehnen, ist in der Zwei-Sektor-Wirtschaft dynamisches Gleichgewicht bei unterschiedlicher sektoraler Entwicklung möglich. Beide Sektoren weisen nur für  $\frac{\pi + \delta n}{1-\gamma} = \frac{\sigma + \beta n}{1-\alpha}$  gleiche Wachstumsraten auf, d. h. wenn im Falle konstanter Skalenerträge für die Faktoren Arbeit und Kapital sich die Raten des technischen Fortschritts umgekehrt proportional zueinander verhalten wie die Produktionselastizitäten des Kapitals.

Schaubild 3 zeigt diesen Zusammenhang zwischen den Wachstumsraten der Kapital- und Konsumgüterproduktion. Für  $G_k < G_c$  nimmt der Preis der Kapitalgüter ständig zu, d. h. das reale Austauschverhältnis zwischen den beiden Sektoren verändert sich zugunsten der Kapitalgüterindustrie.



Die Auswirkungen einer Veränderung der Fortschrittsrate auf die gleichgewichtige Wachstumsrate des Bruttosozialprodukts  $G$  sind leicht zu erkennen, denn es ist

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \frac{\partial G}{\partial \pi} \quad \begin{array}{l} \text{für } \alpha + \gamma < 1 \\ \text{für } \alpha + \gamma = 1 \\ \text{für } \alpha + \gamma > 1 \end{array}$$

Eine Erhöhung der Fortschrittsrate im Investitionsgütersektor hat nur dann einen größeren Effekt auf die Wachstumsrate des Volkseinkommens als eine entsprechende Zunahme im Konsumgütersektor, wenn die Summe der Produktionselastizitäten des Kapitals in beiden Bereichen größer als Eins ist. Unterstellt man jedoch als „realistischen“ Fall  $\alpha + \gamma < 1$ , dann stimuliert eine Zunahme der Fortschrittsrate in der Konsumgüterindustrie das Wachstum des Volkseinkommens in stärkerem Maße.

Die Lösung des Gleichungssystems (1.1) bis (1.8) für  $p_k(t)$  ergibt

$$(1.19) \quad p_k(t) = A e^{[\sigma - \pi + (\beta - \delta)n]t} K_k(t)^{\alpha - \gamma},$$

wobei  $A$  eine aus den Parametern bestehende Konstante bezeichnet. Gleichung (1.19) zeigt, wie sich das reale Austauschverhältnis zwischen den Sektoren bei ständiger Kapitalakkumulation verändert. Unterstellen wir zunächst, die Fortschrittsrate in beiden Sektoren sei Null und das Arbeitspotential ändere sich nicht. Für  $\alpha > \gamma$  strebt dann der Kapitalgüterpreis bei laufender Kapitalakkumulation gegen Unendlich, für  $\alpha < \gamma$  gegen Null. Im ersten Fall bewirkt die Zunahme des Kapitaleinsatzes in beiden Wirtschaftsbereichen einen proportional geringeren Rückgang des Grenzprodukts des Kapitals im Konsumgütersektor gegenüber dem Kapitalgütersektor. Damit die Gleichheit der Wertgrenzprodukte gewährleistet ist, muß der Kapitalgüterpreis steigen. Im zweiten Fall hingegen führt die Kapitalakkumulation zu einer proportional stärkeren Abnahme des Grenzprodukts im Konsumgütersektor, so daß sich eine ständige Verbesserung des realen Austauschverhältnisses zugunsten des Konsumgütersektors ergibt. Unter diesen Voraussetzungen können sich also Kapitalgüterpreis und Zinssatz unabhängig voneinander entwickeln, da der Zinssatz infolge der Kapitalakkumulation immer gegen Null konvergiert.

Für die Zuwachsrate des Kapitalgüterpreises erhält man

$$(1.20) \quad \frac{\dot{p}_k}{p_k} = \sigma - \pi + (\beta - \delta)n + \frac{\alpha - \gamma}{1 - \gamma} \left[ \frac{\pi + \delta n - \lambda(1 - \gamma)ge^{-\mu t}}{1 + ge^{-\mu t}} \right]$$

Im Fall konstanter Skalenerträge für Arbeit und Kapital in beiden Sektoren ist somit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{p}_k}{p_k} \begin{cases} > 0 \text{ für } \frac{\sigma}{\pi} > \frac{1 - \alpha}{1 - \gamma} \\ = 0 \text{ für } \frac{\sigma}{\pi} = \frac{1 - \alpha}{1 - \gamma} \\ < 0 \text{ für } \frac{\sigma}{\pi} < \frac{1 - \alpha}{1 - \gamma} \end{cases}$$

Bei autonomem technischen Fortschritt ändert sich das reale Austauschverhältnis zwischen Konsum- und Kapitalgüterindustrie nur dann nicht, wenn sich die Produktionselastizitäten des Kapitals umgekehrt proportional zueinander verhalten wie die Raten des technischen Fortschritts. Eine im Vergleich zur Konsumgüterindustrie höhere Rate des technischen Fortschritts in der Kapitalgüterindustrie bewirkt daher noch nicht eine Veränderung des realen Austauschverhältnisses zugunsten des Konsumgütersektors.

Da für  $G_k > G_c$  weiterhin im Falle konstanter Skalenerträge  $\frac{1-\alpha}{1-\gamma} > \frac{\sigma}{\pi}$  sein muß, folgt, daß dann der in Konsumgütereinheiten gemessene Kapitalgüterpreis ständig sinkt.

Für den Übergang zum langfristigen Gleichgewicht lassen sich vier Fälle unterscheiden, je nach den Annahmen über die relative Abweichung des Kapitalkoeffizienten im Anfangszeitpunkt von dem entsprechenden langfristigen Wert und dem Verhältnis der Faktorintensitäten in beiden Sektoren. Unterstellt man, daß  $\bar{k}_k < k_k(0)$  sei, dann liegt für  $\alpha < \gamma$  der Kapitalgüterpreis zu Beginn des Entwicklungsprozesses höher als der langfristige Gleichgewichtspreis und sinkt allmählich auf dessen Niveau. Ist jedoch die Kapitalintensität im Konsumgütersektor größer als die im Kapitalgütersektor ( $\alpha > \gamma$ ), dann steigt die Zuwachsrate bis der natürliche Entwicklungspfad erreicht wird. Wenn hingegen  $\bar{k}_k > k_k(0)$  ist, dann liegt für  $\alpha < \gamma$  der Ausgangspreis niedriger als der langfristige Gleichgewichtspreis und steigt daher ständig an, bis das langfristige Entwicklungsniveau erreicht ist. Für  $\alpha > \gamma$  ist der Preis in der Ausgangssituation zu hoch, so daß während des Übergangsprozesses die Zuwachsrate sinkt oder die Abnahmerate größer wird.

Diese Anpassung an den langfristigen Entwicklungsprozeß läßt sich folgendermaßen erklären: Im ersten Fall beispielsweise existiert in der Wirtschaft ein Kapitalüberschuß im Vergleich zur Situation bei langfristig konstanter Wachstumsrate. Bei weiterer positiver Nettoinvestition nimmt das Grenzprodukt des Kapitals im Kapitalgütersektor stärker ab als im Konsumgütersektor, so daß der Kapitalgüterpreis sinkt.  $\alpha > \gamma$  impliziert hingegen die umgekehrte Veränderung des Grenzprodukts, so daß die Zuwachs(Abnahme-)rate des Kapitals während der Übergangsperiode zunimmt (sinkt).

Der zeitliche Verlauf des Lohn- und Zinssatzes ist in Gleichung (1.21) bzw. (1.22) angegeben, in denen  $B$  und  $C$  aus den Parametern des Modells bestehende Konstanten bezeichnen.

$$(1.21) \quad w(t) = B e^{(\sigma - (1-\beta)n)t} \left[ (k_k(0) - \bar{k}_k) e^{-\lambda(1-\gamma)t} + \bar{k}_k e^{(\sigma + \delta n)t} \right]^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}$$

$$(1.22) \quad r(t) = \frac{C e^{(\sigma + \beta n)t}}{\left[ (k_k(0) - \bar{k}_k) e^{-\lambda(1-\gamma)t} + \bar{k}_k e^{(\sigma + \delta n)t} \right]^{\frac{1-\alpha}{1-\gamma}}}$$

Ohne technischen Fortschritt konvergieren beide Variablen gegen einen festen Wert: Der Lohnsatz ist um so höher und der Zinssatz um so niedriger, je größer der Kapitalkoeffizient ist. Eine ständige Lohn-



erhöhung ergibt sich nur bei einer positiven Fortschrittsrate der Wirtschaft, wobei es weniger wichtig ist, in welchem Sektor diese auftritt. Technischer Fortschritt im Konsumgütersektor bewirkt *cet. par.* die laufende Erhöhung des Grenzprodukts der Faktoren und führt auf diese Weise zu steigenden Lohnsätzen. Im Kapitalgütersektor resultiert aus dem Fortschritt eine Vermehrung der Kapitalgüter, die ihrerseits wiederum eine Zunahme des Grenzprodukts der Arbeit und damit des Lohnsatzes zur Folge hat.

Die Frage nach dem „wo“ des technischen Fortschritts ist jedoch entscheidend für die langfristige Entwicklung des Zinssatzes, dessen Veränderung positiv mit der Fortschrittsrate im Konsumgütersektor und negativ mit derjenigen des Kapitalgütersektors korreliert ist. Je größer nämlich die Fortschrittsrate im Konsumgütersektor ist, desto mehr verändert sich das reale Austauschverhältnis zuungunsten dieses Sektors, so daß der in Konsumgütereinheiten gemessene Zinssatz steigt. Zinssatz und Lohnsatz können sich unter diesen Bedingungen auf die Dauer völlig unterschiedlich entwickeln, während die in Kapitalgütereinheiten gemessene Rendite des Kapitals — der Realzins — letztlich einen konstanten Wert erreicht, der mit steigendem Kapitalkoeffizienten abnimmt. Ob allerdings der Fall ständiger Lohnerhöhungen und Zinssenkungen noch mit der Hypothese gleichgewichtigen Wachstums vereinbar ist, scheint sehr problematisch.

Die Art des Übergangsprozesses zum langfristigen Gleichgewicht hängt wiederum davon ab, ob im Anfangszeitpunkt Kapitalüberschuß oder -mangel herrscht. Im ersten Fall liegt der Lohnsatz zunächst über, der Zinssatz unter dem natürlichen Entwicklungspfad. Während des Anpassungszeitraumes verändern sich daher beide Größen in entgegengesetzter Richtung. Wenn jedoch Kapitalmangel vorliegt, also wenn  $k_k(0) < \bar{k}_k$  ist, dann vollzieht sich die Anpassung genau umgekehrt zur Entwicklung im ersten Fall.

## II.

Ebenso wie im neoklassischen Ein-Sektor-Modell existiert auch in der Zwei-Sektor-Wirtschaft eine Zuwachsrate des Volkseinkommens, die langfristig durch die Raten der Bevölkerungsvermehrung und des technischen Fortschritts bestimmt wird und unabhängig von der Sparquote ist. Die Sparneigung ist aber nicht nur entscheidend für die Einkommensverteilung sowie für die Größe der Kapitalkoeffizienten und damit für das Zins- und Lohnniveau, sondern auch für die Höhe des Konsums als Differenz zwischen Sozialprodukt und Investition. Jeder Sparquote ist eine andere Aufteilung des Sozialprodukts in Konsum- und Kapitalgütern zugeordnet, von denen nur eine die langfristige

Maximierung des Konsums garantiert. Die Konsequenz einer zusätzlichen Einheit von Ersparnissen besteht in der Reduktion des gegenwärtigen Konsums einerseits und in einer Zunahme der zukünftigen Produktion und der zukünftigen Konsumversorgung andererseits. Eine Gesellschaft befindet sich daher, wie *G. Bombach* schreibt, „in einer Konfliktsituation, in dem sie immer von neuem zu entscheiden hat, ob auf gegenwärtige Konsumchancen mit dem Ziele der Vergrößerung der Wachstumsrate und somit der Möglichkeit zukünftiger Wohlstandsvermehrung verzichtet oder ob umgekehrt dem „Gesetz der Höhererschätzung der Gegenwartsbedürfnisse“ freies Spiel gelassen werden soll“<sup>16</sup>. Die Frage, wieviel Einkommen eine Gesellschaft optimal sparen sollte, ist daher zugleich eine Frage nach der optimalen zeitlichen Konsumplanung, denn eine Zurückstellung des gegenwärtigen Konsums bedeutet eine Allokation zugunsten zukünftiger Generationen.

Generell können wir dasjenige Konsumprogramm als optimal bezeichnen, das ein von der Gesellschaft oder der Planungsinstanz vorgegebenes Nutzenfunktional unter bestimmten Nebenbedingungen maximiert<sup>17</sup>. Der gesamtwirtschaftliche Nutzen einer beliebigen Periode sei dabei nur von dem Konsumniveau der gleichen Periode abhängig, die Präferenzordnung bleibe im Zeitablauf konstant. Obwohl mit diesen beiden Annahmen der zeitlichen Konstanz der Präferenzordnung und der fehlenden Komplementarität zwischen den Konsumniveaus verschiedener Perioden gewisse analytische Schwierigkeiten bereits ausgeschaltet sind, können weitere Probleme auftreten, die man als „Paradoxien der Unendlichkeit“ bezeichnet hat<sup>18</sup>. Diese Probleme können im allgemeinen nur gelöst werden, wenn im Modell zusätzliche Bedingungen für die Konvergenz des Nutzenintegrals eingeführt werden, beispielsweise mit Hilfe des Konzepts eines endlichen „Bliss“ von *F. Ramsey*<sup>19</sup> oder desjenigen der „Höhererschätzung der Gegenwartsbedürfnisse“ von *Böhm-Bawerk*<sup>20</sup>. Beide Verfahren schließen eine gewisse Willkür nicht aus: Die Einführung einer oberen Grenze für das Konsumniveau entbehrt nicht nur einer realistischen Bezugsgröße, sondern impliziert auch eine Überbetonung des „Gesetzes des abnehmenden Grenznutzens“, die angesichts der neueren Ergebnisse der Konsumtheorie problematisch erscheint. Hinsichtlich einer gesamtwirtschaftlichen Zeitpräferenzfunktion kann man der Ansicht sein, daß

<sup>16</sup> *G. Bombach*, Wirtschaftswachstum, a.a.O., S. 792.

<sup>17</sup> Vgl. dazu auch *S. Chakravarty*, The Existence of an Optimum Savings Program, *Econometrica*, Vol. 30 (1962), S. 178 ff.

<sup>18</sup> *S. Chakravarty*, Optimal Savings with Finite Planning Horizon, *International Economic Review*, Vol. 3 (1962), S. 338.

<sup>19</sup> *F. Ramsey*, A Mathematical Theory of Saving, *The Economic Journal*, Vol. 38 (1928), S. 543 ff.

<sup>20</sup> *E. von Böhm-Bawerk*, Positive Theorie des Kapitals, 4. Auflage, Erster Band, Jena 1921, insb. Buch IV, S. 318 ff.

eine Diskontierung für die Zeit per se nicht sinnvoll sei und daß gesamtwirtschaftliche Entscheidungen im Gegensatz zu den individuellen Entscheidungen nicht von der Höhererschätzung der Gegenwartsbedürfnisse ausgehen dürfte, sondern daß einer optimalen Wachstumsstrategie die Konsumversorgung als solche und nicht die augenblickliche Bewertung der zukünftigen gesamtwirtschaftlichen Wohlfahrt zugrunde zu liegen hat<sup>21</sup>. Eine derartige Zielsetzung kann zur Folge haben, daß gegenwärtige Generationen ihren Konsum auf ein Minimum beschränken und den größten Teil des Einkommens der Kapitalbildung zuführen müssen, wenn beispielsweise bei konstantem Grenznutzen die Grenzproduktivität des Kapitals trotz stetiger Kapitalakkumulation wegen des technischen Fortschritts ad infinitum positiv bleibt. Die Maximierung einer sozialen Wohlfahrtsfunktion, in der die Wohlfahrt eine Funktion des Nutzens jeder Generation ist, bedeutet jedoch eine autoritäre Lösung des Wachstumsproblems, da der Wohlfahrtsfunktion Präferenzvorstellungen zugrunde liegen können, die völlig konträr zu denjenigen aller Mitglieder der Gesellschaft sind. Für demokratische Gesellschaftsordnungen kann man es daher als ein Axiom ansehen, daß die Wohlfahrtsfunktion der Planungsinstanz nur die Präferenzen der Individuen reflektieren sollte, die gegenwärtig Mitglieder der Gesellschaft sind<sup>22</sup>. Aber auch aus rein pragmatischen Gründen — von anderen wohlfahrtstheoretischen Aspekten dieses Problems einmal ganz abgesehen<sup>23</sup> — scheint es zweckmäßig, einen Diskontfaktor gleichsam als Grenze für ein optimales Investitionsprogramm in der gesamtwirtschaftlichen Nutzenfunktion zu berücksichtigen.

Das Problem der optimalen Konsumgüterversorgung wurde in der neoklassischen Wachstumstheorie der Ein-Sektor-Modelle für die Grenzwerte mit Hilfe einer sehr einfachen Methode gelöst, die auch hier angewandt werden kann.

Wir wollen zunächst annehmen, daß sich zwei Volkswirtschaften, deren Parameter mit Ausnahme der Sparneigung identisch sind, auf ihrem langfristig gleichgewichtigen Wachstumspfad entwickeln. Von diesen durch konstante Wachstumsraten gekennzeichneten Pfaden sei derjenige ausgewählt, der eine maximale Konsumgüterversorgung gewährleistet. Als notwendige Bedingung für ein Konsummaximum muß dann die Wachstumsrate der Kapitalgüterproduktion der Grenzpro-

---

<sup>21</sup> Vgl. z. B. A. C. Pigou, *The Economics of Welfare*, 4. Aufl., London 1932, S. 26. — M. Dobb, *An Essay on Economic Growth and Planning*, London 1966, S. 15. — J. Tinbergen, *Optimum Savings and Utility Maximization over Time*, *Econometrica*, Vol. 28 (1960), S. 481 ff.

<sup>22</sup> Vgl. St. A. Marglin, *The Social Rate of Discount and the Optimal Rate of Investment*, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 77 (1963), S. 97.

<sup>23</sup> Vgl. z. B. A. K. Sen, *On Optimizing the Rate of Saving*, *The Economic Journal*, Vol. 71 (1961), S. 487 ff.

duktivität des Kapitals im Kapitalgütersektor oder, anders ausgedrückt, dem Produkt aus Produktionselastizität des Kapitals und inversem Kapitalkoeffizienten gleich sein. Ersetzt man den Kapitalkoeffizienten durch den entsprechenden Ausdruck in (1.16), dann folgt unmittelbar, daß bei gegebenen Raten der Bevölkerungsvermehrung und des technischen Fortschritts langfristig diejenige Volkswirtschaft ein maximales Konsumniveau aufweist, in der die Sparneigung dem Anteil der Kapitaleinkommen am Volkseinkommen entspricht. Dieses Ergebnis stimmt mit der von E. Phelps<sup>24</sup>, C. C. von Weizsäcker<sup>25</sup> u. a. für das Ein-Sektor-Modell abgeleiteten „goldenen Regel der Kapitalakkumulation“ überein, nach der im Optimum der Zinssatz gleich der Wachstumsrate des Kapitalstocks sein soll<sup>26</sup>.

Ein wesentlicher Nachteil dieses Ansatzes zur Bestimmung der optimalen Sparquote liegt darin, daß erstens nur alternative „golden age“-Pfade verglichen werden und daß zweitens implizite eine Nutzenfunktion unterstellt wird, in der der Gesamtnutzen linear mit der Konsummenge variiert und unabhängig vom Konsumzeitpunkt ist. Der Nutzen einer bestimmten Konsumgütermenge im gegenwärtigen Zeitpunkt wird als dem Nutzen der gleichen Menge in einem beliebigen zukünftigen Zeitpunkt gleichwertig betrachtet, m. a. W., das „Gesetz der Höhererschätzung der Gegenwartsbedürfnisse“ gilt hier nicht. Da weiterhin bei technischem Fortschritt mittels Variationen der Sparquote der Konsum vorübergehend über den Optimalpfad angehoben werden kann und somit in einem beliebigen endlichen Zeitintervall der die Konsumgüterversorgung maximierende Wachstumspfad nicht notwendigerweise ein „golden age“-Pfad zu sein braucht<sup>27</sup>, läßt sich die Frage, ob eine der „goldenen Regel der Akkumulation“ entsprechende Investitions- (bzw. Spar-)politik durch wirtschaftspolitische Maßnahmen angestrebt werden soll, nur mit Hilfe einer Zeitpräferenzfunktion entscheiden.

Im folgenden wollen wir der Einfachheit halber, da die Fortschrittsrate grundsätzlich den gleichen Effekt wie die Rate der Bevölkerungsvermehrung besitzt, von einem Modell mit konstanter Produktions-

<sup>24</sup> E. Phelps, *The Golden Rate of Accumulation: A Fable for Growthmen*, *The American Economic Review*, Vol. 51 (1961), S. 638 ff.

<sup>25</sup> C. Ch. von Weizsäcker, *Wachstum, Zins und optimale Investitionsquote*, a.a.O., S. 48 ff.

<sup>26</sup> Selbstverständlich ist daher in einem sog. Zwei-Klassen-Modell wegen der spezifischen Annahmen über das Sparverhalten die Wachstumsrate a priori optimal. Zu den Bezeichnungen „Ein-Klassen-Modell“ und „Zwei-Klassen-Modell“, die unterschiedliche Annahmen über das Sparverhalten beinhalten, vgl. J. Niehans, *Economic Growth with Two Endogenous Factors*, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 77 (1963), S. 349 ff.

<sup>27</sup> Vgl. dazu I. F. Pearce, *The End of Golden Age in Solovia: A Further Fable for Growthmen Hoping to Be „One up“ on Oiko*, *The American Economic Review*, Vol. 52 (1962), S. 1088 ff.

technik ausgehen. Weiterhin sei zur Vereinfachung angenommen, daß Kapitalgüter eine unendliche Lebensdauer besitzen. Das Modell besteht dann aus folgenden Beziehungen:

$$(2.1) \quad \begin{array}{lll} Y_c(t) = K_c^\alpha(t) L_c^\beta(t) & \begin{array}{l} 0 < \alpha < 1 \\ 0 < \beta < 1 \end{array} & \alpha + \beta = 1 \\ Y_k(t) = K_k^\gamma(t) L_k^\delta(t) & \begin{array}{l} 0 < \gamma < 1 \\ 0 < \delta < 1 \end{array} & \gamma + \delta = 1 \end{array}$$

$$(2.2) \quad K_c(t) + K_k(t) = K(t)$$

$$(2.3) \quad \begin{array}{l} L_c(t) + L_k(t) = L(t) \\ L(t) = e^{nt} \quad n \geq 0 \end{array}$$

$$(2.4) \quad Y_k(t) = \dot{K}(t)$$

Es wird ferner unterstellt, daß die zu maximierende Nutzenfunktion  $\int_{t^*}^{\infty} U(C(t)) dt = \int_{t^*}^{\infty} \frac{Y_c(t)}{L(t)} e^{-\rho t} dt$  ist, m. a. W., es soll der diskontierte Wert des je-Kopf-Konsums unter den Nebenbedingungen (2.1) bis (2.4) maximiert werden.

Die Lösung der Euler-Gleichungen dieses Variationsproblems ergibt den Ausdruck

$$(2.5) \quad s(t) = \bar{s} + \frac{(y(t^*))}{y(t)} (s(t^*) - \bar{s}) e^{-\delta \eta(t-t^*)}; \quad \eta = \left| \frac{\beta \varrho + \delta n}{\beta - \delta} \right|$$

Dabei bezeichnet  $y(t)$  das Je-Kopf-Einkommen zum Zeitpunkt  $(t)$ .

Für den langfristigen Gleichgewichtswert für die Sparquote gilt

$$(2.6) \quad \bar{s} = \frac{1}{1 + \frac{\varrho + (1-\gamma)n}{\alpha n}}$$

und für den Anteil der Kapitaleinkommen am Volkseinkommen

$$(2.7) \quad \frac{\bar{\tau} \bar{K}}{\bar{Y}} = \frac{1}{1 + \frac{(1-\alpha)\varrho + (1-\gamma)n}{\alpha(\varrho + n)}}$$

Nach (2.6) hängt der langfristige Gleichgewichtswert der Sparquote von den Produktionselastizitäten des Kapitals, dem Diskontsatz und der Wachstumsrate des Arbeitspotentials ab. Die optimale Sparquote

ist um so höher, je kleiner die Produktionselastizitäten sind. Tabelle 1 verdeutlicht diesen Zusammenhang zwischen Sparquote und Produktionselastizitäten für den Fall einer fehlenden Zeitpräferenzfunktion; in diesem Fall hat das Bevölkerungswachstum, wie aus Gleichung (2.6) zu entnehmen ist, keinen Einfluß auf die optimale Sparquote.

Selbstverständlich muß für alle Diagonalelemente die optimale Sparquote gleich der Produktionselastizität sein, da dann wegen der identischen Produktionstechnik in beiden Bereichen der Fall einer Ein-Sektor-Wirtschaft vorliegt und die Produktionselastizität des Kapitals

Tabelle 1

Optimale Sparquoten für alternative Werte  
der Produktionselastizitäten ( $\varrho = 0$ )

| $\gamma \backslash \alpha$ | 0,1   | 0,2   | 0,3   | 0,5   | 0,7   |
|----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,1                        | 0,100 | 0,182 | 0,250 | 0,357 | 0,438 |
| 0,2                        | 0,111 | 0,200 | 0,273 | 0,385 | 0,467 |
| 0,3                        | 0,125 | 0,222 | 0,300 | 0,417 | 0,500 |
| 0,5                        | 0,167 | 0,286 | 0,375 | 0,500 | 0,583 |
| 0,7                        | 0,250 | 0,400 | 0,500 | 0,625 | 0,700 |

den Anteil der Kapitaleinkommen am Volkseinkommen angibt. Der Einfluß des Diskontsatzes und der Wachstumsrate der Bevölkerung auf die optimale Sparquote ist für  $\alpha = \gamma = 0,2$  beispielhaft in Tabelle 2 aufgezeigt. Die Höherbewertung der Gegenwartsbedürfnisse bewirkt eine Reduzierung, eine höhere Wachstumsrate des Arbeitsangebots eine Zunahme der optimalen Sparquote. Gegenüber dem Fall

Tabelle 2

Optimale Sparquoten für verschiedene Diskontfaktoren  
und Raten der Bevölkerungsvermehrung ( $\alpha = \gamma = 0,2$ )

| $n \backslash \varrho$ | 0,01  | 0,02  | 0,03  | 0,05  | 0,10  |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,01                   | 0,100 | 0,067 | 0,050 | 0,033 | 0,018 |
| 0,02                   | 0,133 | 0,100 | 0,080 | 0,057 | 0,033 |
| 0,03                   | 0,150 | 0,120 | 0,100 | 0,075 | 0,046 |
| 0,05                   | 0,167 | 0,143 | 0,125 | 0,100 | 0,067 |

fehlender zeitlicher Diskontierung sinkt beispielsweise für einen Diskontsatz von 1 v.H. und für eine Wachstumsrate der Bevölkerung von 1 v.H. der langfristige Gleichgewichtswert der Sparneigung von 20 v.H. auf 10 v.H., für einen Diskontsatz von 3 v.H. sogar auf ein Viertel des ursprünglichen Wertes. Die „goldene Regel der Akkumulation“ beschreibt somit nur einen Spezialfall einer optimalen Investitionspolitik. Wenn jedoch die Böhm-Bawerksche Hypothese der Minderschätzung der Zukunftsgüter auch für eine Gesellschaft als Ganzes als zutreffend unterstellt werden kann, dann wird die optimale Sparquote nicht nur durch die jeweilige Zeitpräferenzfunktion, sondern auch durch die Rate der Bevölkerungsvermehrung determiniert. Die optimale Sparquote entspricht nur dann dem Anteil der Kapitaleinkommen am Volkseinkommen, wenn Gegenwarts- und Zukunftskonsum gleichbewertet werden. Für  $\rho > 0$  ist die Sparquote immer kleiner als dieser Einkommensanteil.

Eine Erhöhung des Diskontsatzes hat für die Einkommensverteilung die gleichen Folgen wie eine Senkung der Sparquote bei fehlender zeitlicher Diskontierung: für  $\alpha < \gamma$  ergibt sich eine Reduzierung des Anteils der Kapitaleinkommen am Volkseinkommen, für  $\alpha > \gamma$  eine Zunahme des relativen Anteils, m. a. W., die Wachstumsrate der Kapitalproduktion ist kleiner als der Zinssatz.

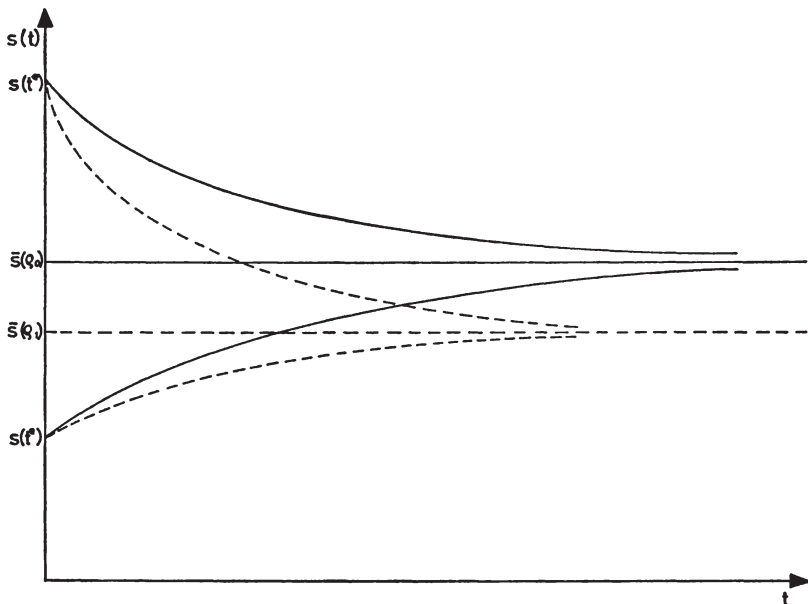


Schaubild 4



Die beiden grundsätzlichen Formen des Entwicklungspfades einer zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t^*$  gegebenen Sparneigung  $s(t^*)$  sind in Schaubild 4 dargestellt. Gemäß (2.5) und (2.6) hat ein höherer Diskontsatz *cet. par.* nicht nur eine geringere optimale Sparquote zur Folge, sondern auch die Verkürzung der Zeitdauer, die für eine vorgegebene prozentuale Anpassung der zum Zeitpunkt  $t^*$  herrschenden Sparneigung an das Optimum notwendig ist. Sind beispielsweise die Produktionselastizitäten  $\alpha = 0,3$  und  $\gamma = 0,2$ , so ist bei einem Bevölkerungswachstum von 1 v.H. und bei einem Diskontsatz von ebenfalls 1 v.H. die optimale Sparquote  $\bar{s} = 0,143$  gegenüber 0,273 ohne Diskontfaktor.

### III.

Wie wir zu zeigen versuchten, besteht auch die Wirkungsweise eines neoklassischen Zwei-Sektor-Modells darin, daß bei gegebenem technischen Fortschritt das autonome Wachstum des Arbeitspotentials die Kapitalakkumulation bestimmt, die ihrerseits bei bekannter Technologie die Wachstumsrate des Volkseinkommens, die Veränderung der Profitrate und den Grad der Mechanisierung determiniert. Langfristig ist die Vermehrung des Je-Kopf-Konsums von der Sparquote unabhängig, die Kapitalbildung paßt sich automatisch der Bevölkerungsentwicklung an.

Diese Modelle können nur Denkschemata für die Analyse säkularer Prozesse sein, indem sie die Grenzen des Möglichen aufzeigen. Ebenso wenig wie die Modelle vom Harrod-Domar-Typ können sie zur Erklärung historischer Abläufe verwendet werden, denn sie geben keine Antwort auf die Frage nach dem finanziellen Mechanismus, der die für den Anpassungsprozeß erforderliche Akkumulationsrate bewirkt. Das Keynesche Argument, daß in einer kapitalistischen Gesellschaft ein derartiger Mechanismus nicht existiere, kann zweifellos nicht einerseits für jeden Zeitpunkt zutreffen, andererseits aber bei langfristiger Betrachtung falsch sein<sup>28</sup>. J. Robinson ist daher zuzustimmen, daß das Hauptanliegen dieser Modelle nur darin zu sehen sei, „to get economic analysis off the mud of static equilibrium theory“<sup>29</sup>.

<sup>28</sup> Vgl. J. Robinson, *The Accumulation of Capital*, London 1956, S. 50 ff. — Dieselbe, *Essays in the Theory of Economic Growth*, London 1963, S. 14 ff.

<sup>29</sup> J. Robinson, *Essays in the Theory of Economic Growth*, a.a.O., S. V.





# **Zum Problem der Definition und Existenz optimaler Wachstumspfade bei unendlichem Zeithorizont<sup>1</sup>**

Von *Carl Christian von Weizsäcker*, Heidelberg

## **I. Einleitung**

Die Theorie des optimalen Wachstums ist in der letzten Zeit stark ins Kraut geschossen. Die Gründe hierfür sind vielfältig und sollen hier nicht untersucht werden. An Stelle einer historisierenden Interpretation wollen wir als Einleitung eine etwas trockene Systematik vorführen, um eine gewisse Übersichtlichkeit in dieses neue Arbeitsgebiet der theoretischen Ökonomie zu bringen. Im Hauptteil soll dann ein Themenkreis etwas detaillierter behandelt werden: die Frage der Definition und Existenz optimaler Wachstumspfade bei unendlichem Zeithorizont.

Die relativ oberflächliche Systematik, die nun vorgeführt werden soll, hat neben all den Schwächen, die sozusagen autorgebunden sind und deshalb nur von anderen formuliert werden können, die zusätzliche, daß sie den Fährnissen der Zeit besonders stark ausgesetzt ist und deshalb vermutlich binnen kurzem veraltet sein wird. Als erstes bietet sich die Unterscheidung zwischen „statischer“ und „dynamischer“ Theorie des optimalen Wachstums an. Dabei ist die dynamische begrifflich einfacher zu definieren. Es handelt sich hierbei um die Maximierung einer bestimmten Größe, die vom Zustand der Volkswirtschaft zu einem oder mehreren Zeitpunkten abhängt, wobei bestimmte Bedingungen betreffend den Anfangs- und/oder Endzustand der Volkswirtschaft gesetzt sind. Die „statische“ Theorie des optimalen Wachstums setzt keine spezifischen Bedingungen bezüglich des Anfangs- oder Endzustands der Volkswirtschaft. Die gesetzte Bedingung

---

<sup>1</sup> Diese Ausarbeitung basiert z. T. auf einem vor dem theoretischen Ausschuß des Vereins für Socialpolitik gehaltenen Referat. Seinem Vorsitzenden und seinen Mitgliedern danke ich herzlich für die Gelegenheit, diesen trockenen Stoff vor Ihnen ausbreiten gedurft zu haben. Die Anregungen, die ich durch die Diskussion erfuhr, habe ich z. T. hier verarbeitet. Ebenso danke ich den anderen 11 Mitgliedern der einmonatigen research conference in Palo Alto, die die Probleme des optimalen Wachstums behandelte. Bei den hier behandelten Themen haben mir insbesondere Gespräche mit K. Arrow, D. Gale und J. Mirrlees geholfen.

ist hier eine Gleichgewichtsbedingung: die Volkswirtschaft muß sich an einem Gleichgewichtspfad entlang bewegen. Zu suchen ist der Gleichgewichtspfad, der eine bestimmte Größe maximiert. Ich nenne dies die Statische Theorie, weil alle Relationen in der Volkswirtschaft konstant bleiben und nur die absoluten Größen im Gleichschritt wachsen. Ehe Beispiele genannt werden, soll eine weitere Unterteilung eingeführt werden. Die zweite Einteilung betrifft die Frage nach der Knappheit originärer, nicht produzierbarer Produktionsfaktoren. Es gibt Modelle, in denen angenommen wird, daß das Angebot an Arbeitskräften beschränkt und vorgegeben ist. In anderen Modellen kommen entweder originäre Faktoren als inputs nicht vor oder aber sie haben einen festen Preis, etwa in der Form eines bestimmten Warenkorbs, der pro geleisteter Arbeitseinheit aus dem Produktionssektor der Volkswirtschaft abfließt. Dann kann man diesen Warenkorb im formalen System an die Stelle der Arbeit als input einsetzen.

Mit diesen zwei Einteilungskriterien kann man eine Vierteilung der gesamten Theorie des optimalen Wachstums erreichen. Zur statischen Theorie ohne originäre Produktionsfaktoren gehört z. B. das von Neumannsche Wachstumsmodell (v. Neumann 1937) in dem die Frage gestellt wird, welches in einem Modell mit ausschließlich produzierbaren Produktionsmitteln und ohne Konsum die maximale Gleichgewichtsrate des Wachstums ist, wobei Gleichgewicht als Konstanz aller Relationen zwischen verschiedenen Gütervorräten definiert ist.

Ist das Wachstum der originären Produktionsfaktoren vorgegeben und bleibt die Produktionsstruktur konstant, so ist das Wachstum des Gesamtsystems durch die sogenannte „natürliche“ Wachstumsrate gegeben. Es ist jetzt zu fragen, auf welchem Gleichgewichtspfad das Konsumvolumen maximal ist. Dieser Frage antwortet die Theorie der Goldenen Regel. Im Bereich der dynamischen Theorie ohne originäre Produktionsfaktoren entsteht die Frage: Angenommen, es gibt einen beliebigen anfänglichen Gütervorrat in der Volkswirtschaft und es sei ein Zielvorrat an Gütern vorgeschrieben; welche Akkumulations- und Produktionspolitik führt die Volkswirtschaft in der kürzesten Zeit vom Start zum Ziel. Einige Eigenschaften eines solchen optimalen Pfads beschreibt das sogenannte „Turnpike Theorem“, das von Dorfman — Samuelson — Solow (1958) vermutet und von Radner (1960), Morishima (1960), McKenzie (1963) u. a. bewiesen worden ist. Eine gute, relativ elementare Diskussion des Turnpike Theorems geben Koopmans (1964) und Scherf (1965). In gewisser Weise kann man das Turnpike Theorem als ein dynamisches Analogon zum Substitutionstheorem in der statischen Input-Output-Analyse ansehen. Aber wir wollen hier nicht weiter auf dieses sehr interessante, jedoch schwierige und umfangreiche Gebiet eingehen.

Viertens gibt es die dynamische Theorie des optimalen Wachstums bei knappem Arbeitsangebot. Sie nimmt ihren Ausgang von Ramseys Arbeit aus dem Jahre 1928 und wird unser eigentliches Thema sein. In einem Schema könnte man das bisher gesagte folgendermaßen darstellen:

|                    | ohne knappes Arb.angeb. | knappes Arb.angeb. |
|--------------------|-------------------------|--------------------|
| statische Theorie  | v. Neumannsches Modell  | Goldene Regel      |
| dynamische Theorie | Turnpike Theorem        | Ramsey Modell      |

Nun ergibt sich, daß kein solches Einteilungsprinzip völlig scharf ist. So gibt es zum Beispiel neuerdings sehr interessante Ansätze zu einer Theorie des optimalen Wachstums bei anfänglicher Unterbeschäftigung der Arbeitskräfte wegen Mangels an Kapital. Hier geht der Beschäftigungsgrad mit in die zu maximierende Zielfunktion ein und das zeitliche Endziel ist der Übergang zu einer vollbeschäftigten Volkswirtschaft. Ein solches Modell, wie es vor kurzem Stoleru (1965) sehr elegant präsentiert hat, kann nicht völlig zu den Modellen mit knappem Arbeitsangebot aber auch nicht völlig zu denen mit beliebigem Arbeitsangebot gerechnet werden<sup>2</sup>.

Ein weiteres Paar von Einteilungsprinzipien betrifft die dem Modell zugrundeliegenden Annahmen über die Produktionstechnologie. Man kann die Modelle nach der Zahl der Sektoren unterscheiden, die angenommen werden. Es gibt Modelle mit nur einem produzierbaren Gut, das sowohl als Investitions- als auch als Konsumgut verwendet werden kann. Dann gibt es Zweissektorenmodelle, deren einer Sektor Konsumgüter und deren anderer Investitionsgüter produziert. Hierher gehören z. B. Uzawas (1964) und Stolerus (1965) Arbeiten. Und schließlich gibt es Multissektorenmodelle, zu denen wir das v. Neumannsche zählen können, obwohl dort eine Unterscheidung nach Sektoren gar nicht explizit vorgenommen wird, sondern nur eine solche nach Produktionsprozessen und Gütern. Ferner entsteht die Frage nach der Existenz technischen Fortschritts. Kein technischer Fortschritt existiert z. B. im Neumann-Modell, im Modell des Turnpike Theorems und im ursprünglichen Ramsey-Modell. Harrod-neutraler technischer Fortschritt ist in der bekannten Form des Modells der Goldenen Regel zugelassen. Neuerdings greift die Unterscheidung zwischen investitionsunabhängigem (disembodied) und investitionsabhängigem (embodied) technischem Fortschritt auch auf die Fragen des optimalen Wachstums

<sup>2</sup> Einen Versuch der Verknüpfung der Goldenen Regel mit der Ramsey-Theorie macht Vosgerau (1965), S. 99 ff.

über. Die Bestimmung optimaler Wachstumspfade in Modellen mit investitionsabhängigem technischem Fortschritt wird von einigen jüngeren Ökonomen in Cambridge (England) in Angriff genommen. Diese Ansätze, kompliziertere Formen des technischen Fortschritts in die Theorie des optimalen Wachstums einzubauen, sind noch nicht so weit ausgereift, um hier besprochen werden zu können.

Eine weitere Unterscheidung bahnt sich an. Während die Modelle bisher deterministischen Charakter trugen, hat insbesondere Mirrlees (1965 a) die Annahme eingeführt, die Produktion der Zukunft sei eine von den inputs beeinflussbare Zufallsvariable, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung man kennt. Dies führt zu interessanten neuen Aspekten der optimalen Akkumulation. Schließlich ergibt sich eine Unterscheidung bezüglich der Fragestellung. Man kann bei einem vorgegebenem Modell die Frage nach der konkreten Struktur eines optimalen Pfads stellen; oft aber muß man gleichzeitig damit oder gar schon vorher die Frage aufwerfen, ob ein optimales Programm überhaupt existiert. Über das Existenzproblem wird nun ausführlicher gesprochen werden. Martin Beckmann machte mich darauf aufmerksam, daß schließlich auch noch zwischen richtigen und falschen Theorien unterschieden werden könne.

## II. Definition der Optimalität

Das klassische Problem des optimalen Wachstums ist das Problem der Auslese eines Konsumprogramms aus einer Menge  $C$  möglicher Konsumprogramme. Über  $C$  wird ein Präferenzfeld errichtet, das einer partiellen oder totalen Präordnung über  $C$  entspricht (zur Definition einer Präordnung siehe z. B. Debreu, *Theory of Value*, New York — London, 2. Aufl. 1962, S. 7—9). Ein optimales Element  $\{c_i\}$  von  $C$  ist ein Element, welchem 1. kein anderes vorgezogen wird und welches 2. mit jedem Element von  $C$  bezüglich der Präferenzstruktur vergleichbar ist. Ein maximales Element von  $C$  ist eines, welchem kein anderes vorgezogen wird. Ein optimales Element ist also immer maximal. Das umgekehrte ist nicht notwendigerweise richtig. Sind alle Elemente von  $C$  miteinander vergleichbar, so ist natürlich ein maximales Element auch optimal. Auf dieser Stufe der Allgemeinheit können indessen nicht sehr viel mehr Aussagen gemacht werden.

Wir nehmen hier an, daß die Zeit in gleich große Intervalle (z. B. Tage) eingeteilt ist, und daß ein Konsumprogramm definiert ist als eine Folge von Konsumbündeln  $c_1, c_2, \dots$  die z. Z. 1, 2, ... *ect.* zur Verfügung stehen. Im allgemeinen wurde bisher in der Theorie des optimalen Wachstums davon ausgegangen, daß eine stetige Nutzenfunktion  $u(c, t)$  existiert, die einen Wertmaßstab des Konsumgüter-

vektors bezeichnet in Abhängigkeit von der Periode  $t$ , in der er zur Verfügung steht.

Erstrecken sich die zu betrachtenden Konsumprogramme auf eine endliche Zahl ( $m$ ) von Perioden, so ist es sinnvoll, ein Konsumprogramm dann als optimal zu bezeichnen, wenn es die Nutzensumme

$$v\{c(t)\} = \sum_{t=1}^m u(c_t, t)$$

maximiert. Wenn  $u(c, t)$  stetig mit  $c$  variiert, dann gilt das gleiche für  $v\{c(t)\}$ , sofern wir ein Programm  $\{c(t)\}$  als Punkt im  $m \times n$ -dimensionalen euklidischen Raum auffassen, wo  $n$  die Dimension des einzelnen Konsumvektors  $c_t$  darstellt. Ist nun die Menge der möglichen Konsumprogramme,  $C$ , eine kompakte (d.h. abgeschlossene und beschränkte) Teilmenge des  $R^{n \cdot m}$ , so ist die Existenz eines optimalen Programms gesichert; denn nach einem Satz von Weierstrass besitzt eine stetige Abbildung einer kompakten Menge (hier  $C$ ) auf die Zahlengerade ein Maximum. Die Kompaktheit von  $C$  läßt sich nun leicht herleiten aus den üblicherweise angenommenen Stetigkeitseigenschaften der Produktivitätsbeziehungen (z.B. Produktionsfunktionen).

Sehr viel schwieriger wird das Problem bei unendlichen Konsumprogrammen. Im allgemeinen besitzt der Ausdruck

$$\sum_{t=1}^T u(c_t, t) \quad \text{keinen Grenzwert,}$$

wenn  $T$  gegen  $\infty$  strebt. Für  $T = \infty$  ist daher meist  $v\{c(t)\}$  gar nicht definiert. So entstehen schon bei der Definition der Optimalität Schwierigkeiten, ganz zu schweigen von der Frage der Existenz optimaler Programme.

Wenn wir nun die Frage des Vergleichs von unendlichen Konsumprogrammen diskutieren, interessieren uns nur die Nutzenwerte des Konsums und nicht dieser selber. Wir werden deshalb von Nutzenprogrammen sprechen und die Menge der Konsumprogramme  $C$  in eine Menge der Nutzenprogramme  $U$  derart überführen, daß das Nutzenprogramm  $u_1, u_2, \dots$  genau dann in  $U$  enthalten ist, wenn es in  $C$  ein Programm  $c_1, c_2, \dots$  gibt derart, daß für  $t = 1, 2, \dots$  gilt

$$u(c_t, t) = u_t.$$

Vergleicht man zwei Nutzenprogramme  $u = u_1, u_2, \dots$  und  $v = v_1, v_2, \dots$ , so wird man  $u$  dem  $v$  sicher vorziehen, wenn  $u_t \geq v_t$  für alle  $t$  und  $u_t > v_t$  für einige  $t$  gilt. Ist aber für einige  $t$   $u_t > v_t$  und für andere  $u_t < v_t$ , so wird der Vergleich schwieriger. Mit  $M$  wollen wir die Menge der  $t$  bezeichnen, für die gilt  $u_t \geq v_t$ , es sei  $N$  die Menge

der  $t$  mit  $v_t \geq u_t$ , es sei  $M^+$  die Menge der  $t$  mit  $u_t > v_t$  und  $N^+$  die Menge der  $t$  mit  $v_t > u_t$ . Dann sind die natürlichen Zahlen  $Z$  gleich  $N^+UM$  oder  $M^+UN$ . Sicherlich ist  $\Sigma(u_t - v_t)$ , ( $t \in M^+$ ,  $t \leq T$ ) eine mit  $T$  nicht abnehmende Folge von Zahlen. Also existiert ein endlicher oder unendlicher Grenzwert für wachsende  $T$ , den wir mit  $S(M^+)$  bezeichnen. Entsprechend existiert

$$\begin{aligned} S(N^+) &= \lim \Sigma(u_t - v_t) \\ T &\rightarrow \infty \quad t \in N^+ \\ t &\leq T \end{aligned}$$

Außerdem gilt  $S(M) = S(M^+)$  und  $S(N) = S(N^+)$ . Ist nun entweder  $S(M^+)$  oder  $S(N^+)$  endlich, so ist die Summe  $S(M^+) + S(N^+) = S(M) + S(N)$  eindeutig definiert (obwohl sie möglicherweise unendlich ist). Wenn nun  $S(M) + S(N)$  größer als Null ist, können wir  $u$  dem  $v$  vorziehen, und wenn  $S(M) + S(N)$  negativ ist, können wir  $v$  dem  $u$  vorziehen. Soweit ist die Konstruktion eines Präferenzsystems unproblematisch. Auch noch unproblematisch ist es,  $u$  und  $v$  gleich hoch einzuschätzen, sofern  $S(N^+) = -S(M^+)$  ist und sowohl  $N^+$  als auch  $M^+$  endliche Mengen sind.

Alle anderen Fälle können nur mit zusätzlichen Werturteilen eindeutig entschieden werden. Die strengste Definition der Vergleichbarkeit von Nutzenprogrammen, die ohne Werturteile auskommt, kann auch folgendermaßen formuliert werden:

#### Def. 1

Es seien  $u$  und  $v$  zwei Nutzenprogramme. Es sei  $t_1, t_2, \dots$  eine unendliche Folge natürlicher Zahlen derart, daß jede natürliche Zahl genau einmal in der Folge enthalten ist. Eine solche Folge nennen wir perfekt. Wenn zu jeder perfekten Folge ein  $n_0$  existiert, so daß für  $n > n_0$  gilt

$$\sum_{i=1}^n (u_{t_i} - v_{t_i}) > 0$$

und wenn

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \sup_{n \geq n_1} \sum_{i=1}^n (u_{t_i} - v_{t_i}) > 0$$

ist, dann wird  $u$  dem  $v$  vorgezogen.

Die zuerst beschriebene Definition läßt sich kurz so formulieren.

#### Def. 2

Ist  $S(N^+)$  endlich und ist  $S(M) + S(N^+) > 0$ , so wird  $u$  dem  $v$  vorgezogen.



Ist  $\sum_{t=1}^T u_t - v_t$  absolut konvergent, so folgt aus der Überlegenheit des  $u$  gemäß Definition 2 die Überlegenheit gemäß Definition 1. Ist  $\sum_{t=1}^T u_t - v_t$  nicht absolut konvergent und wird  $u$  dem  $v$  nach Def. 2 vorgezogen, so gibt es eine Folge  $u'$ , so daß  $u'_t \leq u_t$  und  $\sum_{t=1}^T u'_t - v_t$  absolut konvergent ist und gegen einen positiven Limes konvergiert. Also ist Definition 1 durch Definition 2 impliziert.

Es sei umgekehrt  $u$  dem  $v$  nach Definition 1 vorgezogen. Wäre nun  $S(N^+) = -\infty$ , so ließe sich folgende perfekte Folge konstruieren: Wir bilden eine perfekte Folge  $r_1, r_2, \dots$  der Elemente aus  $M$  und eine perfekte Folge  $s_1, s_2, \dots$  der Elemente aus  $N^+$ . Es sei nun die perfekte Folge  $t_1, t_2, \dots$  definiert durch:

$$\begin{aligned} t_1 &= r_1; \quad t_2 = s_1; \quad t_3 = s_2, \quad \text{wenn} \\ u_{t_1} - v_{t_1} + u_{t_2} - v_{t_2} &\geq 0; \quad t_3 = r_2, \quad \text{wenn} \\ u_{t_1} - v_{t_1} + u_{t_2} - v_{t_2} &< 0. \quad \text{Allgemein} \\ t_n &= \text{das nächste Element von } N^+, \text{ wenn} \\ \sum_{i=1}^{n-1} u_{t_i} - v_{t_i} &\geq 0 \quad \text{und} \\ t_n &= \text{das nächste Element von } M, \text{ wenn} \\ \sum_{i=1}^{n-1} u_{t_i} - v_{t_i} &< 0. \end{aligned}$$

Da  $S(N^+) = -\infty$  ist, erschöpft sich der Vorrat an Elementen aus  $N^+$  nie. Es gibt dann zu jedem  $T_0$  ein  $T > T_0$  mit

$$\sum_{i=1}^T u_{t_i} - v_{t_i} < 0.$$

Da  $S(N^+) = -\infty$  muß  $S(M) = +\infty$  sein sonst wäre  $v$  dem  $u$  nach Definition 2 und mithin nach Definition 1 vorgezogen, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Wenn sowohl  $S(N^+)$  als auch  $S(M)$  unendlich sind, gibt es nach der Konstruktion der Folge zu jedem  $T$  ein  $t_i > T$  mit  $t_i \in M$  und ein  $t_j > t$  mit  $t_j \in N^+$ . Also werden  $M$  und  $N^+$  voll ausgeschöpft. Mithin ist die so konstruierte Folge perfekt. Bei dieser Folge gibt es aber kein  $T$  mit

$$\sum_{i=1}^n u_{t_i} - v_{t_i} > 0 \quad \text{für} \quad n \geq T$$



also ist  $u$  dem  $v$  nach Def. 1 nicht vorgezogen, was der Voraussetzung widerspricht. Folglich ist  $S(N^+)$  endlich. Daher gilt für jede perfekte Folge

$$0 < \lim_{n_0 \rightarrow \infty} \inf_{n \geq n_0} \sum_{i=1}^n u_{t_i} - v_{t_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n u_{t_i} - v_{t_i} = S(M) + S(N^+).$$

Also wird  $u$  dem  $v$  nach Definition 2 vorgezogen. Def. 1 und Def. 2 sind somit äquivalent.

Entsprechende Definitionen können für die Indifferenz erstellt werden. Im Sinne dieser strengen Definition kann aber nur von Indifferenz gesprochen werden, wenn  $v_t \neq u_t$  nur für eine endliche Anzahl von  $t$  gilt und

$$\sum_{t \in M^+} u_t - v_t + \sum_{t \in N^+} u_t - v_t = 0 \quad \text{ist.}$$

Diese strengen Definitionen haben den Nachteil, daß die Vergleichbarkeit von Programmen stark eingeschränkt ist. Es wird dann sehr schwer sein, ein optimales Programm zu finden. Allerdings gibt es Fälle, in denen auch mittels dieser strengen Definition ein optimales Programm gefunden werden kann. Dies ist insbesondere oft dann möglich, wenn eine Folge  $b_1, b_2, \dots$  existiert mit  $u_t \leq b_t$  für jedes  $t$  und jedes Programm  $u = u_1, u_2, \dots$  in  $U$  und ein  $u$  in  $U$  existiert mit

$$\sum_{t=1}^{\infty} u_t - b_t > -\infty.$$

Um die Möglichkeiten zu vergrößern, ein optimales Programm zu finden, kann man die Kriterien der Vergleichbarkeit weniger streng fassen. An die Stelle der Definition 1 kann man die ähnlich klingende Definition 3 setzen:

**Def. 3**

Existiert zu zwei Programmen  $u$  und  $v$  ein  $T_0$  derart, daß für  $T \geq T_0$

$$\sum_{t=1}^T u_t - v_t > 0 \quad \text{ist,}$$

dann wird  $u$  dem  $v$  vorgezogen.

D. h. unter allen möglichen perfekten Folgen wird eine, die natürliche Zahlenfolge, bevorzugt behandelt. Das Vergleichskriterium bezieht sich nur auf die natürliche Folge. Dies ist deshalb unbefriedigend, weil darin ein gewisses Element von Zeitpräferenz versteckt ist, das zu einer eventuell in der Nutzenfunktion  $u(c, t)$  implizierten Zeitpräferenz noch dazu kommt<sup>3</sup>. Ein Beispiel möge dies illustrieren. Es sei

<sup>3</sup> Den Hinweis auf dieses Element der Zeitpräferenz verdanke ich K. Arrow.

$$u_1 - v_1 = 1, u_2 - v_2 = 1, u_3 - v_3 = -1$$

und für  $t > 3$

$$u_t - v_t = \begin{cases} 1, & \text{wenn } t \text{ gerade} \\ -1, & \text{wenn } t \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Mengen  $M^+$  und  $N^+$  sind gleich mächtig, es gibt also gleich viele Perioden mit positiven wie mit negativen  $u_t - v_t$ . Da zudem  $|u_t - v_t| = 1$  für alle  $t$  gilt, ist nicht unmittelbar einzusehen, weshalb bei einer gleichberechtigten Behandlung aller Perioden  $u$  dem  $v$  vorgezogen werden sollte. Nach Definition 3 wird  $u$  aber  $v$  vorgezogen, denn es ist

$$\sum_{t=1}^T u_t - v_t \geq 1 \quad \text{für alle } T.$$

Indessen scheint diese Definition unserer Intuition doch entgegenzukommen, da unser Vorstellungsvermögen in eine unendliche Anzahl von Gegenständen am besten Ordnung bringt, wenn ihnen eine natürliche Anordnung zugrunde liegt. Jedenfalls wird dieses Vergleichskriterium heute häufig verwendet und hat von Gale den suggestiven Namen „overtaking criterion“ erhalten. Er wurde in ähnlicher Form z. B. vom Verfasser in die Literatur eingeführt (Weizsäcker [1965]). Dasgupta hat demgegenüber vorgeschlagen, die Entwicklung des Quotienten

$$\frac{\sum_{t=1}^T u_t}{\sum_{t=1}^T v_t}$$

für große  $T$  als Kriterium für die relative Bewertung von  $u$  und  $v$  zu nehmen (Dasgupta [1964]). Dies erscheint unzweckmäßig, da dem Nutzen und damit auch einer Nutzensumme keine andere als eine ordinale Bedeutung zukommt. Ein Bewertungskriterium sollte deshalb invariant gegen eine lineare Transformation der Nutzenfunktion sein. Dies ist bei Dasgupta nicht der Fall: Es sei z. B.  $u_t > v_t$  für alle  $t$ . Sind nun  $u_t$  und  $v_t$  positiv und nach oben durch  $b$  beschränkt, so ist der oben genannte Quotient größer als eins, also wird  $u$  vorgezogen. Ziehen wir von der Nutzenfunktion eine Zahl  $a > b$  ab, so sollte sich das Präferenzsystem nicht ändern. Der Quotient wird aber jetzt für jedes  $T$  kleiner als eins, also würde nach Dasguptas Kriterium  $v$  vorgezogen. Aus diesem Grunde sollte sein Kriterium nicht verwendet werden.

Aber auch das dritte Bewertungskriterium reicht nicht aus, um die Existenz optimaler Programme zu garantieren. Einfache Beispiele für die Nichtexistenz finden sich bei Koopmans (1963) und Weizsäcker (1965). Ein weiteres Kriterium beginnt deshalb neuerdings Verwendung zu finden. Wenn in  $U$  ein Programm  $u$  existiert, so daß für kein  $v$

in  $U$  gilt,  $v$  werde  $u$  nach Definition 3 vorgezogen, dann nennen wir  $u$  maximal. Oft kann man nun die Existenz maximaler Programme beweisen, wo der Nachweis optimaler Programme schwierig ist. Gibt es nur ein maximales Programm, so kann man dieses vielleicht quasi-optimal nennen. Sowohl McFadden (1965 a) wie Mirrlees (1965 b) haben in bestimmten Modellen quasioptimale Programme hergeleitet, wo die Frage nach der Existenz optimaler Programme ungeklärt ist. In Weizsäcker (1965) wurde die Vermutung geäußert, daß unter relativ allgemeinen Bedingungen aus der Existenz eines maximalen die Existenz eines optimalen Programms folgt. Bisher fehlt ein entsprechendes Theorem. Ein Gegenbeispiel zu dieser Vermutung fehlt bisher allerdings auch.

### III. Ein Existenzsatz für optimale Programme

In diesem Abschnitt sollen einige Bedingungen für die Existenz optimaler Programme bei einem unendlichen Zeithorizont geschildert werden. Zuerst soll ein Beispiel gegeben werden, bei dem ein optimales Programm nach Definition 1 oder 2 nicht existiert, wohl aber nach Definition 3. Es handelt sich um die diskrete Version des Modells mit einem Zeitkontinuum, für das unabhängig voneinander Koopmans (1963) und der Verfasser die Existenz eines optimalen Programms mittels der inzwischen auch von Gale (1965) angewandten Turnpike-Methode für die Definition 3 bewiesen haben<sup>4</sup>. Wir verzichten auf eine Übertragung dieses Beweises auf das Modell diskreter Perioden. Wir wollen aber zeigen, daß kein optimales Programm entsprechend der Definition 1 oder 2 existiert. Es sei eine Volkswirtschaft gegeben mit einer konstanten Technologie, ausgedrückt durch eine linearhomogene Produktionsfunktion

$$L \cdot f(x), \quad x \geq 0$$

wo  $L$  die Arbeit und  $x$  die Kapitalintensität bezeichnet. Die Bevölkerung wachse mit der positiven Rate  $g$ .  $f(x)$  sei stetig, mit  $x$  zunehmend und strikt konkav. Für hinreichend kleine positive  $x$  sei  $f(x) > gx$  und für hinreichend große  $x$  sei  $f(x) < gx$ . Nun existiert eine Nutzenfunktion  $u(c)$ , die vom Konsum pro Kopf alleine abhängt.  $u(c)$  sei für positive  $c$  definiert, stetig, mit  $c$  ansteigend und konkav. Zwischen  $c$  und  $x$  herrschen folgende Beziehungen:

$$x_{t+1} = \frac{f(x_t) - c_t + x_t}{1 + g}$$

<sup>4</sup> Der Beweis des Verfassers (1962) wurde nicht publiziert. Er ist dankenswerterweise von Samuelson (1965) zitiert worden. Atsumi (1965) hat diese diskrete Version als Zweisektormodell diskutiert und unabhängig von den genannten Autoren ähnliche Methoden verwendet.

wo der Index die Periode bezeichnet. Betrachten wir nun den Spezialfall, daß  $x_0$  gerade so groß ist, daß es den Ausdruck  $f(x) - gx$  maximiert. Es existiert aufgrund der Voraussetzungen über  $f(x)$  genau ein Maximum dieses Ausdrucks. Die Eindeutigkeit rührt von der Striktkonkavität her. In diesem Fall wäre die einzige optimale Politik gemäß Definition 3, den Wert  $x_t$  konstant gleich  $x_0$  zu halten und entsprechend  $c_t = c_0 = f(x_0) - gx_0$  zu setzen. Wenn wir nun einen anderen Pfad finden können, so daß das konstante Nutzenprogramm  $u(c_0)$  diesem anderen Pfad gemäß Definition 1 nicht vorgezogen wird, haben wir die Nichtexistenz eines optimalen Pfades bewiesen. Denn selbstverständlich kann kein anderer Pfad optimal sein, da er nicht einmal nach Definition 3 optimal ist.

Wir konstruieren nun folgenden Pfad. Es werde ein Wert  $a > 0$  derart gesucht, daß  $f(x_0 - a) + x_0 - a > (1 + g)x_0$  ist. Ein solcher Wert existiert, da  $f$  stetig ist und für  $a = 0$  die Ungleichung gilt. Nun setzen wir für ein alternatives Programm  $x'$  bzw.  $c'$  folgende Werte ein:  $x'_0 = x_0$ ,  $x'_1 = x_0 - a$ ,  $x'_2 = x_0$  usw.  $x'_{2n-1} = x_0 - a$ ,  $x'_{2n} = x_0$ . Entsprechend gilt dann  $c'_{2n} = f(x_0) + x_0 - (1 + g)(x_0 - a) > c_{2n}$  und  $c'_{2n-1} = f(x_0 - a) + x_0 - a - (1 + g)x_0 > 0$ . Das Nutzenprogramm alterniert zwischen zwei Werten  $u_1$  und  $u_2$  derart, daß  $u_1 < u(c_0) < u_2$  gilt. Nun finden wir folgende perfekte Folge von Perioden. Es sei  $m$  die kleinste ganze Zahl, so daß gilt  $mu_2 + u_1 > (m + 1)u(c_0)$ . Eine solche Zahl existiert. Dann setzen wir  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 2$ ,  $t_2 = 4$  usw. bis  $t_m = 2m$ ,  $t_{m+1} = 1$ ,  $t_{m+2} = 2m + 2$ , ...,  $t_{2m+1} = 4m$ ,  $t_{2m+2} = 3$ , usw. Man ersieht leicht, daß diese Folge perfekt ist und für jedes  $T$  gilt

$$\sum_{t=0}^T u(c'_t) > (T + 1) u(c_0)$$

und daher kann gemäß Definition 1 das konstante Programm  $u(c_0)$  nicht optimal sein.

Es soll nun anhand eines  $n$ -Gütermodells ein Existenzsatz für Definition 3 bewiesen werden. Mit  $n$ -Gütermodellen im Rahmen der Theorie des optimalen Wachstums haben sich insbesondere Gale (1965) und Mc Fadden (1965 a, b) abgegeben.

Das hier zugrundeliegende Modell ist dem von ihnen benutzten in einigen Grundzügen ähnlich, das Existenztheorem ist andersartig.

Die technologischen Möglichkeiten der Volkswirtschaft mit  $n$  unterscheidbaren Gütern werden dargestellt als Menge  $T$  im  $2n$ -dimensionalen Raum. Die ersten  $n$  Komponenten eines Vektors im  $2n$ -dimensionalen Raum stellen Gütereinputs dar, die zweiten  $n$ -Komponenten beziehen sich auf die Outputs. Ein Vektor  $(x, y)$  (wo  $x$  und  $y$   $n$ -dimensional sind) befindet sich nun genau dann in  $T$ , wenn es möglich ist,

mittels des Inputvektors  $x$  den Outputvektor  $y$  herzustellen. Da wir im allgemeinen Fall nicht Konstanz der Technologie voraussetzen, ändert sich die Menge  $T$  mit  $t$ , also müssen wir schreiben  $T_t$ . Wenn z. B. technischer Fortschritt herrscht ist  $T_t$  in  $T_{t+1}$  enthalten.

Über  $T_t$  werden nun im allgemeinen die folgenden Grundannahmen gemacht:

- $T(i)$   $T_t$  ist abgeschlossen, konvex und eine Teilmenge des nichtnegativen Orthanten.
- $T(ii)$  Ist  $(x, y) \in T_t$  und ist  $x' \geq x, y' \leq y$ , dann ist auch  $(x', y') \in T_t$  sofern  $y'$  nicht negativ ist.
- $T(iii)$  Es gibt  $x$ , so daß für ein  $y > 0$  gilt  $(x, y) \in T_t$ . Wir benutzen hier die übliche Schreibweise beim Vergleich von Vektoren:  $x \geq y$  heißt: jede Komponente von  $x$  ist nicht kleiner als die ihr entsprechende Komponente von  $y$ ;  $x \geq y$  heißt:  $x \geq y$  und  $x \neq y$ .  $x > y$  heißt: jede Komponente von  $x$  ist größer als die ihr entsprechende Komponente von  $y$ .

Als mögliches Programm  $y_0, x_1, y_1, \dots$  bezeichnen wir eine Folge derart, daß gilt

$$(x_t, y_t) \in T_t \quad \text{und} \quad c_t = y_{t-1} - x_t \geq 0$$

Der Annahme  $T(i)$  entsprechen bei den üblichen Produktionsfunktionen, die einen Spezialfall der hier beschriebenen Technologie darstellen, das Gesetz der abnehmenden (bzw. nicht zunehmenden) Grenzrate der Substitution zwischen Faktoren, nicht zunehmende Skalenerträge und die Stetigkeit der Funktion.

Die Annahme  $T(ii)$  ist bekannt unter dem Namen „free disposal“. Man kann ohne Kosten sowohl auf der Inputseite wie auf der Outputseite etwas wegwerfen.  $T(iii)$  sagt nur, daß jedes Gut produziert werden kann. Dies ist eine reine Konvention, solange man annimmt, daß die Güter in zwei Kategorien zerfallen: in solche, die produzierbar und in solche, die autonom vorgegeben und nicht produzierbar sind. Die zeitliche Entwicklung der letzteren findet dann ihren Ausdruck in der Abhängigkeit der Menge  $T$  von der Zeit, während die  $n$  explizit definierten Güter alles produzierbare Güter sind.

Nun sei eine stetige, konkave Nutzenfunktion über den nichtnegativen  $n$ -dimensionalen Konsumvektoren  $c$  definiert. Auch sie sei zeitabhängig, also:  $u(c, t)$ . Ausgehend von einem vorgegebenen Wert  $\bar{y}_0$  wird ein optimales Programm gesucht. Verglichen werden nur solche Programme, die ihren Anfang bei  $\bar{y}_0$  nehmen. Es sei nun ein Programm  $\bar{y}_0, x_1, y_1, x_2, \dots$  mit folgenden Eigenschaften gegeben.

- (1) Es gibt für jedes  $t$  einen nichtnegativen Vektor  $p_t \neq 0$ , so daß gilt

$$p_{t+1} y_t^* - p_t x_t^* \geq p_{t+1} y - p_t x \text{ für}$$

alle  $(x, y) \in T_t$

$$u(c_t^*) - u(c) \geq p_t(c_t^* - c) \text{ für}$$

alle nichtnegativen  $c$

(Ein Programm mit dieser Eigenschaft nennt Gale „competitive“)

- (2)  $p_t x_t^* \leq M$  für alle  $t$  und ein endliches  $M$

- (3) Es existiert eine Funktion  $a(m)$  mit  $a(m) < 1$  für  $0 \leq m < 1$ , so daß aus  $p_t x \leq m p_t x_t^*$  und  $(x, y) \in T_t$  folgt  $p_{t+1} y - p_t x \leq a(m) (p_{t+1} y_t^* - p_t x_t^*)$

- (4) Es gibt ein  $\varepsilon > 0$ , so daß

$$\frac{p_{t+1} y_t^* - p_t x_t^*}{p_t x_t^*} \geq \varepsilon$$

**Theorem:** Unter den Bedingungen (1) bis (4) ist das Programm  $\bar{y}_0, \bar{x}_1^*, \bar{y}_1^*, \bar{x}_2^*, \dots$  optimal.

Ehe wir den Beweis liefern, sei die intuitive Bedeutung der Bedingungen diskutiert. Wenn  $u(c)$  differenzierbar ist, so ist der Preisvektor  $p_t$  natürlich gleich dem Grenznutzenvektor an der Stelle  $c_t^*$ . Der Ausdruck  $p_{t+1} y - p_t x$  ist also der in Grenznutzeinheiten gemessene Wert des Nettoprodukts. Dieser Wert wird an der Stelle  $\bar{x}_t^*, \bar{y}_{t+1}^*$  maximiert. Es ist zu beachten, daß das hier so genannte Nettoprodukt nicht dem üblichen Nettosozialprodukt entspricht. Vielmehr muß von diesem noch die Entlohnung des Kapitals abgezogen werden; denn in den Preisveränderungen von  $p_t$  nach  $p_{t+1}$  ist ein Diskontfaktor impliziert; im üblichen Modell einer makroökonomischen Produktionsfunktion entspricht dem hier so genannten Nettoprodukt der Ausdruck  $f(x) - x f'(x^*)$  wo  $x$  den Kapitalstock bezeichnet. Wir könnten also auch von der Lohnsumme sprechen. So motiviert sich auch die Galesche Bezeichnung „competitive“. Denn bekanntlich zeichnet sich ein totales Marktgleichgewicht dadurch aus, daß bei Konstanthaltung der Gleichgewichtspreise und einiger Faktoren und Variation der anderen Faktoren das Einkommen der konstantgehaltenen Faktoren am Punkt des Marktgleichgewichts maximiert wird. Aus den Optimalitätseigenschaften eines Marktgleichgewichts, wie es durch (1) definiert wird, folgt, daß (1) eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß das Programm  $\bar{y}_0, \bar{x}_1^*, \bar{y}_1^*, \dots, \bar{x}_T^*$  optimal ist für das endliche Programmierungsproblem mit Anfangsbedingung  $\bar{y}_0$  und Endbedingung  $\bar{x}_T^*$ . Umgekehrt: zu jedem (endlichen) optimalen Programm existieren Vektoren  $p_1, p_2, \dots, p_T$ , so daß es die Bedingung (1) erfüllt.

Bedingung (2) bedeutet, daß der diskontierte Wert des Kapitalstocks nicht über alle Grenzen wachsen darf. Die Akkumulationsrate darf den Zinssatz nicht dauernd erheblich übersteigen.

Bedingung (3) ist eine Verschärfung der Konvexitätsbedingung an  $T_t$ . Bei strikter Konvexität gibt es natürlich für jedes  $T_t$  eine solche Funktion  $a(m)$ . Die Bedingung (3) fordert aber zusätzlich, daß es eine Funktion  $a(m)$  gibt, die für alle  $T_t$  anwendbar ist. Sie stellt daher (in Anlehnung an den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit) eine Bedingung der „gleichmäßigen strikten Konvexität“ der Folge  $T_1, T_2, \dots$  dar.

Bedingung (4) sagt, daß der Quotient aus Lohnsumme und Kapitalstock nach unten von einer positiven Zahl beschränkt ist, eine Bedingung, die z. B. bei steigender Bevölkerung oder technischem Fortschritt immer erfüllt ist.

*Beweis des Theorems:* Wir bezeichnen mit  $\phi_t(x, y)$  den Ausdruck  $p_{t+1}y - p_t x$ . Für jedes mögliche Programm mit Anfangsbedingung  $\bar{y}_0$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T u(c, t) - (c^*, t) &\leq \sum_{t=1}^T p_t(c_t - c_t^*) = \\ &= \sum_{t=1}^T p_t(y_{t-1} - x_t) - \sum_{t=1}^T p_t(y_{t-1}^* - x_t^*) = \\ &= \sum_{t=1}^{T-1} p_{t+1}y_t - p_t x_t - \sum_{t=1}^{T-1} p_{t+1}y_t^* - p_t x_t^* + \\ &\quad + p_1(\bar{y}_0 - \bar{y}_0) + p_T(x_T^* - x_T) = \\ &= \sum_{t=1}^{T-1} \phi_t(x_t, y_t) - \phi_t(x_t^*, y_t^*) + p_T(x_T^* - x_T) \leq p_T(x_T^* - x_T). \end{aligned}$$

Angenommen es gibt ein anderes Programm  $c$  und ein  $T_0$  mit

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{T_0} u(c, t) - u(c^*, t) &= \alpha > 0 \quad \text{und somit} \\ p_{T_0} x_{T_0} &\leq p_{T_0} x_{T_0}^* - \alpha \leq p_{T_0} x_{T_0}^* \left(1 - \frac{\alpha}{M}\right), \quad \text{also} \\ \phi_{T_0}(x_{T_0}, y_{T_0}) &\leq \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{M}\right) \phi_{T_0}(x_{T_0}^*, y_{T_0}^*). \end{aligned}$$

Da  $\phi_{T_0}(x_{T_0}^*, y_{T_0}^*)$  positiv ist, ist

$$\phi_{T_0}(x_{T_0}^*, y_{T_0}^*) - \phi_T(x_{T_0}, y_{T_0}) = \beta > 0.$$



Somit gilt für jedes  $T \geq T_o$  mit  $\sum_{t=1}^T u(c, t) - u(c^*, t) \geq 0$ , daß

$$p_T x_T \leq p_T x_T^* - \beta \leq p_T x_T^* \left(1 - \frac{\beta}{M}\right)$$

Hieraus folgt

$$\phi_T(x_T, y_T) \leq a \left(1 - \frac{\beta}{M}\right) \phi_T(x_T^*, y_T^*)$$

Wenn wir mit  $A$  die Menge der  $T$  bezeichnen, für die

$$\sum_{t=1}^T u(c, t) - u(c^*, t) \geq 0$$

gilt, so folgt aus (4)

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{T_1} u(c, t) - u(c^*, t) &\leq p_{T_1} (x_{T_1}^* - x_{T_1}) \\ &- \sum_{\substack{t \in A \\ T_o \leq t \leq T_1}} \left(1 - a \left(1 - \frac{\beta}{M}\right)\right) \phi_t(x_t^*, y_t^*) \leq \\ p_{T_1} (x_{T_1}^* - x_{T_1}) &- \sum_{\substack{t \in A \\ T_o \leq t \leq T_1}} \left(1 - a \left(1 - \frac{\beta}{M}\right)\right) \varepsilon p_t x_t^* \leq \\ p_{T_1} (x_{T_1}^* - x_{T_1}) &- N_A(T_o, T_1) \left(1 - a \left(1 - \frac{\beta}{M}\right)\right) \varepsilon \beta, \end{aligned}$$

wo  $N_A(T_o, T_1)$  die Anzahl der Perioden zwischen  $T_o$  und  $T_1$  darstellt, die sich in  $A$  befinden. Ist nun  $T_1$  selbst in  $A$ , so gilt also

$$0 \leq p_{T_1} x_{T_1} \leq M - N_A(T_o, T_1) \left(1 - a \left(1 - \frac{\beta}{M}\right)\right) \varepsilon \beta$$

woraus folgt, daß  $N_A(T_o, T_1)$  eine bestimmte obere Schranke nicht übersteigen kann, was beweist, daß  $A$  eine endliche Menge ist. Also gibt es ein größtes Element in  $A$ . Also wird nach Definition 3  $c^*$  dem  $c$  vorgezogen. Da  $c$  beliebig gewählt war, ist  $c^*$  optimal.

Der Leser wird feststellen, daß dieser Beweis sehr viel kürzer ist als der Beweis eines entsprechenden Theorems im Eingüterfall, der in Weizsäcker (1965) gegeben wurde. Dort war auf eine der Bedingung (4) entsprechende Voraussetzung verzichtet worden. Dafür waren andere Voraussetzungen notwendig, die weder (4) implizieren noch von (4) impliziert werden. Sie sind aber im Mehrgüterfall nicht so einfach zu formulieren und führen auch nicht zu einem relativ einfachen Beweis. Die Bedingungen (1) bis (3) hingegen finden dort ihre genauen Entsprechungen. Schließlich bleibt noch zu bemerken, daß mittels einer



geringfügigen Verschärfung der Bedingung (3) die Maximalität (nicht Optimalität) des Programms ohne Voraussetzung (4) bewiesen werden kann. Der Beweis würde analog einem Beweis von Mirrlees im Eingüterfall verlaufen (Mirrlees [1965 b]).

### Verzeichnis der zitierten Literatur

- Atsumi, H.*: The Efficient Capital Accumulation in Open Models, Dissertation University of Rochester, 1965, Kapitel 1.
- Dasgupta, A.*: A Note on Optimum Savings, *Econometrica* Juli 1964.
- Debreu, G.*: Theory of Value, New York-London 1959.
- Dorfman, R., P. A. Samuelson, R. Solow*: Linear Programming and Economic Analysis. New York-Toronto-London 1958.
- Gale, D.*: Optimal Programs for a Multisector Economy with an Infinite Time Horizon, Technical Report No. 1, 1965, Department of Mathematics, Brown University, Providence, R. I.
- Koopmans, T.*: On the Concept of Optimal Economic Growth, Cowles Foundation Discussion Paper 163, 163 A, Dezember 1963.
- Economic Growth at a Maximal Rate, *Quarterly Journal of Economics*, August 1964.
- McFadden, D.*: Evaluation of Development Programs in a General Linear Model, Part I and II. Working Paper No. 124, Center for Research in Management Sciences, University of California, Berkeley, Juli 1965.
- McKenzie, L. W.*: The Dorfman-Samuelson-Solow Turnpike Theorem, *International Economic Review*, 4, Januar 1963.
- Mirrlees, J. A.*: Optimum Accumulation under Uncertainty, August 1965 (a).
- A Note on von Weizsäckers Existence Theorem, Juli 1965 (b).
- Morishima, M.*: Prices and the Turnpike, *Review of Economic Studies*, Februar 1961.
- von Neumann, J.*: Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, in K. Menger (Hrsg.), *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Heft 8, Leipzig-Wien 1937.
- Radner, R.*: Paths of Economic Growth that are Optimal with Regard only to Final States, *Review of Economic Studies*, Februar 1961.
- Ramsey, F.*: A Mathematical Theory of Saving, *Economic Journal* 1928.
- Samuelson, P. A.*: A Catenary Turnpike Theorem Involving Consumption and the Golden Rule, *American Economic Review*, Juni 1965.
- Scherf, H.*: Bedeutung und Grenzen der Turnpike-Theoreme, *Weltwirtschaftsarchiv* 1965.
- Stolery, L. G.*: An Optimal Policy for Economic Growth, *Econometrica* April 1965.
- Uzawa, H.*: Optimal Growth in a Two-Sector Model of Capital Accumulation *Review of Economic Studies* 1964.
- Vosgerau, H. J.*: Über optimales wirtschaftliches Wachstum, Basel-Tübingen 1965.
- von Weizsäcker, C. Ch.*: Existence of Optimal Programs of Accumulation for an Infinite Time Horizon, *Review of Economic Studies*, Mai 1965.