

**Studien zu Finanzen, Geld und Kapital**

---

**Band 9**

# **Gleichgewicht und Kapitalzins**

**Eine Untersuchung über den Wandel  
des Gleichgewichtsbegriffs in der Kapital-  
und Gleichgewichtstheorie**

**Von**

**Volker Caspari**



**Duncker & Humblot · Berlin**

DOI <https://doi.org/10.3790/978-3-428-49736-2>

Generated for Hochschule für angewandtes Management GmbH at 88.198.162.162 on 2025-12-20 04:33:11  
FOR PRIVATE USE ONLY | AUSSCHLIESSLICH ZUM PRIVATEN GEBRAUCH

VOLKER CASPARI

Gleichgewicht und Kapitalzins

# Studien zu Finanzen, Geld und Kapital

Band 9

# Gleichgewicht und Kapitalzins

Eine Untersuchung über den Wandel  
des Gleichgewichtsbegriffs in der Kapital-  
und Gleichgewichtstheorie

Von

Volker Caspari



Duncker & Humblot · Berlin

DOI <https://doi.org/10.3790/978-3-428-49736-2>

Generated for Hochschule für angewandtes Management GmbH at 88.198.162.162 on 2025-12-20 04:33:11

FOR PRIVATE USE ONLY | AUSSCHLIESSLICH ZUM PRIVATEN GEBRAUCH

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

**Caspari, Volker:**

Gleichgewicht und Kapitalzins : eine Untersuchung über  
den Wandel des Gleichgewichtsbegriffs in der Kapital-  
und Gleichgewichtstheorie / von Volker Caspari. – Berlin :  
Duncker und Humblot, 2000

(Studien zu Finanzen, Geld und Kapital ; Bd. 9)

ISBN 3-428-09736-X

Alle Rechte vorbehalten

© 2000 Duncker & Humblot GmbH, Berlin

Fremddatenübernahme und Druck:

Berliner Buchdruckerei Union GmbH, Berlin

Printed in Germany

ISSN 0939-5113

ISBN 3-428-09736-X

Gedruckt auf alterungsbeständigem (säurefreiem) Papier  
entsprechend ISO 9706 ⊗

DOI <https://doi.org/10.3790/978-3-428-49736-2>

Generated for Hochschule für angewandtes Management GmbH at 88.198.162.162 on 2025-12-20 04:33:11

FOR PRIVATE USE ONLY | AUSSCHLIESSLICH ZUM PRIVATEN GEBRAUCH

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>I. Einleitung</b> .....	7
<b>II. Die Kapital- und Gleichgewichtstheorie der frühen Neoklassik</b> .....	10
1. Die Kapitaltheorie von L. Walras .....	10
2. Wicksells Entfaltung der österreichischen Kapitaltheorie .....	13
3. Die Behandlung des fixen Kapitals und „Dr. Åkerman’s problem“ .....	23
4. Die Integration der österreichischen Kapitaltheorie in die walrasianische Allgemeine Gleichgewichtstheorie: Erik Lindahl .....	33
<b>III. Die Theorie der intertemporalen Allokation</b> .....	41
1. Die Modellstruktur .....	41
a) Zeit, Güter, Kapitalgüter .....	41
b) Pfade .....	42
c) Technologie .....	44
d) Konsumenten .....	46
2. Das intertemporale Preissystem: Diskontierte und undiskontierte Preise, Eigenzinssätze .....	47
3. Effiziente Pfade mit endgültig begrenztem Horizont .....	49
4. Effiziente Pfade mit unendlichem Horizont .....	54
4.1. Zur Begründung eines unendlichen Horizonts .....	54
4.2. Effizienzpreise bei unendlichem Horizont: Der Ansatz von Malinvaud ....	57
a) Unendliche Pfade mit einer linearen Technik und einem Primärfaktor .....	57
b) Unendliche Pfade mit mehreren Techniken und Primärfaktoren .....	63
5. Konsumoptimale Pfade .....	72
6. Argumentationsstand und Folgeprobleme .....	78
<b>IV. Gleichschrittiges Wachstum und Turnpike Theorie</b> .....	81
1. Das von Neumann-Modell .....	81
2. Die Turnpike-Eigenschaft des von Neumann-Pfads .....	92

<b>V. Das langperiodige Gleichgewicht: Ein Spezialfall oder der Referenzfall? .....</b>	106
1. Das Konzept der Profitrate in der intertemporalen Gleichgewichtstheorie .....	106
2. Das Modell von Duménil und Levy .....	113
3. Das intertemporale Gleichgewicht: Ein Gleichgewicht der kurzen Periode? ....	117
4. Alte und neue Parabeln: Burmeisters reguläre Ökonomie .....	125
<b>VI. Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	127
<b>Literaturverzeichnis .....</b>	133

## I. Einleitung

Im Zuge der kapitaltheoretischen Debatte, der sogenannten „Cambridge-Kontroverse“, konzidierten viele neoklassische Ökonomen die theoretische Unhaltbarkeit einer auf aggregierten Größen basierenden Theorie des Kapitals und der Verteilung. Sie zogen sich auf die Linien der walrasianischen Allgemeinen Gleichgewichtstheorie zurück, die gegen die in der kapitaltheoretischen Debatte entwickelten Argumente immun ist, weil sie weder auf homogenes Kapital (wie Clark) noch auf Kapitalaggregation (wie Wicksell) angewiesen ist.<sup>1</sup> Bereits kurze Zeit später machte Garegnani darauf aufmerksam, daß dieser Rückzug einen „Methodenwechsel“ impliziere, mit dem die moderne Neoklassik das bislang gemeinsame Erklärungsobjekt aller ökonomischen Theorien aufgegeben habe.<sup>2</sup>

Garegnani unterscheidet zwischen dem *Erkenntnisobjekt*, der angewandten *Methode* zur Spezifizierung der als erklärend zu begreifenden ökonomischen Variablen und der *Theorie* zur Erklärung des Erkenntnisobjekts. So haben die klassische (neoricardianische) Theorie wie auch die frühe neoklassische Kapital- und Gleichgewichtstheorie ein gemeinsames Erkenntnisobjekt, nämlich eine auf Privateigentum, Konkurrenz und Marktregulierung beruhende Wirtschaftsweise. In der *Theorie* zur Erklärung der zentralen ökonomischen Variablen unterscheiden sich Klassik und frühe Neoklassik, während sie in der *Methode* der langfristigen Gleichgewichtsanalyse übereinstimmen, weil allein dadurch die zu erklärenden ökonomischen Variablen (Profit / Zinsrate, Lohnsatz, Gleichgewichtspreis) einheitlich definiert werden. Dagegen, so Garegnani, verlasse die moderne, auf Walras zurückgreifende intertemporale Allgemeine Gleichgewichtstheorie diese ursprünglich gemeinsame methodische Grundlage, indem sie von der Methode der langfristigen Gleichgewichtsanalyse zu der von Hicks propagierten Methode der temporären Gleichgewichtsanalyse<sup>3</sup> wechsele.

Der Unterschied zwischen der frühen Neoklassik und der Klassik bestehe im wesentlichen in der *theoretischen* Erklärung der Variablen im langfristigen Gleichgewicht. Während die Klassik eigenständige Theorien über den Lohnsatz (Sub-

---

<sup>1</sup> Vgl. M. D. Nuti; On rates of return on investment, *Kyklos*, (27), 1974, S. 345 – 369, wiederausgedruckt in: M. Brown, K. Sato, P. Zarembka (Hrsg.); *Essays in Modern Capital Theory*, Amsterdam, New-York, Oxford, 1976, S. 47 – 69.

<sup>2</sup> Vgl. P. Garegnani; On a change in the notion of equilibrium in recent work on value and distribution, in: M. Brown, K. Sato, P. Zarembka (Hrsg.), *Essays in Modern Capital Theory*, a. a. O., S. 25 – 45.

<sup>3</sup> Vgl. J. R. Hicks; *Value and Capital*, Oxford 1946, S. 115 – 140 und S. 245 – 282.

sistenztheorie) und die Rente (extensive Differentialrente) entwickelte<sup>4</sup> und das Konzept von Angebot und Nachfrage zur Erklärung der Abweichung der Marktpreise von den „natürlichen“ Preisen heranzog, universalisierte die frühe Neoklassik dieses Erklärungskonzept, indem sie es auch auf die Bestimmung der „natürlichen“ Preise im Sinne langfristiger Gleichgewichtspreise übertrug. Gegen diese „Reduktion theoretischer Komplexität“ wäre im Prinzip nichts einzuwenden, wenn sie widerspruchsfrei durchgehalten werden kann. Dieses Forschungsprogramm erwies sich bereits bei Wicksell in kapital- und verteilungstheoretischer Hinsicht als problematisch und zum Teil als widersprüchlich. Um das Erklärungsprinzip von Angebot und Nachfrage beizubehalten zu können, habe daher der an der Walrassischen Theorie orientierte Zweig der Neoklassik<sup>5</sup> unter der Hand die *Methode* der Gleichgewichtsanalyse gewechselt.

Auf der Basis der geänderten Methodik tritt die neoklassische Allgemeine Gleichgewichtstheorie der durch P. Sraffa reformulierten klassischen Theorie (neoricardianische Theorie)<sup>6</sup> entgegen und versucht die Überlegenheit ihres Erklärungskonzepts von Angebot und Nachfrage unter Beweis zu stellen, indem sie den Nachweis erbracht zu haben beansprucht, daß die neoricardianische Theorie ein Spezialfall der neoklassischen Allgemeinen Gleichgewichtstheorie ist. Dem Argument, sie beschränke sich im Unterschied zur neoricardianischen Theorie nur auf temporäre, also kurzfristige Gleichgewichte, könnte sie entgegenhalten, daß das intertemporale Gleichgewicht das moderne Analogon zum „altägyptischen“ langfristigen Gleichgewicht sei.

Es ist das Ziel dieser Arbeit, diese scheinbare Analogie von intertemporalem Gleichgewicht und Gleichgewicht der langen Periode und die darauf basierende Behauptung, die neoricardianische Theorie sei ein Spezialfall der allgemeinen intertemporalen Gleichgewichtstheorie, zu widerlegen<sup>7</sup>. Dazu untersuchen wir zunächst, Garegnanis These folgend, die kapital- und gleichgewichtstheoretischen Probleme der frühen Neoklassik. Im Unterschied zu Garegnani lokalisieren wir

---

<sup>4</sup> Vgl. A. Lowe; The Classical Theory of Economic Growth, Social Research; (21), 1954, S. 127 – 158.

<sup>5</sup> Da das Erklärungsprinzip von Angebot und Nachfrage allen unterschiedlichen Strömungen innerhalb der Neoklassik gemeinsam ist, verzichten wir auf Adjektive wie neowalrasianisch, neowicksellianisch, neo-neoklassisch usw.

<sup>6</sup> Die neoricardianische Theorie ist ein Forschungsprogramm, das mit der klassischen Nationalökonomie das Erkenntnisobjekt und die Methode teilt. Ein wesentlicher Anstoß zur Wiederaufnahme klassischen Denkens ging von P. Sraffa aus, dem eine allgemein gleichgewichtstheoretische Formulierung von Ricardos Preis- und Verteilungstheorie gelang. Daher auch die begriffliche Anlehnung an die ricardianische Theorie.

<sup>7</sup> Thomas Huth hat sich in seiner Dissertationsschrift „Kapital und Gleichgewicht“ ebenfalls mit dieser Kontroverse beschäftigt. Er diskutiert jedoch vorwiegend das Verhältnis zwischen der neoricardianischen und der temporären Allgemeinen Gleichgewichtstheorie. Die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf Modelle mit unendlichem Horizont und auf die Turnpike-Theorie. Die Ergebnisse von Th. Huth konnten erst nach der Publikation seiner Dissertation (1989) berücksichtigt werden.

den Bruch mit der klassischen Methode der langfristigen Gleichgewichtsanalyse als direkte Konsequenz kapitaltheoretischer Probleme bei E. Lindahl in seinem bedeutenden Aufsatz „The Place of Capital in the Theory of Price“.<sup>8</sup>

Das in diesem Aufsatz von Lindahl entwickelte intertemporale Gleichgewichtsmodell dient als Einstieg in die intertemporale Allgemeine Gleichgewichtstheorie. Hierbei gehen wir kurz auf das Modell mit endlichem Horizont ein, das jedoch aus kapitaltheoretischer Perspektive dann uninteressant ist, wenn angenommen wird, daß in der letzten Periode nur Konsumgüter vorhanden sind (the economics of doomsday). Wird das Horizontende als vorläufig begriffen und zugestanden, daß auch nach dieser arbiträr gesetzten Zeitschranke gewirtschaftet wird, dann müssen für diese vorläufig letzte Periode Kapitalgüterendbestände festgelegt werden. Da diese Endbestände nur mit Blick auf die der Zeitschranke nachfolgenden Perioden spezifiziert werden können, ergibt sich gleichsam ein infiniter Regress, der es „erzwingt“, den endlichen durch einen unendlichen Horizont zu ersetzen. Hierbei stützen wir uns im wesentlichen auf die bahnbrechenden Arbeiten Malinvauds. Zunächst werden die Bedingungen für die Existenz eines intertemporalen Effizienzpreissystems diskutiert. Darauf aufbauend werden einige Aspekte konsumoptimaler Pfade behandelt. Damit wird die sich auf die Pfadbetrachtung stützende Analyse der neoklassischen intertemporalen Gleichgewichtstheorie beendet.

Dieser Theorie wird als Kontrastprogramm das von Neumann-Modell entgegengestellt und aufbauend darauf das Turnpike-Modell von Morishima diskutiert.

Vor diesem Hintergrund wird anschließend das von F. Hahn vorgetragene Argument, die neoricardianische Theorie sei ein Spezialfall der intertemporalen Allgemeinen Gleichgewichtstheorie, eingeordnet und kritisch überprüft.<sup>9</sup>

Die Untersuchung endet mit einer Zusammenfassung der Resultate und einem Ausblick zu bereits existierenden bzw. potentiell vorhandenen Forschungsprogrammen, die sich aus den konkurrierenden gleichgewichtstheoretischen Ansätzen ergeben haben bzw. noch ergeben könnten.

---

<sup>8</sup> E. Lindahl; *Studies in the Theory of Money and Capital*, New York 1939, S. 271 – 350. Der Artikel erschien in schwedischer Sprache bereits 1929. (E. Lindahl; Prisbildningsproblemetts uppläggning från kapitalteoretisk synpunkt, *Ekonomisk Tidskrift*, 1929.)

Diese These wird auch durch die Dissertation von Th. Huth untermauert. Garegnani lokaliert den Bruch mit der klassischen Methode bei Hicks in dessen „Value and Capital“. Hicks selbst erwähnt, daß er von Lindahl beeinflußt wurde. Vgl. J. R. Hicks; *Methods of Dynamic Economics*, Oxford 1985, S. 62 – 80.

<sup>9</sup> F. H. Hahn; *The neo-Ricardians*, *Cambridge Journal of Economics*, 1982, S. 353 – 374.

## II. Die Kapital- und Gleichgewichtstheorie der frühen Neoklassik

### 1. Die Kapitaltheorie von L. Walras

Walras' ökonomische Theorie nimmt ihren Ausgangspunkt beim Tausch gegebener Güterbestände. Daran schließt sich die Analyse der Produktion von Konsumgütern mit Hilfe von Arbeits-, Boden- und Kapitaldiensten an. Die im Produktionsmodell bestimmten Preise der Faktordienste beinhalten keine Bestimmung des Zinssatzes, weil der Preis der Nutzung von Kapitalgütern kein Zins, sondern eine Kapital- oder Quasirente ist. Die Popularisierung des Walrasschen Produktionsmodells durch Cassel<sup>1</sup> hat der Vorstellung Vorschub geleistet, es handele sich beim Produktionsmodell um den „Kern“ der Walrasschen Theorie.<sup>2</sup>

Walras' Theorie der Profit/Zinsrate findet sich nicht in seinem Produktionsmodell, sondern in seinem Kapitalbildungsmodell. Dazu erweitert er das Produktionsmodell, indem er nicht nur die Produktion von Konsumgütern, sondern auch die Produktion von Kapitalgütern berücksichtigt. Ausgehend von arbiträr gegebenen Anfangsbeständen unterteilen wir diese in  $l$  reproduzierbare Kapitalgüter und  $m$  nichtreproduzierbare Primärfaktoren. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß das Angebot der Faktorbesitzer für die Nutzung der Faktoren preisunelastisch ist, so daß das Angebot von Faktordiensten gleich der insgesamt vorhandenen Menge ist, d. h.

$$(II.1) \quad \mathbf{Q}_n = \mathbf{O}_n, \quad (m)$$

$$(II.2) \quad \mathbf{Q}_k = \mathbf{O}_k, \quad (l)$$

wobei  $\mathbf{Q}_n, \mathbf{O}_n$  die  $m$ -dimensionalen Vektoren der vorhandenen bzw. angebotenen Mengen der Primärfaktoren und  $\mathbf{Q}_k, \mathbf{O}_k$  die  $l$ -dimensionalen Vektoren der vorhandenen bzw. angebotenen Mengen der reproduzierbaren Kapitalgüter darstellen.

Die Nachfrage nach den  $n$ -Konsumgütern hängt von den Konsumgüterpreisen  $p_c$ , von den Preisen der Primärfaktoren  $p_n$ , von den Preisen der Kapitalgüter  $p_k$  und von der Profitrate  $r$  ab.

<sup>1</sup> Vgl. G. Cassel; Theoretische Sozialökonomie, 5. Aufl., Leipzig 1932, S. 121 – 137.

<sup>2</sup> Die Entwicklung der Allgemeinen Gleichgewichtstheorie, insbesondere die ersten Versuche eines Existenzbeweises von A. Wald, wurde durch Cassel wesentlich beeinflußt. Vgl. E. R. Weintraub; On the Existence of a Competitive Equilibrium: 1930 – 1954, Journal of Economic Literature, 1983, S. 1 – 39.

$$(II.3) \quad \mathbf{D}_c = F(\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_n, \mathbf{p}_k, r) , \quad (n)$$

wobei  $\mathbf{D}_c$  den  $n$ -dimensionalen Vektor der Konsumgüternachfragen darstellt.  $\mathbf{p}_c$  ist der  $n$ -dimensionale Spaltenvektor der Konsumgüterpreise,  $\mathbf{p}_n$  der  $m$ -dimensionale Spaltenvektor der Preise der Primärfaktoren und  $\mathbf{p}_k$  der  $l$ -dimensionale Spaltenvektor der Kapitalgüterdienstpreise. Die Profitrate  $r$  ist ein Skalar.

Walras nimmt an, daß die Ersparnisse in einem imaginären Gut  $E$  angelegt werden. Da der Kauf dieses Guts identisch ist mit dem Kauf eines Anspruchs auf einen unendlichen Einkommensstrom, besteht zwischen dem Preis des Guts  $E, p_e$ , und der Profitrate  $r$  die Beziehung  $1/p_e = r$ .

Summiert über alle Wirtschaftssubjekte gilt für die gesamtwirtschaftliche Bruttoersparnis  $S$ :

$$(II.4) \quad D_e p_e = S = G_c(\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_n, \mathbf{p}_k, r) . \quad (l)$$

Unter der Voraussetzung vollkommener Konkurrenz gilt, daß die Preise den Produktionskosten entsprechen müssen:

$$(II.5) \quad \mathbf{p}_c = \mathbf{B} \mathbf{p}_k + \mathbf{N} \mathbf{p}_n , \quad (n)$$

$$(II.6) \quad \mathbf{P}_k = \mathbf{A} \mathbf{p}_k + \mathbf{M} \mathbf{p}_n . \quad (l)$$

Die  $(n \times l)$ -Matrix  $\mathbf{B}$  enthält die Inputkoeffizienten der reproduzierbaren Kapitalgüterdienste, die zur Produktion von Konsumgütern benötigt werden. Die  $(n \times m)$ -Matrix  $\mathbf{N}$  enthält die Inputkoeffizienten der Primärfaktoren, die zur Produktion von Konsumgütern eingesetzt werden. Die quadratische  $(l \times l)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  enthält die Inputkoeffizienten der Kapitalgüterdienste, die zur Produktion *neuer* Kapitalgüter benötigt werden, und die  $(l \times m)$ -Matrix  $\mathbf{M}$  enthält die Inputkoeffizienten der Primärfaktoren, die zur Produktion *neuer* Kapitalgüter verwendet werden.  $\mathbf{P}_k$  ist der Preisvektor der neuen Kapitalgüter.

Zwischen dem Preis des Kapitalguts  $P_k^l$  und dem Preis der Nutzung des Kapitalguts  $p_k^l$  nimmt Walras folgende Beziehung an:

$$P_k^l = \frac{p_k^l}{m + v + r} ,$$

wobei  $m$  die Versicherungsprämie (Risiko) und  $v$  die Abschreibungsrate darstellen. Im Gleichgewicht muß die kapitalisierte Quasirente (der Preis der Nutzung von Kapitalgut  $l$ ) dem Preis des Kapitalguts entsprechen. Walras berücksichtigt nur fixes Kapital und unterstellt außerdem eine unendliche Lebensdauer des Kapitalguts ( $v = 0$ ). Vernachlässigt man die Versicherungsprämie, ergibt sich:

$$(II.7) \quad r P_k^l = p_k^l, \quad \forall l , \quad (l)$$

d. h. Walras fordert eine uniforme Profitrate.

Um das Modell zu schließen, müssen wir noch die Nachfragen nach den Diensten der Primärfaktoren, die Nachfragen nach den Diensten der Kapitalgüter und die Nachfrage nach *neu* produzierten Kapitalgütern berücksichtigen. Diese Nachfragen ergeben sich als abgeleitete Nachfragen aus der Konsumgüter- bzw. Kapitalgüterproduktion.

Im Gleichgewicht gilt, daß die Nachfrage nach den Diensten der Primärfaktoren dem Angebot entspricht:

$$(II.8) \quad \mathbf{O}_n = \mathbf{D}_c \mathbf{N} + \mathbf{D}_k \mathbf{M} . \quad (m)$$

Analog gilt für das Gleichgewicht auf dem Markt für Kapitaldienste:

$$(II.9) \quad \mathbf{O}_k = \mathbf{D}_c \mathbf{B} + \mathbf{D}_k \mathbf{A} , \quad (l)$$

wobei  $\mathbf{D}_k$  in (7) und (8) die Nachfrage nach Kapitaldiensten bezeichnet.

Da auch die Ersparnisse den Investitionen entsprechen müssen, gilt:

$$(II.10) \quad S = \mathbf{D}_k \mathbf{P}_k . \quad (l)$$

Das Modell besteht aus  $4l + 2m + 2n + 2$  Gleichungen und ebensovielen Variablen. Das ist weder eine hinreichende noch eine notwendige Voraussetzung für die Existenz einer allgemeinen Lösung. So haben Garegnani und später Eatwell das Walrassche Kapitalbildungsmodell im Hinblick auf die Frage, ob ein allgemeines Kapitalbildungsgleichgewicht mit einer uniformen Profit- / Zinsrate existiert, ausführlich untersucht.<sup>3</sup> Da ich an anderer Stelle<sup>4</sup> darauf bereits ausführlich eingegangen bin, möchte ich hier die wesentlichen Kritikpunkte nur noch einmal zusammenfassen.

Walras hat in seiner Theorie nicht berücksichtigt, daß die Gütermenge der Anfangsausstattung, die nicht in der Konsumgüterproduktion absorbiert wird, der Gütermenge entsprechen muß, die in der Produktion neuer Kapitalgüter benötigt wird. Wird in der Konsumgüterproduktion eine „zu große“ Menge der Anfangsausstattungen absorbiert, können nicht mehr alle, unter Umständen sogar überhaupt keine neuen Kapitalgüter produziert werden. Wird hingegen ein „zu geringer“ Teil der Anfangsausstattungen durch Konsumgüterproduktion gebunden, dann liegt zumindest für einen Teil der übriggebliebenen Anfangsbestände ein Überschußangebot vor, so daß ihr Preis null ist. Damit kann aber die Profitrate, bezogen auf den Angebotspreis des Guts, das sich im Überschußangebot befindet, nicht uniform sein. Eatwell zeigt, daß unter der Voraussetzung einer uniformen Profitrate eine all-

<sup>3</sup> P. Garegnani; Il Capitale nelle Teorie della Distribuzione, Mailand 1960, derselbe; Über Walras' Theorie des Kapitals, in: P. Garegnani; Kapital, Einkommensverteilung und effektive Nachfrage, Marburg 1989, S. 125 – 152. J. Eatwell; Scarce and Produced Commodities, PhD-thesis, Harvard University, Cambridge (Mass.), 1975.

<sup>4</sup> V. Caspari; Walras, Marshall, Keynes; Berlin 1989, S. 29 – 31.

gemeine Lösung nur für den Fall existiert, in dem ein einziges Kapitalgut reproduziert wird. Walras selbst hegte bereits Zweifel, daß sich mit Hilfe seiner Theorie ein allgemeines Kapitalbildungsgleichgewicht mit uniformer Profitrate nachweisen läßt:

„If we suppose that old fixed capital goods proper of the types  $K, K', K'', \dots$  are already found in the economy in quantities  $Q_k, Q_{k'}, Q_{k''}, \dots$  respectively and that their gross and net incomes are paid for at prices determined by the system of production equations ( . . . ), it is not at all certain that the amount of savings  $E$  will be adequate for the manufacture of new fixed capital goods proper in just such quantities as will satisfy the last  $l$ -equations of the above system.“

In such an economy like the one we have imagined, which establishes its economic equilibrium *ab ovo*, it is probable that there would be no equality of rates of net income. ( . . . ) All we could be sure of, under these circumstances, is: (1) that the utility of new capital goods would be maximized if the first new capital goods to be manufactured were those yielding the highest rate of net income, and (2) that this is precisely the order in which new capital goods would be manufactured under a system of free competition.“<sup>5</sup>

Es gibt keinen Hinweis, daß Wicksell aus diesem Grund die Walrassche Kapitaltheorie ablehnte. Weitaus wichtiger für Wicksells Ablehnung dürfte die von Walras selbst vertretene Vermutung gewesen sein, daß sich der Zinssatz nur in einer wachsenden Ökonomie bestimmen lasse.<sup>6</sup>

„This is certainly incorrect. In the stationary economy, too – even if we assume that all the means of production are indestructible – a rate of interest of the circulating capital will undoubtedly establish itself, precisely because the lengthier methods of production prove more profitable. Walras' theory of production and capital consequently rests upon incorrect assumptions and cannot be regarded as definitive.“<sup>7</sup>

Darüber hinaus kritisierte Wicksell den Walrasschen Kapitalbegriff, weil zirkulierendes Kapital völlig außer acht gelassen werde und damit das „Zinsproblem“ nicht wirklich erfaßt werden könne.

## 2. Wicksells Entfaltung der österreichischen Kapitaltheorie

Die Alternative zur Walrasschen Behandlung produzierter Produktionsmittel im Rahmen der neoklassischen Theorie des langperiodigen Gleichgewichts stellt die Theorie Knut Wicksells dar. Wicksell folgte Walras in dessen Behandlung des Tauschwerts und der Produktion. Seinen Kapitalbegriff und seine Kapitaltheorie kritisierte er indes heftig.

<sup>5</sup> L. Walras; Elements of Pure Economics, transl. by W. Jaffé, Homewood, Ill., 1954, S. 308.

<sup>6</sup> Vgl. L. Walras; Elements . . . , a. a. O., S. 586 – 587.

<sup>7</sup> K. Wicksell; Value, Capital and Rent, London 1954, S. 167.

„What Adam Smith called circulating capital (...) are, according to Walras, revenues, and bear no interest themselves (...). This is, of course, not correct. (...) Consumable goods certainly bear interest, if they are used for production or otherwise as capital; and the fact that they do this is just the main problem of the theory of capital interest.“<sup>8</sup>

Wicksell wirft Walras vor, daß er durch die völlige Ausblendung von zirkulierendem Kapital nur fixes Kapital als „eigentliches“ Kapital begreife. Damit behandle er aber Kapital wie Land, so daß sich eine Kapitalrente, jedoch kein Zinssatz oder ein Kapitalwert bestimmen lasse.

„This is explicitly admitted by Walras; but he asserts that, in order to determine the level of interest, it is necessary to turn from the investigation of a stationary economy to the investigation of a progressive one, where new interest – bearing capital goods are produced, whose capital value can be determined from the production cost.“<sup>9</sup>

Walras' Annahme, eine positive Zinsrate könne nur in einer wachsenden Wirtschaft auftreten, wird von Wicksell zurückgewiesen. Auch in einer stationären Wirtschaft mit zirkulierendem Kapital müsse sich eine Zinsrate bestimmen lassen.

„(...) – a rate of interest of the circulating capital will undoubtedly establish itself, precisely because the lengthier methods of production prove more profitable. Walras' theory of production and capital consequently rests upon incorrect assumptions and cannot be regarded as definitiv.“<sup>10</sup>

In den *Vorlesungen über Nationalökonomie* wiederholt Wicksell seine Kritik an der Walrasschen Produktionstheorie.

„(...), das Kapital und der Kapitalzins erhalten in ihr ganz dieselbe Stellung wie der Boden und die Grundrente, mit anderen Worten: diese Lehre bildet fortgesetzt eine Theorie der kapitallosen, wenn auch mit allerlei als unzerstörbar betrachteten technischen Hilfsmitteln ausgerüsteten Produktion.“<sup>11</sup>

Gegen die Walrassche Kapitaltheorie, wie sie von Walras im Kapitalbildungsmodell entwickelt wurde, wendet er ein:

„Wiederum – mit der Walrasschen Schule – den Wert der Kapitalgegenstände aus ihren eigenen Produktions- oder Reproduktionskosten ableiten zu wollen, ist ein vergebliches Unterfangen, denn in Wirklichkeit sind ja auch Kapital und Kapitalzins Bestandteile jener Produktionskosten, und sogar wenn dies nicht der Fall wäre, hängt ja die tatsächliche Höhe des Arbeitslohnes und der Grundrente von der des Kapitalzinses ab oder mit ihr zusammen. Wir würden uns also nur im Kreise bewegen.“<sup>12</sup>

Wenn Kapital als ein zu Produktionskosten bewertetes homogenes Aggregat physisch verschiedener Kapitalgüter verstanden werden soll, muß mindestens ein

<sup>8</sup> K. Wicksell; *Value, Capital and Rent*, London 1954, S. 96.

<sup>9</sup> Ebenda, S. 167.

<sup>10</sup> Ebenda, S. 167.

<sup>11</sup> K. Wicksell; *Vorlesungen über Nationalökonomie*, Bd. I, Jena 1913, S. 238.

<sup>12</sup> Ebenda, S. 213.

Faktorpreis – Lohnsatz oder Zinsrate – parametrisch vorausgesetzt werden. Die Theorie von Angebot und Nachfrage nach Faktoren will aber beide Faktorpreise simultan bestimmen. Hierin sah Wicksell das Problem.

„Es gibt jedoch einen Ausweg aus dieser Schwierigkeit, aber nur einen, wenn man nämlich an den gemeinsamen oder wenigstens gleichartigen Ursprung der verschiedenen Kapitalteile denkt. Das Kapital ist ja, (...), selbst ein Produkt, eine Frucht des Zusammenspielens der beiden ursprünglichen Produktivkräfte, Arbeit und Boden.“<sup>13</sup>

Wicksell zog die von Böhm-Bawerk entwickelte Kapitaltheorie der von Walras vor, weil sie nicht nur einen Ausweg aus dem bereits genannten Problem der simultanen Bestimmung von Lohn- und Zinsrate bot, sondern auch den von Wicksell als wichtig erachteten Fall der Produktion mit zirkulierendem Kapital zu behandeln gestattete. In *Wert, Kapital und Rente* benutzt er die durchschnittliche Produktionsperiode als zeitliches Maß, in dem die Kapitalnachfrage ausgedrückt wird. Das Kapitalangebot ist durch den Lohnfonds (Subsistenzfonds) gegeben. Wird dieser in Lohneinheiten gemessen, so wird das Kapitalangebot ebenfalls in Zeiteinheiten ausgedrückt. Kapitalnachfrage und Angebot scheinen daher auf den ersten Blick in einer Maßeinheit ausgedrückt zu sein, die nicht selbst wiederum mit der Höhe der Zinsrate variiert. In *Wert, Kapital und Rente* rekonstruiert Wicksell die Kapitaltheorie Böhm-Bawerks und unterwirft sie einer Konsistenzprüfung.

Ein homogenes Konsumgut  $x$  wird mit Hilfe des Primärinputs Arbeit und produzierter Produktionsmittel, die wiederum mit Hilfe von Arbeit in der durchschnittlichen Produktionsperiode  $T$  erzeugt werden, produziert. Die Produktionsfunktion weist konstante Skalenerträge auf und lautet als pro-Kopf Produktionsfunktion:

$$(II.11) \quad x = f(T),$$

wobei,  $x$  den Output pro Arbeitseinheit und  $T$  die durchschnittliche Produktionsperiode bezeichnet.

Wicksell übernimmt die von Böhm-Bawerk getroffene Annahme einfacher Verzinsung, so daß der Wert des gesamten Outputs gleich den verzinsten, über die durchschnittliche Produktionsperiode  $T$  aufgelaufenen Lohnkosten ist.

$$(II.12) \quad p f(T) = w(1 + rT).$$

Bei gegebenem Lohnsatz  $w$  wird jeder Unternehmerkapitalist den Zinssatz durch die Variation der Produktionsperiode zu maximieren versuchen, d. h. er differenziert (II.12) nach  $T$ . Für  $p = 1$  gilt:

$$f'(T) = wr,$$

bzw.

---

<sup>13</sup> Ebenda, S. 213.

$$(II.13) \quad \frac{1}{w} f'(T) = r.$$

Der Zinssatz ist gleich dem Grenzprodukt des Produktionsumwegs bzw. der Verlängerung der Produktionsperiode dividiert durch den Lohnsatz. Bei gegebenem Lohnsatz ermöglichen die drei Gleichungen (II.11), (II.12) und (II.13) die Bestimmung der drei Variablen  $x, r, T$ .

Geht man von der Partialbetrachtung zu einer gesamtwirtschaftlichen Analyse über, wird der Lohnsatz selbst zu einer endogenen Variablen und kann somit nicht als gegeben vorausgesetzt werden. Die zusätzlich notwendige Gleichung ergibt sich aus der Bedingung, daß im Gleichgewicht die Kapitalnachfrage gleich dem Angebot von Kapital sein muß. Wicksell setzt das Kapitalangebot in Form des Subsistenzfonds (Lohnfonds) als gegeben voraus, und weil der stationäre Fall untersucht werden soll, muß die Größe auch konstant sein. Im Gleichgewicht wird dieser gegebene Lohnfonds  $\bar{S}$  durch die Lohnzahlungen während der durchschnittlichen Produktionsperiode absorbiert.

$$(II.14) \quad \bar{S} = wLT.$$

Hieraus folgt, daß das pro Arbeitseinheit eingesetzte Kapital gleich dem Subsistenzfonds je Arbeitseinheit ist.

$$(II.15) \quad \frac{K}{L} = k = wT.$$

Wicksell stellte sich die Frage, ob die Grundaussage der Grenzproduktivitätstheorie aus der partialanalytischen Perspektive auch auf die gesamtwirtschaftliche Ebene übertragen werden kann, d. h. ob auch gesamtwirtschaftlich das Grenzprodukt des Kapitals im Gleichgewicht seinem Faktorpreis, dem Zinssatz also, entspricht. Die Grenzproduktivität des Kapitals ist in Wicksells Modell wie folgt zu bilden:

$$(II.16) \quad \frac{dx}{dk} = \frac{dx}{dT} \frac{dT}{dk},$$

wobei  $x$  den Output pro Arbeitseinheit bezeichnet.

Aus (II.13) folgt

$$\frac{dx}{dT} = rw$$

und unter der Voraussetzung, daß  $w$  bekannt ist, folgt aus (II.15)

$$\frac{dk}{dT} = w.$$

Setzen wir das in (II.16) ein, so ergibt sich

$$\frac{dx}{dk} = rw \frac{1}{w} = r.$$

Der Zinssatz ist also gleich dem Grenzprodukt des Kapitals. Da aus gesamtwirtschaftlicher Perspektive der Lohnsatz jedoch nicht als gegeben behandelt werden kann, muß (II.15) total differenziert werden,

$$dk = dwT + dTw,$$

so daß

$$(II.17) \quad \frac{dk}{dT} = \frac{dw}{dT} T + w$$

ist. Wenn man (II.17) in (II.16) berücksichtigt, erhält man

$$(II.18) \quad \frac{dx}{dk} = \frac{rw}{\frac{dw}{dT} T + w} = \frac{r}{\frac{dw}{dT} \frac{T}{w} + 1}.$$

Wenn bei der Verlängerung der Produktionsperiode der Lohnsatz steigt, dann ist  $dw/dT > 0$ . Unter der Voraussetzung von Vollbeschäftigung ist das auch plausibel, denn um die Produktionsperiode zu verlängern, müssen Arbeiter aus der direkten Konsumgüterproduktion in die verlängerte „Umwegsproduktion“ umgeleitet werden. Dadurch steigt das Grenzprodukt der Arbeit in der Konsumgüterproduktion und somit auch der gleichgewichtige Lohnsatz. Unter dieser Voraussetzung folgt das von Wicksell hervorgehobene Ergebnis,<sup>14</sup>

$$\frac{dx}{dk} = \frac{r}{\frac{dw}{dT} \frac{T}{w} + 1} < r,$$

d. h. daß das Grenzprodukt des Kapitals kleiner als der Zinssatz ist. Dieses Resultat ergibt sich, weil ein Teil des durch die Kapitalerhöhung erzeugten Outputs durch eine Lohnsteigerung im Umfang von  $dwT$  absorbiert wird. Das ist der auch bei einfacher Verzinsung auftretende Wicksell-Effekt, auf den im Zusammenhang mit Wicksells Weiterentwicklung der Kapitaltheorie noch eingegangen wird. Wicksell nutzte den nach ihm benannten Effekt in zwei verschiedenen Zusammenhängen. So diente er ihm zur Klärung der Kritik Böhm-Bawerks an Thünens „Produktivitätstheorie des Zinses“, und andererseits versuchte er, damit den Unterschied zwischen dem Produktionsfaktor Kapital und den Faktoren Arbeit und Land hinsichtlich der Variation eines Faktors bei Konstanz der kooperierenden Faktoren hervorzuheben.<sup>15</sup>

---

<sup>14</sup> Vgl. K. Wicksell; Value, Capital and Rent, a. a. O., S. 137 – 9.

In den *Vorlesungen über Nationalökonomie* verwirft Wicksell die durchschnittliche Produktionsperiode (Investitionsperiode) als Maß der Kapitalnachfrage, weil sie auf der unhaltbaren Voraussetzung der einfachen Verzinsung beruht.<sup>16</sup> Berücksichtigt man Zins und Zinseszins, kann die durchschnittliche Produktionsperiode nicht mehr unabhängig vom Zinssatz bestimmt werden. Eine Größe, die mit der Verteilung variiert, kann somit ihrer Funktion als Ausdruck und Maß der Kapitalnachfrage, die zusammen mit dem Kapitalangebot die Höhe des Zinssatzes im Gleichgewicht bestimmt, nicht mehr gerecht werden. Deshalb zog es Wicksell in den *Vorlesungen* vor, mit der absoluten Produktionsperiode bzw. der individuellen Produktionsperioden der einzelnen produktiven Einsätze zu arbeiten. Damit wird die Theorie zunächst jedoch auf zweierlei Weise eingeengt. Zum einen beschränkt man sich auf den „point input – point output“-Fall, und zum anderen ergibt sich eine partialanalytische Perspektive, die man ursprünglich mit dem Konzept der durchschnittlichen Produktionsperiode vermeiden wollte. Stellt doch die durchschnittliche Produktionsperiode als gewichtetes arithmetisches Mittel der zahlreichen Produktionsprozesse mit individuell verschiedenen langen Investitionsperioden einen „aggregierten“ Ausdruck dieser zeitlich heterogenen Investitionsperioden dar. Gibt man die durchschnittliche Produktionsperiode als aggregierten Ausdruck der gesamtwirtschaftlichen Kapitalnachfrage auf, kann man nur noch auf eine Anzahl von Produktionsprozessen mit verschiedenen langen absoluten Investitionsperioden zurückgreifen. Auf der Basis dieser Überlegungen hat Wicksell seine Kapitaltheorie in den *Vorlesungen* neu formuliert. Wie in *Wert, Kapital und Rente* weist die Produktionsfunktion konstante Skalenerträge auf, so daß der Output pro Kopf  $x$ , eine Funktion der absoluten Investitionsperiode  $t$  ist:

$$(II.19) \quad x = f(t), \quad f'(t) > 0, \quad f''(t) < 0.$$

Der Wert des pro Kopf Outputs entspricht den in  $t$  Perioden auflaufenden Kosten pro Arbeitseinheit<sup>17</sup>. Bei nun berücksichtigter stetiger Verzinsung gilt:

$$(II.20) \quad p f(t) = w e^{rt},$$

Der Unternehmerkapitalist maximiert bei gegebenem Lohnsatz  $w$  den Zinssatz  $r$ . Für  $p = 1$  ergibt sich durch Logarithmieren und Auflösen nach  $r$ :

$$r = \frac{\ln f(t) - \ln w}{t}.$$

---

<sup>15</sup> Vgl. hierzu: Carl G. Uhr; Economic Doctrines of Knut Wicksell, Berkeley and Los Angeles 1960, S. 126 – 131.

<sup>16</sup> Vgl. K. Wicksell; Vorlesungen, Bd. I, S. 251 – 2.

<sup>17</sup> Vgl. K. Wicksell; Vorlesungen, Bd. I, S. 245 – 246. Wicksell nimmt den Wert des Produkts, der sich aus Arbeitslohn und Bodenrente zusammensetzt, als gegeben. Der Einfachheit halber unterstellen wir, das Produkt sei nur mit Hilfe von Arbeit erzeugt worden.

Wir differenzieren die rechte Seite nach  $t$  und setzen den Ausdruck gleich null.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{f'(t) \frac{1}{f(t)} t - (\ln f(t) - \ln w)}{t^2} = 0.$$

Da die Klammer im Zähler des Bruchs gleich  $rt$  ist, erhält man

$$(II.21) \quad \frac{f'(t)}{f(t)} = r,$$

d. h., der Zinssatz  $r$  ist gleich dem Grenzprodukt der Verlängerung der Investitionsperiode.

Bei gegebenem Lohnsatz  $w$  ermöglichen die aufgeführten drei Gleichungen die Bestimmung der endogenen Variablen  $x, t$  und  $r$ . Um den Lohnsatz endogen zu bestimmen, benötigt man eine zusätzliche Gleichung. Wie im Modell aus *Wert, Kapital und Rente* greift Wicksell auf eine Gleichung zurück, die besagt, daß im gesamtwirtschaftlichen Gleichgewicht der als exogen vorausgesetzte Wert des Kapitals  $K$  im Gleichgewicht sowohl den kapitalisierten Gewinnen als auch den bei kontinuierlicher Produktion gezahlten Löhnen einschließlich des akkumulierten Zins und Zinseszins entsprechen muß:

$$(II.22) \quad K = \frac{(x - w)L}{r} = wL e^{r^*} dz.$$

Um das Grenzprodukt des Kapitals zu berechnen, gehen wir von der Verteilungsseite des realen pro-Kopf Einkommens aus. Es gilt

$$x = w + rk.$$

Bildet man das totale Differential, so ergibt sich:

$$x = dw + kdr + rdk,$$

so daß

$$(II.24) \quad \frac{dx}{dk} = \frac{dw}{dk} + k \frac{dr}{dk} + r.$$

Damit ist eine mögliche Nichtübereinstimmung zwischen dem Zinssatz und der Grenzproduktivität des Kapitals schon gegeben. Es bleibt jedoch zu klären, ob die Erhöhung des Lohnsatzes bei einer Steigerung der Kapitalintensität ( $dw/dk$ ) nicht durch den Rückgang des Zinssatzes ( $dr/dk$ ) gerade kompensiert oder vielleicht sogar überkompensiert wird. Das Verhältnis von einer Lohnsatzänderung zu einer Änderung des Zinssatzes muß somit untersucht werden. Hierzu kann man auf (II.20) zurückgreifen und diese Gleichung logarithmisch differenzieren:

2\*

DOI <https://doi.org/10.3790/978-3-428-49736-2>

Generated for Hochschule für angewandtes Management GmbH at 88.198.162.162 on 2025-12-20 04:33:11

FOR PRIVATE USE ONLY | AUSSCHLIESSLICH ZUM PRIVATEN GEBRAUCH

$$(II.20') \quad \begin{aligned} \ln x &= \ln w + rt, \\ \frac{dx}{x} - \frac{dw}{w} &= rdt + tdr. \end{aligned}$$

Nach Umordnen erhält man:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{wdx}{drx} - \frac{wrdt}{dr} - wt.$$

Wenn man für

$$r = \frac{dx}{dt} \frac{1}{x}$$

einsetzt, ergibt sich

$$\left( \frac{wdx}{xdr} - \frac{wdxdt}{xdt dr} \right) - wt = \frac{dw}{dr}.$$

Da der Wert der Klammer gleich 0 ist, erhält man somit:

$$-wt = \frac{dw}{dr},$$

bzw.

$$-wt dr = dw.$$

Setzt man dieses Ergebnis in (II.24) ein, so ergibt sich

$$(II.25) \quad \frac{dx}{dk} = r + (k - wt) \frac{dr}{dk}.$$

Da aus (II. 22) folgt, daß

$$\frac{dr}{dk} < 0,$$

und weil wegen

$$k = \frac{we^r - 1}{r},$$

$wt < k$  ist, muß der Zinssatz größer als das Grenzprodukt des Kapitals sein. Wicksell bestätigt hiermit, daß sich sein Ergebnis in *Wert, Kapital und Rente* auch bei kontinuierlicher Verzinsung und bei Heranziehung der absoluten Investitionsperiode einstellt. Der Wicksell-Effekt läßt sich verdeutlichen, indem man zu analytischen Zwecken das Kapital in zwei Komponenten, eine Mengenkomponente  $q_k$  und eine Preiskomponente  $p_k$  zerlegt:

$$(II.26) \quad K = p_k q_k.$$

Die gesamte marginale Änderung von K ergibt sich aus dem totalen Differential von (II.26):

$$dK = p_k dq_k + q_k dp_k$$

oder

$$\frac{dK}{K} = \frac{dq_k}{q_k} + \frac{dp_k}{p_k}.$$

Man erhält  $dK/K$  durch das totale Differential von

$$K = wL \frac{e^{rt} - 1}{r}$$

$$dK = \frac{rtwLe^{rt} - wLe^{rt} + wL}{r^2} dr + \frac{rwle^{rt}}{r} dt + \frac{Le^{rt} - L}{r} dw + \frac{we^{rt} - w}{r} dL.$$

Durch Division mit (II.22) und Umordnen ergibt sich:

$$(II.27) \quad \frac{dK}{K} = \left[ \frac{dL}{L} + \frac{rt}{1 - e^{-rt}} \frac{dt}{t} \right] + \left[ \frac{dw}{w} + \left( \frac{rt}{1 - e^{-rt}} - 1 \right) \frac{dr}{r} \right].$$

Der „Mengeneffekt“  $dq_k/q_k$  wird durch die erste eckige Klammer von (II.27) angegeben, während der „Preiseffekt“  $dp_k/p_k$  durch die zweite eckige Klammer beschrieben wird. Der Wicksell-Effekt (Wicksell-Preiseffekt) würde nicht auftreten, wenn die marginale Änderung des Kapitals nicht zu einer Änderung des Lohn- und des Zinssatzes führen würde. Die Diskrepanz zwischen Zinssatz und Grenzproduktivität entsteht also durch eine Umbewertung des Kapitals. Der Grund dieser Umbewertung liegt letzten Endes darin, daß Kapital nicht wie Arbeit oder Boden in physischen Einheiten, sondern in Werteinheiten gemessen wird.

„Die Erklärung dieser eigentümlichen Abweichung liegt ganz und gar darin, daß, während Arbeitskraft und Bodenkraft jede mit ihrer eigenen technischen Einheit (...) gemessen werden, das Kapital dagegen (...) nach der gewöhnlichen Anschauungsweise als Summe von Tauschwert (...) aufgefaßt wird; mit anderen Worten, jeder besondere Kapitalgegenstand wird mit einer ihm selber fremden Einheit gemessen.“<sup>18</sup>

Wicksell sah in dieser Divergenz keinen Anlaß, seine Theorie grundsätzlich zu hinterfragen. Zwar zeigt der von ihm entdeckte Effekt, daß die durch die Umwertsproduktion definierte absolute Investitions- bzw. Produktionsperiode kein exaktes Maß der Kapitalintensität sein kann. Das störte ihn jedoch nicht zu sehr, zumal das Vorzeichen des Effekts in eine Richtung zeigt, die mit der Logik der Theorie von Angebot und Nachfrage übereinstimmt. Eine Senkung des Zinssatzes führt zu einer Verlängerung der Investitionsperiode, d. h. zu einer höheren Kapitalnachfrage und zu einer höheren Kapitalintensität. Eine Umkehrung des Effekts schien ihm nicht

<sup>18</sup> K. Wicksell; Vorlesungen, a. a. O., S. 212.

plausibel. Sie hätte eine grundsätzliche Untersuchung und vielleicht ein völliges Umdenken erfordert. Wenn mit einer Senkung des Zinssatzes eine Verkürzung der Investitionsperiode und somit ein Rückgang der Kapitalintensität einhergeht, bedeutet dies nicht nur eine in die andere Richtung gehende Diskrepanz zwischen Zinssatz und Grenzproduktivität des Kapitals, sondern die Logik der Theorie von Angebot und Nachfrage selbst steht zur Diskussion.

In den *Vorlesungen* hielt Wicksell den umgekehrten Effekt noch für wenig plausibel, seine wissenschaftliche Aufrichtigkeit ersticke den Keim des Zweifels jedoch nicht völlig:

„Dagegen erscheint es a priori undenkbar (obgleich die Sache vielleicht doch genauer untersucht werden sollte), daß ein Zunehmen des Kapitals unter sonst gleichen Umständen ein Herabsetzen des Arbeitslohnes sowohl wie auch der Grundrente herbeiführen könnte.“<sup>19</sup>

Fast zwanzig Jahre später in einer Auseinandersetzung mit der Arbeit seines Schülers G. Åkerman, der die österreichische Kapitaltheorie um den „point-input-flow output“-Fall – die Analyse des Fixkapitals – erweiterte, sollte Wicksell selbst das für ihn einst „undenkbare“, den negativen Preis-Wicksell Effekt nämlich, entdecken. Darauf wird in Kürze noch näher eingegangen. Zunächst gilt es jedoch noch den Argumentationsgang der kapitaltheoretischen Untersuchungen in Wicksells *Vorlesungen* zu Ende zu führen.

Das von Wicksell präsentierte Modell stellt einen einzigen Produktionsprozeß dar und verdeutlicht die Beziehungen zwischen den endogenen Variablen Zinssatz, Lohnsatz und Länge der Produktionsperiode. Da es nun in einer Ökonomie zahlreiche Produktionsprozesse mit ganz unterschiedlich langen Investitionsperioden gibt, der Rekurs auf eine durchschnittliche Produktionsperiode als aggregierter Ausdruck der gesamtwirtschaftlichen Kapitalnachfrage jedoch verstellt ist, kann die gesamtwirtschaftliche Kapitalnachfrage nur als Summe der einzelwirtschaftlichen Kapitalnachfragen aufgefaßt werden,<sup>20</sup> d. h.

$$K_d = wl_1(1+r) + wl_2(1+r)^2 + \dots + wl_{t-1}(1+r)^{t-1}.$$

Mit dieser Gleichung ist die gesamte Kapitalnachfrage  $K^d$  bestimmt.

„Werden alle diese Werte summiert und einer gewissen gegebenen Quantität gleichgesetzt (...), so haben wir damit die notwendige (sechste) Relation erhalten, und das Problem ist endlich völlig determiniert.“<sup>21</sup>

<sup>19</sup> K. Wicksell; *Vorlesungen*, a. a. O., S. 250.

<sup>20</sup> Vgl. K. Wicksell; *Vorlesungen*, a. a. O., S. 275.

<sup>21</sup> K. Wicksell; *Vorlesungen*, a. a. O., S. 275.

Wicksells Zitat bezieht sich auf sein zweites Modell, in dem er neben der Arbeit noch Boden als zweiten Primärinput sowie die Produktion eines zweiten Konsumguts berücksichtigt. Da das Resultat des erweiterten Modells jedoch mit dem des reduzierten identisch ist, haben wir die Darstellung des einfacheren Modells vorgezogen.

Wicksell macht deutlich, daß ein gesamtwirtschaftliches Gleichgewicht erst bestimmt ist, wenn der gesamtwirtschaftlichen Kapitalnachfrage ein gegebenes und wertmäßig gleiches gesamtwirtschaftliches Kapitalangebot gegenübersteht. Genau in diesem als Wert gegebenem Kapitalangebot besteht das Problem der österreichisch-wicksellianischen Kapitaltheorie, denn wie Wicksell selbstkritisch bemerkt:

„Dagegen wäre es ja ziemlich sinn- oder zwecklos, wenn nicht sogar ganz undenkbar, dem Kapital schon im voraus, ehe Gleichgewicht zwischen Produktion und Konsumtion eingetreten ist, eine gewisse unveränderliche Größe zuerteilen zu wollen.“<sup>22</sup>

Ohne die exogene Vorgabe eines Kapitalwerts bleibt Wicksells Theorie wegen einer fehlenden Gleichung unterbestimmt, und eine gleichgewichtstheoretische Bestimmung der Faktorpreise wird unmöglich. Die Vorgabe eines Kapitalwerts außerhalb des Gleichgewichts ist aber sinnlos, weil im Prozeß der Anpassung dem Kapital kein eindeutiger Wert zugeordnet werden kann, denn sein Wert kann jeden beliebigen Wert zwischen dem Nutzungswert und den Produktionskosten annehmen. Erst im langfristigen Gleichgewicht stimmen Nutzungswert und Produktionskosten überein (vgl. Gleichung (II.22)), so daß Gleichgewicht vorausgesetzt werden muß, um das Problem der „missing equation“ zu lösen. Was zu zeigen ist, wird also vorausgesetzt.

### 3. Die Behandlung des fixen Kapitals und „Dr. Åkerman's problem“

Åkerman hat die österreichische Kapitaltheorie durch die Berücksichtigung dauerhafter Produktionsmittel wesentlich weiterentwickelt.<sup>23</sup> Wicksell hatte bereits 1923 Åkermans Buch besprochen und das darin enthaltene Fixkapital-Modell formalisiert.<sup>24</sup>

Åkermans Modell beschreibt einen zweistufigen Produktionsprozeß. In einem Sektor werden nur mittels Arbeit Fixkapitalgüter hergestellt, die in einem zweiten Sektor zusammen mit Arbeitsinputs einen Konsumgüteroutput herstellen. Die Technologie des Konsumgütersektors wird durch eine linear homogene Produktionsfunktion beschrieben, wobei der Arbeitsinput und der Input des Fixkapitalguts in einem substitutionalen Verhältnis zueinander stehen. Somit gilt:

$$(II.28) \quad X = L^\alpha M^{1-\alpha},$$

---

<sup>22</sup> K. Wicksell; Vorlesungen, a. a. O., S. 272 – 3.

Im obigen Zitat ist der Nebensatz „wenn nicht sogar ganz undenkbar“ der englischen Ausgabe entnommen, die auf der 4. schwedischen Ausgabe beruht. In der deutschen Ausgabe, die auf der 2. schwedischen Ausgabe basiert, lautet der Nebensatz noch „wenn auch nicht ganz undenkbar“. (Vgl. K. Wicksell; Lectures on Political Economy, I, London 1934, S. 202).

<sup>23</sup> G. Åkerman; Realkapital und Kapitalzins, Heft 1 u. 2, Stockholm 1923/24.

<sup>24</sup> K. Wicksell; Realkapital och Kapitalränta, Ekonomisk Tidskrift, 1923, S. 145 – 180. Die englische Übersetzung als Appendix II zum Vol. I der „Lectures on Political Economy“, London 1934, S. 258 – 299.

wobei  $X$  den Konsumgüteroutput,  $L$  den Arbeitsinput im Konsumgütersektor und  $M$  das Fixkapitalgut (Maschine) bezeichnet.

Die Maschine wird nur mit Hilfe von Arbeit erstellt. Die Lebensdauer der Maschine  $n$  variiert mit der in sie investierten Arbeit  $a$ , und zwar derart, daß die Lebensdauer der Maschine zunimmt, wenn mehr Arbeit in sie investiert wird.<sup>25</sup>

„Clearly, both increase together, but  $n$  must increase more than proportionately to  $a$ , otherwise, however low the rate of interest, labour could not be employed in producing axes (Maschinen, d. Verf.) of longer duration, but it would be employed in producing many less durable axes (Maschinen, d. Verf.) instead.“<sup>26</sup>

Es ergibt sich somit folgende Beziehung zwischen Lebensdauer und Arbeitsinput pro Maschine:

$$(II.29) \quad a = kn^\nu,$$

wobei  $\nu$  ein echter Bruch ist;  $k$  ist eine Konstante und  $k > 0$ .

Als erstes gilt es, die optimale Nutzungszeit der Maschine in der Konsumgüterproduktion bei gegebenem Lohnsatz  $w$  und Nettoertrag (Kapitalrente) der Maschine  $y$  zu bestimmen. Der Gegenwartswert einer Maschine ergibt sich aus der Kapitalisierung der Summe der bis zum Zeitpunkt  $n$  angefallenen Nettoerträge. Bei kontinuierlicher Diskontierung ist der Wert der neuen Maschine

$$(II.30) \quad y \int_0^n e^{-r\tau} d\tau = y \frac{(1 - e^{-rn})}{r}.$$

Im langfristigen Gleichgewicht sind die Produktionskosten einer neuen Maschine gleich den kapitalisierten Nettoerträgen der Maschine. Da Åkerman unterstellt, daß die Maschinen nur mit Hilfe von Arbeit produziert werden, reduzieren sich die Produktionskosten der Maschine auf die Lohnkosten im Maschinensektor, d. h.

$$(II.31) \quad wa = y \frac{(1 - e^{-rn})}{r}.$$

Um den Zinssatz  $r$  zu maximieren, wird Gleichung (II.31) nach  $n$  differenziert, wobei  $r$  zunächst als Konstante behandelt wird.<sup>27</sup>

$$(II.32) \quad w \frac{da}{dn} = ye^{-rn}.$$

<sup>25</sup> Es handelt sich hierbei um ein Fixkapital-Modell mit variabler Effizienz.

<sup>26</sup> K. Wicksell; Lectures on Political Economy, Vol. I., London 1934, S. 276.

<sup>27</sup> Wicksell differenziert die entsprechende Gleichung nach  $n$ , um den maximalen Lohnsatz  $w$  zu ermitteln, weil er annimmt, daß die Arbeiter selbst die Unternehmer sind.

Die Kosten einer marginalen Verlängerung der Nutzungsperiode sind gleich dem Gegenwartswert des in der letzten marginalen Zeiteinheit erzielten Nettoertrags der Maschine.

Im nächsten Schritt soll untersucht werden, wie sich die Nutzungszeit der Maschine ( $n$ ) ändert, wenn das Verhältnis von Nettoertrag und Lohnsatz ( $y/w$ ) variiert wird. Der von Åkerman und Wicksell untersuchte Fall ist ein möglicher Fall, denn wie bereits erwähnt, wird unterstellt, daß die Maschine nur mit Hilfe von Arbeit produziert wird und die Lebensdauer der Maschine mit steigendem Arbeitsinput (unterproportional) zunimmt. Dieser Zusammenhang wird durch Gleichung (II.29) beschrieben. Zunächst wird diese Gleichung logarithmisch nach  $n$  differenziert:

$$(II.33) \quad \frac{da}{a} = \nu \frac{dn}{n},$$

bzw.

$$(II.33') \quad \frac{da}{dn} = \nu \frac{a}{n}.$$

Setzt man (II.33') in (II.32) ein, ergibt sich:

$$(II.34) \quad wa = \frac{n}{\nu} ye^{-rn}.$$

Diese Gleichung gibt für gegebenes  $wa$  das maximale  $r$  an. Unter Berücksichtigung von Gleichung (II.31) ergibt sich:

$$(II.35) \quad \frac{y(1 - e^{-rn})}{r} = \frac{n}{\nu} ye^{-rn}.$$

Durch Umordnen erhält man:

$$(II.35') \quad e^{rn} - 1 - \frac{rn}{\nu} = 0.$$

Diese Gleichung liefert eine implizite Beziehung zwischen  $r$  und  $\nu$ . Explizit formuliert:

$$(II.35'') \quad rn = \varphi(\nu).$$

Wenn man (II.35') unter Berücksichtigung von (II.32'') in (II.34) einsetzt, erhält man:

$$(II.36) \quad wa = \frac{n}{\nu} ye^{-\varphi(\nu)}.$$

Setzt man (II.29) in (II.36) ein, ergibt sich

$$wkn^\nu = \frac{n}{\nu} ye^{-\varphi(\nu)} .$$

Durch Umordnen und Auflösen nach  $n$  ergibt sich

$$\frac{\nu wkn^\nu e^{\varphi(\nu)}}{y} = n ,$$

bzw.

$$(II.37) \quad \frac{w}{y} \nu k e^{\varphi(\nu)} = n^{1-\nu} .$$

Wenn man berücksichtigt, daß wegen (II.35') und (II.35'')

$$e^{\rho(\nu)} = 1 + \frac{\varphi(\nu)}{\nu}$$

gilt, und (II.35'') in (II.37) einsetzt, erhält man:

$$\frac{w}{y} \nu k \left( 1 + \frac{\varphi(\nu)}{\nu} \right) = n^{1-\nu} ,$$

bzw.

$$(II.38) \quad \frac{w}{y} k (\nu + \varphi(\nu)) = n^{1-\nu} .$$

In Gleichung (II.38) sind  $k$ ,  $\nu$  und  $\varphi(\nu)$  konstant, so daß sich eine eindeutige Beziehung zwischen der Faktorpreisrelation ( $w/y$ ) und der Nutzungszeit der Maschine ( $n$ ) ergibt. Steigt der Lohnsatz relativ zum Nettoertrag der Maschine, verlängert sich die Nutzungszeit der Maschine und vice versa.

Um nun im letzten Schritt die gleichgewichtige Faktorpreisrelation zu finden, muß sowohl der Nettoertrag der Maschine aus ihrer Nutzung im Konsumgütersektor wie auch der Lohnsatz der dort beschäftigten Arbeiter bestimmt werden. Unter der Voraussetzung vollkommener Konkurrenz ergeben sich die Gleichgewichtswerte für  $w$  und  $y$  aus den Bedingungen erster Ordnung für ein Gewinnmaximum.

$$\max. G = p(L^\alpha M^{1-\alpha}) - wL - yM ,$$

so daß für  $p = 1$

$$w = \frac{\partial X}{\partial L} = \alpha \frac{X}{L} \quad \text{und} \quad y = \frac{\partial X}{\partial M} = (1 - \alpha) \frac{X}{M} .$$

Da es sich um eine Ökonomie mit zwei Sektoren handelt, müssen sich die insgesamt vorhandenen Arbeitskräfte auf die Sektoren aufteilen. Es stehen  $A$  Arbeiter zur Verfügung.  $M$  werden im Maschinensektor beschäftigt, so daß  $(A - M) = L$  im Konsumgütersektor eingesetzt werden. In einem Jahr produziert ein Arbeiter  $1/a$  Maschinen und somit  $n/a$  Maschinen in  $n$  Jahren. Åkerman und Wicksell treffen die Annahme, daß der in den  $n$  Jahren aufgebaute Maschinenpark in seiner Altersstruktur aufrechterhalten wird, wenn die Zeitspanne von  $n$  Jahren – die Aufbauphase des Kapitalstocks – überschritten wird. Im  $n + 1$  Jahr wird die „älteste“ Maschine ausgesondert und durch eine neue gleicher Effizienz ersetzt.

„Within this period the number of axes (Maschinen, d. Verf.) in use will obviously continually increase, but once we get beyond  $n$ , it ceases to do so, since the oldest axes are discarded pari passu with the manufacture of new ones. Thus we have got here a fixed capital consisting of axes (Maschinen, d. Verf.), which is „staggered“ in structure and which includes  $n/a$  axes (Maschinen, d. Verf.) of various ages, and as a matter of course the number of uses available is the same at any moment.“<sup>28</sup>

Es wird also die Annahme eines stationären Kapitalstocks mit gleichmäßigm Altersaufbau getroffen.

Unter der genannten Voraussetzung lautet die Produktionsfunktion des Konsumgütersektors

$$X = (A - M)^\alpha M^{1-\alpha} (n/a)^{1-\alpha}.$$

Die Gleichgewichtswerte für die Lohnrate  $w$  und den Nettoertrag  $y$  sind:

$$(II.39) \quad w = \alpha \frac{X}{A - M},$$

$$(II.40) \quad y = (1 - \alpha) \frac{Xa}{Mn}.$$

Für das Verhältnis von Lohnrate zu Nettoertrag ( $w/y$ ) in der Konsumgüterindustrie ergibt sich:

$$(II.41) \quad \frac{w}{y} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{M}{A - M} \frac{n}{a}.$$

Für das Verhältnis von Lohnrate zu Nettoertrag ( $w/y$ ) bezüglich der optimalen Nutzungszeit der Maschine ergibt sich aus (II.34):

$$\frac{w}{y} = \frac{n}{a\nu} e^{-rn}.$$

<sup>28</sup> K. Wicksell; Lectures, Vol I., S. 281.

Unter Berücksichtigung von (II.35') und (II.35'') ergibt sich durch Einsetzen in (II.34):

$$(II.42) \quad \frac{w}{y} = \frac{n}{a(\nu + \varphi(\nu))} .$$

Die Gleichung (II.41) gibt die für gegebene Faktorpreisrelationen ( $w/y$ ) gewinnmaximale Allokation der Faktoren Arbeit und Maschinen im Konsumgütersektor an, während (II.42) die für gegeben Faktorpreisrelationen optimale Nutzungszeit der Maschinen bestimmt. Im gesamtwirtschaftlichen Optimum müssen beide Bedingungen (II.41) und (II.42) erfüllt sein, d. h.

$$(II.43) \quad \frac{M}{A - M} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{1}{\nu + \varphi(\nu)} .$$

Die rechte Seite der Gleichung besteht nur aus konstanten Größen, so daß die Aufteilung der Arbeit auf die zwei Sektoren bei gegebener Technologie konstant ist. Dieses Ergebnis hängt, wie Wicksell bemerkte, von der Wahl der speziellen Produktionsfunktionen ab.<sup>29</sup>

„Within these limits, however, capital, when it does grow, grows *exclusively* in height and not at all in breadth.“<sup>30</sup>

Die Erhöhung der Kapitalintensität resultiert aus einer Verlängerung der Nutzungszeit der Maschinen.

Wicksell untersucht weiterhin, ob zur Bestimmung der Gleichgewichtswerte der Variablen die entsprechenden Gleichungen vorliegen. Bei den Variablen handelt es sich um das reale Sozialprodukt  $X$ , den Lohnsatz  $w$ , den Zinssatz  $r$ , den Nettoertrag  $y$ , die optimale Nutzungszeit  $n$  und den gesamtwirtschaftlichen Wert des Kapitalstocks  $K$ . Diesen sechs Variablen stehen jedoch nur vier unabhängige Gleichungen (II.28), (II.39), (II.40) und (II.35') gegenüber. Die fünfte Gleichung folgt aus der Annahme eines Kapitalstocks mit gleichmäßigem Altersaufbau.

$$(II.44) \quad K = M \frac{y}{A} \frac{rn - 1 + e^{-rn}}{r^2} .$$

Berücksichtigt man Gleichung (II.31), ergibt sich

$$(II.44'). \quad K = Mnw \frac{1}{1 - e^{-rn}} - \frac{1}{rn} .<sup>31</sup>$$

<sup>29</sup> Vgl. K. Wicksell; Lectures, Vol. I, S. 287 – 288.

<sup>30</sup> Ebenda, S. 288.

<sup>31</sup> Gleichung (II.44') ist als die Formel von Champernowne und Kahn für den Wert des balancierten Kapitalbestands in die Literatur zur Kapital- und Wachstumstheorie eingegangen. Vgl. D. G. Champernowne und R. F. Kahn; The Value of Invested Capital, Review of Economic Studies 1953 – 4, Vol. 21, S. 107 – 11.

Mit (II.44) ist eine weitere Gleichung gegeben, so daß sechs endogenen Variablen fünf unabhängige Gleichungen gegenüberstehen. Das Modell bleibt unterbestimmt, wenn nicht eine der sechs endogenen Variablen vorgegeben wird. Wicksell wählt die Nutzungsperiode  $n$  der Maschine als Datum, so daß die verbleibenden Variablen unter der Vorgabe dieses Parameters gelöst werden können.

Die Gleichgewichtswerte werden durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$(II.45) \quad K = C_1 n^{1+(1-\alpha)(1-\nu)}$$

$$(II.28') \quad X = C_2 n^{(1-\alpha)(1-\nu)}$$

$$(II.39') \quad w = C_3 n^{(1-\alpha)(1-\nu)}$$

$$(II.40') \quad y = C_4 n^{-\alpha(1-\nu)}$$

$$(II.35'') \quad r = \varphi(\nu) n^{-1}$$

wobei  $C_i, i = 1, \dots, 4$ , Konstante darstellen.<sup>32</sup>

Die Beziehung zwischen der Grenzproduktivität des Kapitals und dem Zinssatz kann durch den Rückgriff auf die Gleichungen (II.28') und (II.45) dargestellt werden. Differenziert man (II.28') und (II.45) logarithmisch, so erhält man

$$(II.46) \quad \frac{dK}{K} = 1 + (1 - \alpha)(1 - \nu) \frac{dn}{n}$$

und

$$(II.47) \quad \frac{dX}{X} = (1 - \alpha)(1 - \nu) \frac{dn}{n}.$$

Somit ist

$$(II.48) \quad \frac{dX}{dK} = \frac{(1 - \alpha)(1 - \nu)}{1 + (1 - \alpha)(1 - \nu)} \frac{X}{K}.$$

---

<sup>32</sup> Die Konstante  $C_2 = (A - M)^\alpha (M/k)^{(1-\alpha)}$  ergibt sich aus der Produktionsfunktion

$$X = (A - M)^\alpha M^{1-\alpha} (n/a)^{1-\alpha}$$

wenn berücksichtigt wird, daß wegen (II.38) und (II.42)

$$n/a = w/y (\nu + \varphi(\nu)) = n^{1-\nu}/k$$

ist, so daß die Produktionsfunktion auch

$$X = (A - M)^\alpha (M/k)^{1-\alpha} n^{(1-\nu)(1-\alpha)}$$

geschrieben werden kann.

Das Verhältnis von  $X/K$  ergibt sich aus der Definitionsgleichung

$$(II.49) \quad rK = P = X - wA = (X - A)\alpha \frac{X}{A - M}.$$

Aus Gleichungen (II.43) und (II.28) lassen sich die Werte  $M$  und  $A - M$  als Funktion der Konstanten  $\nu$  und  $\alpha$  wie folgt ausdrücken:

$$(II.43') \quad M = \frac{(1 - \alpha)A}{\alpha(\nu + \varphi(\nu)) + (1 - \alpha)},$$

$$(II.43'') \quad A - M = \frac{\alpha(\nu + \varphi(\nu))A}{\alpha(\nu + \varphi(\nu)) + (1 - \alpha)}.$$

Berücksichtigt man (II.43') und (II.43'') in (II.49) und formt um, so ergibt sich:

$$(II.50) \quad \frac{X}{K} = r \frac{\nu + \varphi(\nu)}{(1 - \alpha)(\nu + \varphi(\nu) - 1)}.$$

Setzt man die rechte Seite von (II.50) für  $X/K$  in (II.48) ein, so ergibt sich:

$$(II.51) \quad \frac{dX}{dK} = r \frac{1 - \nu}{(1 - \alpha)(1 - \nu) + 1} \frac{\nu + \varphi(\nu)}{\nu + \varphi(\nu) - 1}.$$

Diese Gleichung offenbart eine Beziehung zwischen dem Zinssatz und der Grenzproduktivität des Kapitals, die Wicksell und Åkerman irritierte. Denn es zeigt sich, daß der Zinssatz nicht nur größer, sondern auch kleiner als die Grenzproduktivität des Kapitals sein kann. Das hängt, wie man leicht sieht, bei gegebenem  $\nu$  von der Höhe der partiellen Produktionselastizität der Maschinen ( $1 - \alpha$ ) im Konsumgütersektor ab. Läßt man für gegebenes  $\nu > 0$ ,  $(1 - \alpha)$  kleiner werden, so kommt man von einem Bereich, in dem der Zinssatz größer als die Grenzproduktivität des Kapitals ist, in einen anderen, in dem er kleiner als die Grenzproduktivität des Kapitals ist.

Selbst wenn man wie Åkerman die marginale Änderung des Kapitals  $dK$  um die Lohnabsorption  $Kdw/w$  bereinigt, d. h.

$$\frac{dX}{dK - K \frac{dw}{w}}$$

bildet, bleibt das irritierende Resultat erhalten.<sup>33</sup> Wicksell hatte für dieses Resultat – den negativen Preis-Wicksell-Effekt – keine Erklärung.

---

<sup>33</sup> Vgl. K. Wicksell; Lectures, Vol. I, S. 292 – 293.

„I cannot enter now on the explanation of this very puzzeling formula; presumably it belongs to the sphere of „dynamic“ theory, where we cannot confine ourselves to the comparison of two different equilibria, but must also study the transition from one to the other.“<sup>34</sup>

Die von Wicksell ausgesprochene Vermutung, die Klärung solcher kapitaltheoretischen Phänomene sei möglicherweise eine Aufgabe der „dynamischen“ Theorie, ist recht interessant, weil sie die tatsächliche Weiterentwicklung der Kapitaltheorie, insbesondere ihre Integration in eine „dynamische“ Theorie der Preisbildung, bereits andeutet.

Der negative Preis-Wicksell-Effekt ergibt sich, wenn bei einer marginalen Erhöhung des eingesetzten Kapitals die Zunahme der Lohnkosten im Kapitalgütersektor durch einen Rückgang des Kapitalgutpreises überkompensiert wird und diese Kapitalgüter Inputs im Konsumgütersektor darstellen. Der Rückgang der Kapitalgüterpreise kommt trotz einer Erhöhung des Lohnsatzes zustande, wenn die Proportion zwischen Produktionsmitteln und Arbeit im Kapitalgütersektor groß ist, so daß der Anstieg der Lohnkosten durch einen Rückgang der Kapitalkosten, ausgelöst durch einen gesunkenen Zinssatz, überkompensiert wird. Neben dem Absorbtionseffekt einer Lohnerhöhung im Fall des positiven Preis-Wicksell-Effekts kommt es beim negativen Preis-Wicksell-Effekt zu einem sogenannten Kapitalfreisetzungseffekt.

Spätestens seit der kapitaltheoretischen Debatte der sechziger Jahre ist bekannt, daß in Modellen mit zirkulierendem Kapital ein negativer Preis-Wicksell-Effekt auftritt, wenn die Kapitalgüterproduktion kapitalintensiver als die Konsumgüterproduktion ist. Übertragen auf das Åkerman-Modell bedeutet das, daß ein negativer Preis-Wicksell-Effekt erwartet werden kann, wenn die Maschinenproduktion nicht nur Arbeit allein, sondern auch Maschinen erfordert. Je höher das Input-Verhältnis von Maschinen zu Arbeit in der Maschinenproduktion, desto wahrscheinlicher wird das Auftreten eines negativen Preis-Wicksell-Effekts.

Die Bedeutung der Preis-Wicksell-Effekte für die logische Kohärenz der neoklassischen Theorie des langperiodigen Gleichgewichts wurde auch nach ihrer „Wiederentdeckung“ durch J. Robinson<sup>35</sup> in den fünfziger Jahren völlig unterschätzt. So bemerkte Swan dazu:

„The Wicksell effect is nothing but an inventory revaluation.“

„Once it is realized that the Wicksell effect merely reflects a revaluation of the capital stock, it is no longer puzzeling that it may go in either direction.“<sup>36</sup>

„The revaluation of a given machine in an opposite direction to the wage rate (...) is a reverse Wicksell effect, but there is nothing perverse about it, ...“

<sup>34</sup> Ebenda, S. 213.

<sup>35</sup> Vgl. J. Robinson; The Production Function and the Theory of Capital, R.E.S., 1953–4, Vol 21, S. 107–111. dieselbe; The Production Function, E. J. 1955, Vol. 65, S. 67–71.

<sup>36</sup> T. W. Swan; Economic growth and capital accumulation, Economic Record, 1956, Vol. 32, S. 343–61.

Erst im Rahmen der kapitaltheoretischen Kontroverse wurde die Bedeutung der Wicksell-Effekte für die innere Logik der Theorie von Angebot und Nachfrage vollends herausgearbeitet.

Die durch Wicksell und Åkerman ausformulierte Version der neoklassischen Theorie des langperiodigen Gleichgewichts erwies sich in zwei Punkten als logisch inkonsistent. Die Theorie ermöglicht nur unter der Voraussetzung eines exogen und wertmäßig gegebenen Kapitalbestands die Bestimmung der relativen Güter- und Faktorpreise. Da dieser Kapitalwert selbst mit den relativen Faktorpreisen variiert, d. h. von diesen abhängt, wird das vorausgesetzt, was zu zeigen ist. Wicksell war sich – wie erwähnt – dessen bewußt. Die zweite Inkonsistenz betrifft die Logik der Theorie von Angebot und Nachfrage in ihrer Anwendung auf die Faktoren Kapital und Arbeit. Beim positiven Preis-Wicksell-Effekt wird trotz der Abweichung des Zinssatzes von der Grenzproduktivität des Faktors Kapital die Logik der Theorie von Angebot und Nachfrage, daß nämlich eine Zinssenkung relativ zum Lohnsatz eine Erhöhung der Kapitalintensität bewirkt, nicht verletzt. Nicht so im Falle des negativen Preis-Wicksell-Effekts. Eine Senkung des Zinssatzes relativ zum Lohnsatz bewirkt in diesem Fall keine Erhöhung, sondern eine Verminderung der Kapitalintensität. Während im ersten Punkt die problematischen Voraussetzungen bezüglich der Existenz eines allgemeinen langperiodigen Gleichgewichts deutlich werden, zielt der zweite Punkt auf die für die Theorie von Angebot und Nachfrage wichtige Idee der Allokation und Selbstregulation marktwirtschaftlicher Systeme. Wenn nämlich auf eine Senkung des Zinssatzes eine Kapitalfreisetzung und keine Kapitalintensivierung folgt, läßt sich der Zinssatz nur schwerlich als Knappheitsindikator begreifen.

Nachdem es Walras nicht gelang, die Existenz eines allgemeinen Gleichgewichts mit Kapitalbildung – ein langperiodiges Gleichgewicht also – mit Hilfe des Konzepts von Angebot und Nachfrage nachzuweisen, scheiterte auch die von Wicksell weiterentwickelte österreichische Variante an den genannten Inkonsistenzen. Der Versuch der neoklassischen Theorie, das in der klassischen Theorie ausgearbeitete Konzept des langfristigen Gleichgewichts mit dem auf die Faktormärkte übertragenen Konzept von Angebot und Nachfrage zu vereinen, mußte als gescheitert angesehen werden. Die Problematik dieser intendierten Vereinheitlichung des Erklärungsansatzes kulminierte bei Walras in der Schwierigkeit, die Existenz einer uniformen Zinssrate als Charakteristikum eines langfristigen Gleichgewichts mit der Annahme einer beliebigen Anfangsausstattung von Gütern zu verbinden.

Beide Versionen der neoklassischen Theorie standen somit vor dem gleichen Problem: Es gelang ihnen nicht, das von der klassischen Nationalökonomie übernommene Konzept des langfristigen Gleichgewichts mit Hilfe des verallgemeinerten Erklärungsmusters von Angebot und Nachfrage konsistent zu verbinden. Eine Lösung des Problems hätte in einer Rückbesinnung und Aufarbeitung der klassischen Theorie bestehen können. Daß dieser Weg nicht mehrheitlich eingeschlagen wurde, dürfte u. a. daran gelegen haben, daß die klassische Theorie als Wegbereiter

der Arbeitswertlehre, bzw. die Arbeitswertlehre als einzige denkbare Kulmination der klassischen Theorie, angesehen wurde.

Die andere Alternative bestand darin, das Erklärungsmuster von Angebot und Nachfrage beizubehalten und das Konzept einer langperiodigen Gleichgewichtsposition aufzugeben. Dieser Weg wurde von Erik Lindahl, einem Schüler Wicksells, nicht nur auf dem Gebiet der Preis- und Kapitaltheorie, sondern auch in der Makroökonomie konsequent beschritten.

#### **4. Die Integration der österreichischen Kapitaltheorie in die walrasianische Allgemeine Gleichgewichtstheorie: Erik Lindahl**

Lindahls Arbeiten zum Ende der 20er Jahre stellen den Versuch dar, mit dem Konzept der Statik – Lindahls Synonym für das langfristige Gleichgewicht – zu brechen. Für Lindahl stellt die statische Analyse einen Spezialfall der Dynamik dar.<sup>37</sup>

„Properly interpreted, static theory also has for an object economic developments taking place in time, only the variables studied do not change their values with the lapse of time. (...) Only one value must therefore be determined for each variable, which of course considerably simplifies the solution of the problem.“<sup>38</sup>

Eine erste und ausführliche Darstellung der von ihm als Dynamik gekennzeichneten Methodik findet sich in seiner Abhandlung „The Place of Capital in the Theory of Price“<sup>39</sup>. Die dynamische Methode gestattet im Unterschied zur statischen die Analyse von nichtstationären Prozessen.

„This dynamic process is in reality continuous, but its analysis will be facilitated if it is subdivided into relatively short periods of time during which prices are assumed to remain unaltered. The changes are accordingly assumed to take place at the points of transition between the different periods, and in each period the average state is assumed to last during the entire period.“<sup>40</sup>

Hicks hatte diese Methode aufgegriffen, weiterentwickelt und ihr den seitdem feststehenden Begriff der „temporären Gleichgewichtsmethode“ gegeben.<sup>41</sup>

---

<sup>37</sup> Vgl. E. Lindahl; Studies in the Theory of Money and Capital, New York 1939, S. 31 – 35 (im folgenden zitiert als „Studies“).

<sup>38</sup> Ebenda, S. 31 – 32.

<sup>39</sup> Der Aufsatz erschien in schwedischer Sprache: „Prisbildningsproblemets uppläggning från kapitalteoretisk synpunkt“, in: Ekonomisk Tidskrift, 1929. Die englische Übersetzung findet sich in: E. Lindahl; Studies in the Theory of Money and Capital, a. a. O., S. 271 – 350.

<sup>40</sup> E. Lindahl; Studies, a. a. O., S. 318 – 9.

<sup>41</sup> Vgl. J. R. Hicks; Value and Capital, Oxford 1939, 2<sup>nd</sup> edition 1946. Hicks hat den Einfluß Lindahls auf sein eigenes Denken stets hervorgehoben. Vgl. hierzu auch: J. R. Hicks, Methods of Dynamic Economics, Oxford 1985, S. 63 – 80.

„Die erste allgemeine mathematische Untersuchung einer Volkswirtschaft, deren Aktivität sich über eine endliche Anzahl von Grundintervallen bei vollständiger Voraussicht erstreckt, wurde von E. Lindahl durchgeführt.“<sup>42</sup>

Lindahl greift in seinem Beitrag die Dilemmata der beiden Richtungen der neoklassischen Theorie auf und versucht, durch eine geschickte Synthese die Grundidee der neoklassischen Theorie unter Preisgabe des klassischen Gleichgewichts der langen Periode zu retten.

Lindahl beginnt seine Abhandlung mit einer Kritik des Walrasschen Produktionsmodells. Diese Kritik umfaßt auch die Grundmodelle von Bowley und Cassel, da sie im wesentlichen dem Walrasschen Modell entsprechen. Er wiederholt Wicksells Kritik an Walras, indem er auf dessen atemporale Konzeption des Produktionsprozesses verweist, die sowohl zirkulierendes Kapital als auch eine endogene Bestimmung der Reinvestition von fixem Kapital ausschließt.

„Walras' treatment of capital is less penetrating than that of the Böhm-Bawerkians. By regarding the replacement ratio for the capital goods and therefore their duration as a datum he excludes the possibility of a study of the important connection between the length of time of investment and the rate of interest.“<sup>43</sup>

Andererseits sieht Lindahl in der Integration des Kapitals in die allgemeine Preistheorie den Vorteil der Walrasschen gegenüber der österreichischen Kapitalzinstheorie.<sup>44</sup> Das zweite von ihm in seiner Abhandlung präsentierte Modell vereint daher auch Elemente der Wicksellschen mit solchen der Walrasschen Theorie.<sup>45</sup> Lindahl verallgemeinert die Wicksellsche Kapitaltheorie, indem er die Zahl der Originärfaktoren auf  $n$  und die der Konsumgüter auf  $m$  erweitert. Somit kann die Produktion der  $m$  Konsumgüter als Ausreifungsprozeß der  $n$  Originärfaktoren begriffen werden. Alle zirkulierenden Kapitalgüter lassen sich auf die gegebenen Originärfaktoren zurückführen. Da keine Rückversetzung erfolgt, liegt eine mehrgleisig lineare Produktionsstruktur vor, d. h. statt einer „Einbahnstraße“ wie bei Böhm-Bawerk, liegen viele „Einbahnstraßen“ vor. Auch dieses verallgemeinerte Wicksell-Modell ist unterdeterminiert, so daß zu seiner Schließung entweder der Wert des Kapitals oder die durchschnittliche Investitionsperiode exogen vorgegeben werden muß.<sup>46</sup> Die durchschnittliche Investitionsperiode könnte als Maß des Kapitals jedoch nur herangezogen werden, wenn sie unabhängig vom Zinssatz wäre. Böhm-Bawerks Methode mit dem einfachen Zins zu rechnen spricht Lindahl jeglichen wissenschaftlichen Wert ab. Bei Berücksichtigung von Zinseszins ist die durchschnittliche Investitionsperiode  $T$  als Maß nicht unabhängig vom Zinssatz.

<sup>42</sup> G. Debreu; Werttheorie, Berlin-Heidelberg 1976, S. 44, engl. Ausgabe, New York 1959.

<sup>43</sup> E. Lindahl; Studies, a. a. O., S. 295.

<sup>44</sup> Vgl. E. Lindahl; Studies, a. a. O., S. 294 – 5.

<sup>45</sup> Bent Hansen nennt es „a Walrasian System with capital à la Wicksell“. Vgl. B. Hansen; A Survey of General Equilibrium Systems, New York 1970, S. 200.

<sup>46</sup> Vgl. E. Lindahl; Studies, a. a. O., S. 308.

„ $T$  is thus a function of  $i$ . Since  $i$  is unknown, what is given is the form of the function, not the value of  $T$ .“<sup>47</sup>

Beide Meßkonzepte, so Lindahl

„(....) have the disadvantage, that the measure of capital is made dependent on the prices of the services invested and on the rate of interest – which belong to the unknown factors of the problem.“<sup>48</sup>

Den Grund für die Probleme sieht Lindahl im Konzept des langperiodigen Gleichgewichts, d. h. im Defizit der statischen Methode, die eben nur die Analyse und den Vergleich stationärer Zustände erlaube.

„The difficulties here mentioned are associated with the stationary setting of the problem. (...) Therefore the attempt must be made to build up on this foundation an improved analysis which will have more general validity.“<sup>49</sup>

Mit seiner Abwendung von stationären Prozessen will Lindahl auch die kapitaltheoretischen Kalamitäten des Walras-Wicksell-Modells überwinden. Somit wird zunächst die Vorstellung eines sich in gleichen Proportionen reproduzierenden Systems durch die einer Folge sich ändernder Periodengleichgewichte ersetzt. Da vollkommene Voraussicht unterstellt wird, können die Wirtschaftssubjekte schon in der Anfangsperiode ihre Pläne für den gesamten Zeithorizont  $T$  aufstellen.

„The problem may thus be stated as follows: if the factors which take an active part in the formation of prices in all periods entering into the dynamic process are known, what will be the price situations in these various periods?“<sup>50</sup>

Für jede Einheitsperiode – die Analogie zur „Hicksschen Woche“ liegt auf der Hand – werden die Preisbestimmungsfaktoren herangezogen, die auch im stationären Fall wirken: Es sind die preisabhängigen Angebots- und Nachfragepläne der einzelnen Wirtschaftssubjekte. Der Unterschied zum stationären Fall besteht darin, daß die mit den Angebots- und Nachfrageplänen der Wirtschaftssubjekte konsistenten Preise (Preisvektoren) nicht in jeder Einheitsperiode gleich sein müssen. Ein sich für alle Perioden  $t, t = 1, \dots, T$  identisch wiederholendes Preissystem muß durch ein intertemporales Preissystem ersetzt werden, das die allerdings sicher vorhersehbaren Angebots- und Nachfrageverhältnisse in den Perioden  $t, t = 1, \dots, T$  widerspiegelt.<sup>51</sup> Zur Bestimmung des intertemporalen Preissystems benötigt man

<sup>47</sup> Ebenda, FN, S. 308.

<sup>48</sup> Ebenda, S. 317 FN.

<sup>49</sup> Ebenda, S. 317.

<sup>50</sup> Ebenda, S. 319.

<sup>51</sup> Im letzten Kapitel seines Beitrags gibt Lindahl die Annahme vollkommener Voraussicht auf. Er untersucht das Problem unvorhergesehener Datenänderung, z. B. Änderungen des Sparverhaltens. Des Weiteren skizziert er die objektiven und subjektiven Aspekte der Erwartungsbildung. Lindahl hat damit auch den Grundstein für die temporäre Gleichgewichtsmethode gelegt, die man eigentlich eher mit Hicks in Verbindung bringt. Hicks deutet ja Lin-

zusätzliche Informationen über die exogenen Daten des Modells. Hierzu zählen neben der Produktionstechnologie und den Präferenzen der Wirtschaftssubjekte eine Information über den Zustand der Ökonomie zu Beginn und am Ende, bzw. jenseits des Planungshorizonts  $T$ , bzw.  $T + 1$ . Anstatt der Vorgabe des Kapitals als Wertgröße kehrt Lindahl zur Walrasschen Vorgehensweise zurück und gibt einen Vektor realer Kapitalgüter als Anfangsbestände vor, deren Zusammensetzung prinzipiell willkürlich ist.

„During the initial period in the dynamic process under observation, all existing capital equipment in the community can be regarded as original, including any that has actually resulted from the production of earlier periods not covered by the analysis. (...) the question of its actual origin is irrelevant.“<sup>52</sup>

Das Ende des Planungshorizonts kann recht unterschiedlich beschrieben werden. Auf die verschiedenen Möglichkeiten wird an späterer Stelle noch ausführlich eingegangen. An dieser Stelle seien sie nur kurz genannt. So kann man verlangen, daß am Ende der Planungsperiode, d. h. in der Periode  $T$  nur noch Konsumgüter zur Verfügung stehen. Die Begründung hierfür könnte lauten: Produktion von Kapitalgütern dient letztlich immer nur dem Ziel der Bedürfnisbefriedigung, d. h. der Konsumtion. Will man jedoch die Vorstellung vermeiden, bei  $T$  handele es sich um den Weltuntergang, so daß auch in  $T + 1$  noch Produktion stattfinden soll, könnte man Endbestände von Kapitalgütern für  $T$  vorgeben. Eine dritte Möglichkeit besteht darin, einen unendlichen Planungshorizont anzunehmen. Lindahl selbst wählte eine vierte Möglichkeit. Bei ihm herrscht jenseits des Planungshorizonts wieder Stationarität.

Lindahls Theorie läßt sich somit wie folgt skizzieren: Zu Beginn des Planungszeitraums wird eine beliebige Anfangsausstattung, bestehend aus Konsumgütern, Primärfaktoren (Arbeit und Land) und Kapitalgütern exogen vorgegeben. In den folgenden Perioden werden nur die Primärfaktoren, also solche Ressourcen exogen vorgegeben, die nicht produziert werden. Alle anderen Güter sind Zwischenprodukte (Kapitalgüter), die als aufgespeicherte Leistungen der Primärfaktoren, mit denen sie produziert werden, aufzufassen sind und sukzessiv zu Konsumgütern transformiert werden. Da vollkommene Voraussicht angenommen wird, stellen die Wirtschaftssubjekte ihre sich über den gesamten Zeitraum erstreckenden Angebots- und Nachfragepläne auf, die somit schon zu Beginn des Planungszeitraums konsistent koordiniert werden können. Lindahls Theorie basiert somit auf einer Synthese von Walrasschen und Wicksellschen Elementen. Die Vorgabe einer Anfangsausstattung und die Multisectoralität entstammt der Walrasschen Tradition, die Konzeption des zirkulierenden Kapitals der Wicksellschen. Seine Theorie läßt sich modelltheoretisch wie folgt darstellen. Als endogene Variablen müssen bestimmt werden:

---

dahls Einfluß auf sein eigenes Denken an. Vgl. hierzu; J. R. Hicks; Methods of Dynamic Economics, Oxford 1985, S. 62 FN.

<sup>52</sup> E. Lindahl; Studies, a. a. O., S. 320.

$C_t$ : die Nachfrage nach  $m$  Konsumgütern in jeder der insgesamt  $T$  Perioden;  $i = 1, \dots, m; t = 1, \dots, T$ . Somit  $(mT)$  Konsumgüternachfragen.

$p_{ct}$ : die Preise der Konsumgüter.  $(mT)$

$N_t^s$ : Das Angebot von  $l$  Primärfaktoren in jeder der insgesamt  $T$  Perioden;  $s = 1, \dots, l; t = 1, \dots, T$ .  $(lT)$

$p_{nt}^s$ : Die Preise der Dienste dieser  $m$  Primärfaktoren in den  $t$  Perioden;  $s = 1, \dots, l; t = 1, \dots, T$ .  $(lT)$

$N_{rt}^{si}$ : Die Menge des Primärfaktors  $s$  der zur Produktion des Konsumguts  $i$  in Periode  $t$  investiert wurde und in Periode  $\tau$  als Konsumgut ausreift. Da die Periode, in der der Faktor investiert wird, nicht größer als die Periode, in der er ausreift und höchstens  $t = \tau$  sein kann, ergibt sich für die Zahl der zu bestimmenden Primärfaktoren  $1/2m lT(1 + T)$ ,  $s = 1, \dots, l; i = 1, \dots, m; \tau = 1, \dots, t; t = 1, \dots, T$ .

$r_t$ : der in Periode  $t$  herrschende Zinssatz;  $t = 1, \dots, T$ .  $(T)$

Die Gesamtzahl der endogenen Variablen beläuft sich somit auf  $2mT + 2lT + 1/2mlt(1 + T) + T$ . Zur Bestimmung dieser Variablen finden sich bei Lindahl die folgenden Gleichungen.

Das Angebot von Primärfaktoren in Periode  $t$  hängt von allen Preisen der Konsumgüter, der Primärfaktoren und den Zinssätzen ab.

$$(II.52) \quad \begin{aligned} N_t^s &= F_t(p_{c1}^1, \dots, p_{cl}^m; p_{n1}^1, \dots, p_{nl}^l; r_1; \\ &\quad p_{c2}^1, \dots, p_{c2}^m; p_{n2}^1, \dots, p_{n2}^l; r_2; \dots, p_{cT}^1, \dots, p_{cT}^m; \\ &\quad p_{nT}^1, \dots, p_{nT}^l; r_T), \\ &\quad s = 1, \dots, l, \quad t = 1, \dots, T. \quad (lT) \end{aligned}$$

Analog gilt für die Nachfrage nach Konsumgütern:

$$(II.53) \quad \begin{aligned} C_t &= F_t(p_{c1}^1, \dots, p_{cl}^m; p_{n1}^1, \dots, p_{nl}^l; r_1; \\ &\quad p_{c2}^1, \dots, p_{c2}^m; p_{n2}^1, \dots, p_{n2}^l; r_2; \dots, p_{cT}^1, \dots, p_{cT}^m; \\ &\quad p_{nT}^1, \dots, p_{nT}^l; r_T), \\ &\quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T. \quad (mT) \end{aligned}$$

Im Unterschied zu Walras unterstellt Lindahl variable Inputkoeffizienten<sup>53</sup>. Die Inputproportionen der Zwischenprodukte hängen danach von den Preisen der Primärfaktoren und den Zinssätzen ab, weil sich die Preise der Zwischenprodukte auf den Wert der investierten und somit verzinsten Primärfaktoren reduzieren lassen.

<sup>53</sup> Walras ging später zu variablen Inputkoeffizienten über. Vgl. L. Walras; Elements of Pure Economics, Homewood, Ill. 1954, S. 382 ff.

$$\begin{aligned}
 \frac{N_{\tau t}^{si}}{C_t} &= F_{\tau t}^{si}(p_{n1}^1, \dots, p_{n1}^l; r_1; \dots; p_{nt}^1, \dots, p_{nt}^l; r_t), \\
 s &= 1, \dots, l, \\
 (II.54) \quad i &= 1, \dots, m, \\
 \tau &= 1, \dots, t, \\
 t &= 1, \dots, T. \quad \left( \frac{1}{2} mlT(1 + T) \right)
 \end{aligned}$$

Bei vollkommener Konkurrenz müssen die Preise der Konsumgüter den Produktionskosten entsprechen. Die Produktionskosten ergeben sich aus den mit ihren Preisen bewerteten Inputs der Primärfaktoren einschließlich den darauf aufgelaufenen Zinsen.

$$\begin{aligned}
 p_{c1}c_1 &= \sum_{s=1}^m p_{n1}^s N_{11}^{si} \\
 p_{c2}c_2 &= \sum_{s=1}^m p_{n2}^s N_{22}^{si} + P_{n1}^s N_{12}^{si}(1 + r_1) \\
 p_{cT}c_T &= \sum_{s=1}^m p_{nT}^s N_{nT}^{si} + p_{n,T-1}^s N_{T-1,T}^{si}(1 + r_{T-1}) \\
 \text{für } i &= 1, \dots, m. \quad (mT)
 \end{aligned}
 \tag{II.55}$$

Bleibt noch sicherzustellen, daß die insgesamt nachgefragten Primärfaktoren dem Angebot entsprechen. Die Nachfrage in der Periode  $t$  nach Primärfaktor  $s$  in der Produktion von Konsumgut  $i$  setzt sich aus den in der Periode  $t$  eingesetzten Primärfaktoren und den in Periode  $T$  investierten und in  $t$  ausreifenden Primärfaktoren zusammen. Da Lindahl annimmt, daß die Ökonomie ab  $T + 1$  stationär ist, werden im Planungszeitraum auch Fixkapitalgüter mit unendlicher Lebensdauer produziert, die ab  $T + 1$  einen unendlichen Strom von Diensten abgeben. Dieser Strom muß in kapitalisierter Form berücksichtigt werden. Es ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 N_1^s &= \sum_{i=1}^m N_{11}^{si} + N_{12}^{si} + \dots + N_{1T}^{si} \frac{(1 + r_T)}{r_T} \\
 N_2^s &= \sum_{i=1}^m N_{22}^{si} + N_{23}^{si} + \dots + N_{2T}^{si} \frac{(1 + r_T)}{r_T} \\
 (II.56) \quad N_T^s &= \sum_{i=1}^m N_{T1}^{si} + N_{T2,T}^{si} + \dots + N_{T-2,T}^{si} \dots + N_{1T}^{si}, \\
 \text{für } s &= 1, \dots, l.
 \end{aligned}$$

Es ergeben sich somit  $lT$  Gleichungen.<sup>54</sup>

---

<sup>54</sup> Die letzte Gleichung von System (5) verdeutlicht Lindahls Annahme, daß sich die Ökonomie ab  $T + 1$  in der Stationarität befindet. Alle in  $T$  ausreifenden Primärfaktoren müssen nämlich ersetzt werden. Wäre Periode  $T$  „doomsday“, würde diese Gleichung wegfallen.

Lindahl konstatiert, daß zur Bestimmung der  $2mT + 2lT + 1/2mlT(1 + T) + T$  Variablen nur  $2mT + 2lT + 1/2mlT(1 + T)$  Gleichungen zur Verfügung stehen. Zur Bestimmung der endogenen Variablen fehlen somit  $T$  zusätzliche Gleichungen. Lindahl schlägt folgende Lösung vor:

„If we had expressed all prices in a certain consumption good, the number of unknowns would have been reduced by 1 for each period, and the problem would then have been fully determined.“<sup>55</sup>

Lindahls Lösungsvorschlag ist nicht völlig eindeutig, denn er läßt mindestens zwei Interpretationen zu. Akzeptiert man den strengen Gutsbegriff der intertemporalen Methode und begreift auch stofflich gleiche als verschiedene Güter, wenn sie zu unterschiedlichen Zeitpunkten zur Verfügung stehen, dann bedeutet Lindahls Vorschlag, daß alle Preise durch ein bestimmtes Gut einer Periode dividiert werden. Da die Wirtschaftssubjekte zu Beginn der Planungsperiode ihre Angebots- und Nachfragepläne aufstellen, macht es Sinn, alle Preise auf den Wert des Numéraires in der Basisperiode zu beziehen. Auf den ersten Blick scheint sich hierdurch der Unbestimmtheitsgrad jedoch nur um einen auf  $T - 1$  reduziert zu haben. Die in dieser Weise normierten Preise sind indes nichts anderes als diskontierte Preise, d. h. intertemporale Tauschverhältnisse. Da der Zinssatz der Periode  $t$ ,  $r_t$ , aus dem Verhältnis des laufenden Preises des Numéraires zu dessen diskontierten Preis resultiert, beinhaltet die Normierung auf diskontierte Preise, daß die Periodenzinssätze als Variablen eliminiert werden. Durch die Normierung auf diskontierte Preise werden somit  $T - 1$  Periodenzinssätze als Variable eliminiert. Eine andere Interpretationsmöglichkeit besteht darin, am traditionellen Gutsbegriff, der die stofflichen Eigenschaften betont, festzuhalten. Weizen bleibt dann das gleiche Gut, egal ob es sich um Weizen der gegenwärtigen oder irgendeiner zukünftigen Periode handelt.

Unter dieser Voraussetzung werden die Preise aller Perioden mit einem periodenbezogenen Numéraire normiert, d. h. wenn man das  $i - te$  Konsumgut zum Numéraire macht, gilt:

$$p_{c1} = 1, p_{c2} = 1, \dots, p_{cT} = 1$$

Man erhält damit  $T$  zusätzliche Gleichungen, so daß das Modell geschlossen ist und alle Periodenzinssätze  $r_t$ ,  $t = 1, \dots, T$  bestimmt sind. Unter Berücksichtigung des Walras-Gesetzes reduziert sich die Zahl der unabhängigen Gleichungen auf  $T - 1$ , so daß auch nur  $T - 1$  Numéraire-Gleichungen nötig sind.

Beide Interpretationen machen deutlich, daß die Bestimmung des Zinssatzes, bzw. der Periodenzinssätze nur durch die Wahl eines Numéraires möglich wird. Die Periodenzinssätze sind die Eigenzinssätze des Numéraires in der jeweiligen Periode. Da die Wahl eines Numéraires prinzipiell arbiträr ist, beinhaltet dieser

---

<sup>55</sup> E. Lindahl; Studies, a. a. O., S. 327.

Lösungsvorschlag, daß die Vorgabe des  $i$  – ten Konsumguts als Numéraire in jeder Periode gleichbedeutend ist mit der exogenen Vorgabe der Periodenzinssätze.<sup>56</sup>

Während Wicksell den Wert des Kapitals oder die Produktionsperiode exogen vorgeben mußte, um den Zinssatz im stationären Zustand zu bestimmen, hat Lindahl in seinem intertemporalen Modell ein ähnliches Problem: Die Bestimmung der Periodenzinssätze hängt von der exogenen Vorgabe des Numéraires ab. Da prinzipiell alle Güter als Numéraire gewählt werden können, gibt es somit so viele Periodenzinssätze wie Numéraire-Güter. Dieses Phänomen sollte zum Gegenstand der Auseinandersetzung zwischen Hayek und Sraffa werden.<sup>57</sup>

Ein weiteres Problem ergibt sich aus der Frage, wie der Wert des Numéraire-Guts selbst und damit sein Eigenzinssatz bestimmt ist. Auf dieses Problem wollen wir nicht eingehen, denn es würde uns zu weit vom Thema wegführen. Handelt es sich bei dem Numéraire um ein produziertes Gut, stellt sich unvermeidlich Ricardos Frage nach dem unveränderlichen Wertmaßstab.<sup>58</sup> Soll es sich um Geld handeln, ein Vermögensgut, dessen Produktionskosten in keiner Beziehung zu seinem Preis stehen, dann ergeben sich Probleme, die im Rahmen der „Patinkin-Kontroverse“<sup>59</sup> diskutiert wurden.

Lindahls Modell des intertemporalen Gleichgewichts ermöglicht keine endogene Bestimmung der Periodenzinssätze. Der Versuch, die temporale Kapitaltheorie Wicksells mit der multisektoralen Walrasschen Theorie zu verbinden, um damit Wicksells Problem der „fehlenden Gleichung“ zu lösen, ist mißglückt. Lindahl weist mit seinem Ansatz jedoch den Weg, wie Kapitalbildung als intertemporale Allokation begriffen werden kann.

---

<sup>56</sup> Vgl. B. A. Hansson; The Stockholm School and the Development of Dynamic Method, London 1982, S. 63.

<sup>57</sup> Vgl. P. Sraffa; Dr. Hayek on Money and Capital, Economic Journal 1932, und derselbe; A Rejoinder, Econ. Journal 1932. F. A. v. Hayek; Money and Capital: A Reply to Mr. Sraffa, Economic Journal 1932.

<sup>58</sup> Vgl. D. Ricardo; On the Principles of Political Economy and Taxation; The Works and Correspondence of David Ricardo, herausg. von P. Sraffa, Vol. I, Cambridge 1951, S. XXXff.

<sup>59</sup> Es handelt sich um die Probleme der Verbindung von Wert- und Geldtheorie; Vgl. L. J. Mauer; The Patinkin Controversy: A Review, Kyklos 1966, S. 299 – 314.

### III. Die Theorie der intertemporalen Allokation

#### 1. Die Modellstruktur

##### a) Zeit, Güter, Kapitalgüter

Den Ausgangspunkt der intertemporalen Allgemeinen Gleichgewichtstheorie bildet das von Schlesinger<sup>1</sup> und Wald<sup>2</sup> verallgemeinerte Walras-Cassel-Modell<sup>3</sup>. Erst durch den bahnbrechenden Beitrag von Malinvaud<sup>4</sup> finden Lindahls kapitaltheoretische Arbeiten Eingang in die intertemporale Allgemeine Gleichgewichtstheorie, obwohl diese auf den ersten Blick die Produktion produzierter Produktionsmittel nicht berücksichtigt.

„The reader acquainted with welfare economics and the theory of efficient allocation of resources knows how some appropriate price system is associated with an efficient state. (...) The model introduced to prove this result does not allow explicitly for investment and capital accumulation. Thus one may wonder whether it can be extended to the case of capitalistic production. Admittedly, this is very likely. The introduction of time does not seem to imply any new principle.“<sup>5</sup>

Daß Güterallokation über mehrere Perioden hinweg für die Allgemeine Gleichgewichtstheorie kein Problem darstellt, deutete Debreu bereits zwei Jahre zuvor an:

„If the activity of the economic system extends over  $t$  successive time intervals of equal length, the subscript  $h$  can be made to characterize the time interval as well. Nothing is changed in the preceding analysis; (...).“<sup>6</sup>

Wie bereits bei Lindahl wird der ökonomische Prozeß in eine prinzipiell unendliche Zahl von Einheitsperioden zerlegt. Güter sind dann nicht nur durch ihre stofflichen Eigenschaften, sondern auch durch die Zeitperiode, in der sie verfügbar sind, definiert. Kapitalgüter sind produzierte Güter, die nicht konsumiert, sondern

---

<sup>1</sup> K. Schlesinger; Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre, in: Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 6, Leipzig / Wien 1933 – 4, S. 10 – 11.

<sup>2</sup> A. Wald; Über einige Gleichungssysteme der mathematischen Ökonomie, Zeitschrift für Nationalökonomie 1936, S. 637 – 670.

<sup>3</sup> Zum Überblick vgl. E. R. Weintraub; On the Existence of a Competitive Equilibrium: 1930 – 1954, Journal of Economic Literature, 1983, Vol. 21, S. 1 – 39.

<sup>4</sup> E. Malinvaud; Capital Accumulation and Efficient Allocation of Resources, Econometrica, 1953, Vol. 21, S. 233 – 268.

<sup>5</sup> E. Malinvaud; Capital Accumulation . . . , a. a. O., S. 233.

<sup>6</sup> G. Debreu; The Coefficient of Resource Utilization; Econometrica, Vol. 19, 1951, S. 282.

zur Produktion anderer Güter über mindestens eine Einheitsperiode transformiert werden.

„This definition is the old ‚produced means of production‘. It stems from the essential character of capital. Indeed, it is made in order to make possible the use in future periods of goods or services that do not exist as natural resources or are not available in sufficient quantity.“<sup>7</sup>

### b) Pfade

Ein Pfad ist die rein mengenmäßige Beschreibung einer sich über alle zukünftigen Einheitsperioden erstreckenden ökonomischen Aktivität. Eine ökonomische Aktivität in der Periode  $t$  wird durch ein Paar von Gütervektoren beschrieben, wobei  $a_t$  den Inputvektor bezeichnet, der am Anfang der Periode eingesetzt wird und mittels einer Technologie  $T_t$ ,  $T_t \subset T$ , in einen Outputvektor  $b_{t+1}$ , der am Ende der Periode anfällt, transformiert wird. Der Outputvektor  $b_t$  lässt sich in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine den Konsum der Periode  $t$ ,  $c_t$  bezeichnet und die andere den in der Produktion verbleibenden Teil  $k_t$ ,

$$(III.1) \quad b_t = c_t + k_t, \quad \text{für alle } t.$$

Der Inputvektor der Periode  $t$  wird in die Komponenten „Arbeit“  $l_t$ , produzierte Produktionsmittel  $k_t$  und nichtreproduzierbare Produktionsmittel (Primärfaktoren)  $z_t$  zerlegt,

$$(III.2) \quad a_t = l_t + k_t + z_t, \quad \text{für alle } t.$$

Setzt man (III.1) in (III.2) ein, so erhält man

$$(III.3) \quad a_t = b_t + l_t - c_t + z_t.$$

Begreifen wir, wie von Neumann, Leontief und ein Teil der klassischen Ökonomen, Arbeit als einen durch Konsumtion produzierten Produktionsfaktor, dann wird ein Teil von  $c_t$ , „produktiv“ konsumiert, so daß der „disponibile“ Konsum  $x_t$  durch die Gleichung

$$(III.4) \quad x_t = c_t - l_t$$

definiert ist.<sup>8</sup> Berücksichtigt man (III.4) in (III.3), so ergibt sich

$$(III.3') \quad a_t = b_t - x_t + z_t.$$

---

<sup>7</sup> E. Malinvaud; Capital Accumulation . . . , a. a. O., S. 235.

<sup>8</sup> Arbeit kann freilich auch als Primärfaktor angesehen werden und könnte im Vektor  $z$  enthalten sein, bzw. auch getrennt aufgeführt werden.

Ein solcher Pfad lässt sich graphisch wie folgt veranschaulichen:

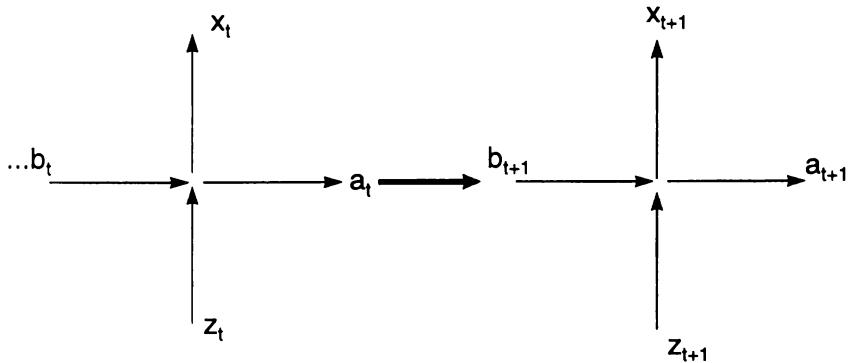


Abbildung 1

Die Transformation der am Anfang der Periode  $t$  vorliegenden Inputs,  $\mathbf{a}_t$ , in einen Output am Ende der Periode,  $\mathbf{b}_{t+1}$ , ist nur möglich, wenn es geeignete Technologien gibt und wenn die benötigten Primärfaktoren nicht den exogen gegebenen Bestand überschreiten.

Aus der Menge der Technologien  $T$  gibt es eine Teilmenge  $T_t$ , – die Menge der Technologien, die in Periode  $t$  zur Verfügung stehen –, so daß die Vektoren  $\mathbf{a}_t$ ,  $\mathbf{b}_{t+1}$  Elemente dieser Teilmenge sind, d. h.

$$(III.5) \quad (\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}) \in T_t, T_t \subset T.$$

Die Bedingung für die Beschränkung der Primärfaktoren lautet<sup>9</sup>:

$$(III.6) \quad \mathbf{z}_t \leqq \bar{\mathbf{z}}_t .^{10}$$

<sup>9</sup> Malinvaud nimmt  $\mathbf{z}_t = \bar{\mathbf{z}}_t$  an. Alle vorhandenen Ressourcen werden auch genutzt.

<sup>10</sup> Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} > \mathbf{x}^1 &\rightarrow x_i > x_i^1, \quad \forall i. \\ \mathbf{x} = \mathbf{x}^1 &\rightarrow x_i = x_i^1, \quad \forall i. \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{x}^1 &\rightarrow x_i \geq x_i^1, \quad \forall i. \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{x}^1 &\rightarrow x_i \geq x_i^1, \quad \exists x_i > x_i^1. \end{aligned}$$

c) *Technologie*

*Annahme 1:* Additivität

Wenn:

$$(\mathbf{a}_t^1, \mathbf{b}_{t+1}^1) \in T_t \quad \text{und} \quad (\mathbf{a}_t^2, \mathbf{b}_{t+1}^2) \in T_t ,$$

dann gilt:

$$(\mathbf{a}_t^1 + \mathbf{a}_t^2, \mathbf{b}_{t+1}^1 + \mathbf{b}_{t+1}^2) \in T_t .$$

*Annahme 2:* Teilbarkeit

Wenn

$$(\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}) \in T_t \quad \text{und} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 ,$$

dann ist auch

$$(\alpha \mathbf{a}_t, \alpha \mathbf{b}_{t+1}) \in T_t .$$

Wenn die Technologiemenge beiden Annahmen genügt, wenn also

$$(\mathbf{a}_t^1, \mathbf{b}_{t+1}^1) \in T_t \quad \text{und} \quad ((1 - \alpha) \mathbf{a}_t^2, (1 - \alpha) \mathbf{b}_{t+1}^2) \in T_t$$

und  $0 \leq \alpha \leq 1$ , dann ist

$$(\alpha \mathbf{a}_t^1 + (1 - \alpha) \mathbf{a}_t^2, \alpha \mathbf{b}_{t+1}^1 + (1 - \alpha) \mathbf{b}_{t+1}^2) \in T_t ,$$

d. h. die Technologiemenge ist *konvex*.

*Annahme 3:* (keine Restriktion der Produktion)

Wenn

$$(\mathbf{a}_t^1, \mathbf{b}_{t+1}^1) \in T_t \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_t \geqq \mathbf{a}_t^1 ,$$

dann ist auch

$$(\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}^1) \in T_t$$

d. h. eine größere zur Verfügung stehende Menge von Güterinputs führt nicht zu einer Restriktion der Produktion.

In der betrachteten Ökonomie gibt es m Güter und Dienste. Somit spannt die Technologiemenge im 2m dimensionalen Raum einen Kegel mit Vertex 0 auf, wenn man die Möglichkeit der Nichtproduktion als zulässig berücksichtigt. Steigende Skalenerträge im Aggregat, d. h. auf sektoraler Ebene, werden damit ausgeschlossen. Malinvaud nimmt darüber hinaus an, daß auch auf der Ebene der einzelnen Produzenten die Technologiemenge konvex ist.<sup>11</sup>

---

<sup>11</sup> Vgl. E. Malinvaud; Capital Accumulation . . ., a. a. O., S. 239.

Die bisherige Schreibweise entspricht der Malinvauds. Um auch Debreus Ansatz behandeln zu können, transformieren wir Malinvauds Schreibweise in die Debreus.<sup>12</sup>

Es sei

$$(III.7) \quad \mathbf{y}_t = \mathbf{a}_t - \mathbf{b}_t$$

der Nettoinputvektor in Periode  $t$ . Berücksichtigt man (III.1) und (III.2), so ergibt sich:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{c}_t + \mathbf{k}_t - \mathbf{l}_t - \mathbf{k}_t - \bar{\mathbf{z}}_t .$$

Berücksichtigt man (III.4), erhält man

$$(III.8) \quad \mathbf{x}_t + \mathbf{y}_t = \bar{\mathbf{z}}_t .$$

Ein Allokationspfad lässt sich durch zwei Folgen

$$\{\mathbf{y}_t\}_1^\infty = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_H, \dots\}, \quad \text{und} \quad \{\mathbf{x}_t\}_1^\infty = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_H, \dots\}$$

beschreiben, die die Bedingung

$$(III.9) \quad \{\mathbf{x}_t\}_1^\infty + \{\mathbf{y}_t\}_1^\infty = \{\bar{\mathbf{z}}_t\}_1^\infty$$

enthalten. Bedingung (III.9) besagt, daß der Nettooutput zuzüglich des Nettoinputs der Menge der vorhandenen Ressourcen entsprechen muß. Etwas anders ausgedrückt: Die gesamte Nettonachfrage muß gleich der Menge der gegebenen Ressourcen sein.

Weiterhin muß sichergestellt sein, daß die Folge der Nettoinputvektoren  $\{\mathbf{y}_t\}_1^\infty$  in der Technologiemenge  $T_t$  enthalten ist. Wir definieren die Menge der Nettoinputs  $Y$ , so daß dann und nur dann  $\mathbf{y} \in Y$ , wenn es zwei Folgen  $\{\mathbf{a}_t\}_1^\infty$  und  $\{\mathbf{b}_t\}_1^\infty$  gibt, für die gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \bar{\mathbf{b}}_1 \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{a}_t - \mathbf{b}_t \\ (\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}) &\in T_t, \forall t . \end{aligned}$$

Wenn  $T_t$  konvex ist, dann ist auch  $Y$  konvex.

---

<sup>12</sup> Vgl. G. Debreu; The Coefficient of . . . , a. a. O., S. 282 ff.

*d) Konsumenten*

Da keine sich überlappende Generationen behandelt werden, gehen wir von endlich vielen Konsumenten, die unendlich lange leben, aus. Bezeichnet man mit  $\mathbf{x}_j$  den Konsumpfad des  $j$ -ten Konsumenten, dann gilt:

$$\mathbf{x} = \sum_j \mathbf{x}_j .$$

Jeder Konsument  $j$  hat Präferenzen über Konsumpfade derart, daß er bei einem Vergleich von zwei Pfaden  $\{\mathbf{x}_j\}$  und  $\{\mathbf{x}_j^1\}$  angeben kann:

$\{\mathbf{x}_j\} I \{\mathbf{x}_j^1\}$  ( $\mathbf{x}_j$  ist mindestens so gut wie  $\mathbf{x}_j^1$ )

$\{\mathbf{x}_j\} P \{\mathbf{x}_j^1\}$  ( $\mathbf{x}_j$  wird  $\mathbf{x}_j^1$  vorgezogen).

Wir definieren zwei Mengen  $X, \tilde{X}$  durch:

Alle  $\{\mathbf{x}_j\}$ , für die  $\{\mathbf{x}_j^1\} I \{\mathbf{x}_j\}$ , gilt  $\{\mathbf{x}_j\} \in X$  .

Alle  $\{\mathbf{x}_j\}$ , für die  $\{\mathbf{x}_j^1\} P \{\mathbf{x}_j\}$ , gilt  $\{\mathbf{x}_j\} \in \tilde{X}$  .

Dem Pareto-Prinzip folgend gilt somit, daß

$$\{\mathbf{x}\} P \{\mathbf{x}^1\}, \text{ d. h. } \{\mathbf{x}\} \in \tilde{X},$$

wenn

$$\{\mathbf{x}_j\} \in X_j, \forall j$$

und  $\{\mathbf{x}_j\} \in \tilde{X}_j$ , für mindestens ein  $j$ .

Unter der Voraussetzung, daß  $X_j$  und  $\tilde{X}_j$  konvex sind, gilt folgende Definition:

*Definition:*

Ein Konsumpfad  $C^1$  ist optimal im Sinne des Pareto-Prinzips, wenn es keinen anderen Konsumpfad  $C$  gibt, für den  $\mathbf{x} \in X$ .

Malinvaud stützt sich in seiner Arbeit vorwiegend auf ein etwas einfacheres Konzept der Konsumentenwahl. Dabei werden die Relationen „mindestens so gut wie“ und „besser als“ durch „größer und gleich“ oder „größer als“ Relationen ersetzt<sup>13</sup>, d. h.

---

<sup>13</sup> Diese Vereinfachung steht nicht im Widerspruch zum Pareto-Prinzip. Ein Zustand, in dem man von einem Gut mehr zur Verfügung hat und von allen anderen gleichviel wie zuvor, stellt zweifelsohne gegenüber dem Ausgangszustand eine Verbesserung dar. Vorausgesetzt wird hier freilich, daß es sich um ein gewünschtes Gut handelt. Vgl. E. Malinvaud; Capital Accumulation . . ., a. a. O., S. 241 f.

$$\{\mathbf{x}_j\} I \{\mathbf{x}_j^1\} \Rightarrow \{\mathbf{x}_j\} \geq \{\mathbf{x}_j^1\} ,$$

$$\{\mathbf{x}_j\} P \{\mathbf{x}_j^1\} \Rightarrow \{\mathbf{x}_j\} > \{\mathbf{x}_j^1\} .$$

*Definition:*

Ein Konsumpfad  $C^1$  ist (konsum)effizient, wenn es keinen anderen Konsumpfad  $C$  gibt, so daß  $\{\mathbf{x}\} \geq \{\mathbf{x}^1\}$ .

## 2. Das intertemporale Preissystem: Diskontierte und undiskontierte Preise, Eigenzinssätze

Bevor wir im nächsten Abschnitt zur Frage nach der Existenz eines intertemporalen Preissystems übergehen, müssen wir kurz einige Begriffe klären, die bereits im Zusammenhang mit Lindahls Theorie von Bedeutung waren.

Im intertemporalen Preissystem drückt das Preisverhältnis

$$\frac{p_{it}}{p_{j\tau}}$$

die Menge des Guts  $j$  zum Zeitpunkt  $\tau$ ,  $q_{j\tau}$  aus, die sich gegen die Menge des Guts  $i$  zum Zeitpunkt  $t$ ,  $q_{it}$ , tauscht, d. h. es gilt:

$$\frac{p_{it}}{p_{j\tau}} = \frac{q_{j\tau}}{q_{it}}$$

Wählt man das Gut  $i$  in der Periode 1 als Numéraire, dann drückt der Preis  $p_{it}$  die Menge von Gut  $i$  aus, die in Periode 1 zum Austausch gegen eine Einheit von Gut  $i$  in Periode  $t$  bereitgestellt werden muß. Man nennt das den diskontierten Preis von Gut  $i$  zum Zeitpunkt  $t$ . Das Verhältnis

$$(III.10) \quad \frac{p_{it}}{p_{i1}} = \beta_{it}$$

definiert den Eigendiskontfaktor des Guts  $i$ ,  $\beta_{it}$ . Der Eigenzinssatz der Periode  $t$  für Gut  $i$ ,  $\rho_{it}$  ergibt sich aus dem Verhältnis der Eigendiskontfaktoren:

$$(III.11) \quad \frac{\beta_{it}}{\beta_{i,t+1}} = 1 + \rho_{it} .$$

Setzt man (II.10) in (III.11) ein, ergibt sich

$$\frac{p_{it}}{p_{i1}} \cdot \frac{p_{i1}}{p_{i,t+1}} = \frac{p_{it}}{p_{i,t+1}} = 1 + \rho_{it} ,$$

oder

$$p_{i,t+1}(1 + \rho_{it}) = p_{it} .$$

Der Eigenzinssatz ist somit nur definiert, wenn der Eigendiskontfaktor definiert und von Null verschieden ist, d. h. er ergibt sich nur aus den diskontierten Preisen.<sup>14</sup>

Unter der Voraussetzung, daß

$$p_{it} > 0, \forall i, t ,$$

gilt

$$\beta_{it} > 0, \forall i, t ,$$

und aus (III.11) folgt somit

$$\rho_{it} > -1, \forall i, t .$$

Man sieht, daß die Eigenzinssätze keine Informationen liefern, die nicht bereits in den diskontierten Preisen enthalten sind.

„That the point has not been generally realized is perhaps due to the difficulty of dissociating a problem from the means of its solution worked out by a monetary economic organization.“<sup>15</sup>

Diskontierte Preise folgen aus einer Normierung, derzufolge die Preise auf den Preis eines beliebigen Guts in der Basisperiode bezogen werden.<sup>16</sup> Normiert man die Preise in einem Gut, dessen laufender Preis in allen Perioden gleich eins gesetzt wird, dann liegen undiskontierte Preise vor. Wählt man beispielsweise eine Mengeneinheit Gold (z. B. Feinunze) zum Numéraire, dann gilt:

$$p_{g1} = \bar{p}_{gt} = 1, \forall t ,$$

wobei  $\bar{p}_{gt}$  den laufenden oder undiskontierten Preis des Numéraires (Gold) in Periode  $t$  darstellt. Der Eigendiskontfaktor des Numéraires (Gold) ergibt sich aus

$$(III.12) \quad \beta_{gt} = \frac{p_{gt}}{p_{g1}} = \frac{p_{gt}}{1} = p_{gt} .$$

Da die undiskontierten Preise in Periode  $t$  proportional zu den diskontierten Preisen in Periode  $t$  sein müssen, gilt

$$(III.13) \quad \frac{p_{it}}{p_{gt}} = \frac{\bar{p}_{it}}{\bar{p}_{gt}} = \frac{\bar{p}_{it}}{1} = \bar{p}_{it} .$$

<sup>14</sup> Vgl. E. Malinvaud; Lectures on Microeconomic Theory, North-Holland, 1972, S. 232.

<sup>15</sup> T. C. Koopmans; Three Essays on the State of Economic Science, New York 1957.

<sup>16</sup> In Anlehnung an Kuenne kann man dies als ein Preissystem mit konstantem Numéraire bezeichnen. Vgl. R. E. Kuenne; Money, Capital and Interest in intertemporal General equilibrium Theory, Economie Appliquée, Vol. 30, 1977, S. 617–638.

Berücksichtigt man (III.12) und (III.13), dann ergibt sich die folgende Beziehung zwischen dem undiskontierten (laufenden) und dem diskontierten Preis des Guts  $i$  in Periode  $t$ :

$$(III.14) \quad \bar{p}_{it} = \frac{1}{\beta_{gt}} p_{it} .$$

Der Eigenzinssatz des Numérairers ergibt sich aus (III.11) und (III.12):

$$(III.15) \quad \frac{\beta_{gt}}{\beta_{g,t+1}} = (1 + \rho_{gt}) .$$

Die undiskontierten oder laufenden Preise sind also einer anderen Normierung geschuldet.<sup>17</sup> Liegen in einer Ökonomie Kreditbeziehungen vor und werden diese in Numéraireeinheiten vertraglich festgelegt, dann ist der Eigenzinssatz des Numéraires der ökonomisch relevante Zinssatz, weil er den Alternativvertragssatz bzw. die Opportunitätskosten darstellt. Am Beispiel der Gewinnmaximierung der Unternehmung wird das deutlich. In diskontierten Preisen ist der diskontierte Gewinn

$$G = \mathbf{b}_{t+1} \mathbf{p}_{t+1} - \mathbf{a}_t \mathbf{p}_t .$$

Den laufenden Gewinn in laufenden Preisen erhält man, indem (III.14) berücksichtigt wird.

$$G = \beta_{g,t+1} \mathbf{b}_{t+1} \mathbf{p}_{t+1} - \beta_{gt} \mathbf{a}_t \mathbf{p}_t .$$

bzw. wegen (III.15)

$$\frac{G}{\beta_{g,t+1}} = \bar{G} = \mathbf{b}_{t+1} \bar{\mathbf{p}}_{t+1} - (1 + \rho_{gt}) \mathbf{a}_t \bar{\mathbf{p}}_t .$$

Wie sich der Eigenzinssatz des Numéraires bestimmt, hängt im wesentlichen von den Eigenschaften des gewählten Numéraireguts ab. Die Theorie zur Preisbestimmung des Numérairers wird eine andere sein, je nachdem, ob „Korn“, „Gold“ oder „Geld“ zum Numéraire erhoben wird.<sup>18</sup>

### 3. Effiziente Pfade mit endgültig begrenztem Horizont

Die Bestimmung von Effizienzpreisen im Rahmen der Theorie der effizienten Allokation stellt einen wesentlichen Schritt in der Entwicklung der intertemporalen Allgemeinen Gleichgewichtstheorie vom Typ Malinvaud-Arrow-Debreu dar. Zu-

<sup>17</sup> Kuenne nennt eine Ökonomie mit einem undiskontierten Preissystem „current numéraire economy“, vgl. R. E. Kuenne; Money, Capital and Interest . . ., a. a. O., S. 627 ff.

<sup>18</sup> Die drei Begriffe stehen für „reproduzierbar“, „erschöpfbare Ressource“, „kontrollierte Knappheit“.

nächst wurden diese Modelle jedoch unter der Voraussetzung eines endlichen Horizonts entwickelt. Dabei wurde das Horizontende nicht als vorläufiger Planungshorizont mit prinzipieller „Verschiebbarkeit“, sondern als endgültig begriffen. Daher findet in solchen Modellen in der letzten Produktionsperiode keine Kapitalakkumulation, sondern nur Produktion von Konsumgütern statt. Kapitalakkumulation in der letzten Periode wäre konsumineffizient, da man Ressourcen aus der Konsumgüterproduktion abzieht um Güterbestände zu produzieren, die weder konsumtiv noch produktiv genutzt werden können. Wie Huth<sup>19</sup> gezeigt hat, entsprechen solche Modelle in ihrer Struktur (und in ihren Ergebnissen) im wesentlichen dem Modell der kapitallosen Produktion von Walras bzw. dem atemporalen Walras-Cassel Modell. In der kapitallosen Produktion (im Sinne Wicksells) gibt es freilich auch keine genuin kapitaltheoretischen Fragestellungen. Da wir uns jedoch genau dafür interessieren, werden wir Modelle mit endgültig begrenztem Horizont nur streifen und uns mit dem Modell eines vorläufig begrenzten Horizonts eingehender beschäftigen. Dieses unterscheidet sich vom Modell mit endgültig begrenztem Horizont durch die Annahme, daß auch in der letzten Planungsperiode Kapitalgüter akkumuliert werden, da davon ausgegangen wird, daß auch jenseits des gegenwärtigen Planungshorizonts die Ökonomie noch weiterbestehen wird. Das Grundmodell mit unendlichem Horizont bildet dann eine natürliche Verallgemeinerung. Wir beschränken uns wiederum auf effiziente Pfade und werden die Existenz von Effizienzpreisen untersuchen. Daran anschließend werden wir uns mit dem Problem der Aufstellung einer intertemporalen Nutzenfunktion bei unendlichem Horizont und der Ableitung der Zeitpräferenzrate beschäftigen.

$Z = \{\mathbf{z}_t\}_0^H$  bezeichnet die Folge der exogen gegebenen, nicht reproduzierbaren Ressourcen in jeder Periode einschließlich der Anfangsausstattungen. Die Folge  $Z$  nennen wir eine Randbedingung.

*Definition:* Zulässigkeit

Ein Pfad  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  mit Horizontlänge  $H$  sei zulässig bezüglich  $Z$ , wenn gilt:

$$\mathbf{z}_t \leqq \bar{\mathbf{z}}_t, \quad t = 0, 1, \dots, H.$$

*Definition:* Konsumeffizienz

Ein Konsumpfad  $\{\mathbf{x}^1\}$  mit Horizontlänge  $H$  ist konsumeffizient, wenn es keinen anderen Pfad  $\{\mathbf{x}\}$  mit gleicher Horizontlänge und Randbedingungen gibt, so daß gilt:

$$\{\mathbf{x}\} \geq \{\mathbf{x}^1\}.$$

*Definition:* Effizienz

Ein Pfad mit Horizontlänge  $H\{\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1, \mathbf{z}^1\}$  ist effizient, wenn es keinen anderen Pfad  $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$  mit gleicher Horizontlänge und Randbedingungen gibt, für den gilt:

---

<sup>19</sup> Th. Huth; Kapital und Gleichgewicht, Marburg 1989.

$$\begin{aligned}\{\mathbf{x}\} &\geq \{\mathbf{x}^1\} \\ \{\mathbf{x}\} + \{\mathbf{y}\} &= \{\mathbf{z}\} \\ \{\mathbf{y}\} &\in Y.\end{aligned}$$

*Definition:* Effizienter Nettoinputvektor

$Y$  ist die Menge der Produktionsmöglichkeiten (Nettoinputs). Ein Vektor  $\mathbf{y}^1$  in  $Y$  nennen wir einen effizienten Punkt in  $Y$ , wenn es keinen Vektor  $\mathbf{y}$  gibt, für den gilt:

$$\mathbf{y} \leq \mathbf{y}^1,$$

wobei  $\mathbf{y}^1 \in Y^E$ .  $Y^E$  ist die Menge der Randpunkte von  $Y$ ,  $Y^E \subset Y$ .

Die Frage ist nun, ob es zu einem effizienten Pfad ein nichttriviales Bewertungssystem gibt, so daß der Pfad-Gewinn maximiert wird.

*Theorem 3.1:*

$Y$  ist die Menge der Produktionsmöglichkeiten (Nettoinputs) im  $\mathbb{R}^{nH}$ . Ein Punkt  $\mathbf{y}^1 \in Y$  ist ein effizienter Punkt von  $Y$ , wenn es einen Preisvektor  $\mathbf{p} > \mathbf{0}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{nH}$  gibt, so daß  $\sum_{t=0}^H (\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_t^1) \mathbf{p}_t > 0$ , für alle  $\mathbf{y} \in Y$ .

*Beweis:*

Angenommen es gilt  $\sum_{t=0}^H (\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_t^1) \mathbf{p}_t > 0$ , aber es gäbe ein  $\mathbf{y}^* \leq \mathbf{y}^1$ . Dann gilt für jeden positiven Preisvektor  $\sum_{t=0}^H (\mathbf{y}_t^* - \mathbf{y}_t^1) \mathbf{p}_t < 0$ , was einen Widerspruch darstellt.

Bei diesem Bewertungssystem drückt sich die Effizienz des Pfads im geringsten „Wert des Nettoinputs“ aus. Berücksichtigt man die Definition  $\mathbf{y}_t = \mathbf{a}_t - \mathbf{b}_t$ , dann wird deutlich, daß sich der summierte Wert der Nettoinputs auch als Pfad-Gewinn, d. h. als Summe der diskontierten Periodengewinne auffassen läßt. Es gilt definitionsgemäß:

$$\sum_{t=0}^H \mathbf{y}_t \mathbf{p}_t = -\mathbf{b}_0 \mathbf{p}_0 + \mathbf{a}_0 \mathbf{p}_0 - \mathbf{b}_1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{a}_1 \mathbf{p}_1 - \dots - \mathbf{b}_H \mathbf{p}_H + \mathbf{a}_H \mathbf{p}_H.$$

Da wir einen endgültig begrenzten Horizont voraussetzen, gilt  $\mathbf{a}_H \mathbf{p}_H = 0$ . Durch Umordnen ergibt sich

$$\sum_{t=0}^H \mathbf{y}_t \mathbf{p}_t = -\mathbf{b}_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{t=0}^{H-1} (\mathbf{a}_t \mathbf{p}_t - \mathbf{b}_{t+1} \mathbf{p}_{t+1}).$$

Der Klammerausdruck auf der rechten Seite der Definitionsgleichung bezeichnet die Differenz zwischen Kosten und Erlösen. Die Minimierung dieser Differenz ist gleichbedeutend mit der Maximierung der Differenz zwischen Erlösen und Kosten, d. h. des Gewinns in der Periode  $t, t = 0, 1, 2, \dots, H - 1$ .

Gemäß Theorem 3.1. muß gelten:

$$\sum_{t=0}^H (\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_t^1) \mathbf{p}_t = -\mathbf{b}_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{t=0}^{H-1} (\mathbf{a}_t \mathbf{p}_t - \mathbf{b}_{t+1} \mathbf{p}_{t+1}) + \mathbf{b}_0^1 \mathbf{p}_0 - \sum_{t=0}^{H-1} (\mathbf{a}_t^1 \mathbf{p}_t - \mathbf{b}_{t+1}^1 \mathbf{p}_{t+1}) \geq 0 .$$

Da von gleichen Anfangsbeständen auszugehen ist, ergibt sich:

$$\sum_{t=0}^{H-1} (\mathbf{a}_t^1 \mathbf{p}_t - \mathbf{b}_{t+1}^1 \mathbf{p}_{t+1}) \leq \sum_{t=0}^{H-1} (\mathbf{a}_t \mathbf{p}_t - \mathbf{b}_{t+1} \mathbf{p}_{t+1}).$$

Wenn  $\mathbf{y}^1$  der zum Pfad  $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1\}$  gehörende effiziente Produktionsplan ist, und es gilt  $\sum_{t=0}^H (\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_t^1) \mathbf{p}_t \geq 0$ , dann ist der Gewinn beim herrschenden Preissystem auf dem Pfad maximal.

In Theorem 3.1. wurden keine Annahmen über die Eigenschaften der Menge der Produktionsmöglichkeiten getroffen. Weiterhin wurde vorausgesetzt, daß das Preissystem positiv ist. Wir wollen im folgenden die Existenz eines nichtnegativen und nichttrivialen Effizienzpreissystems für eine konvexe Menge der Produktionsmöglichkeiten beweisen. Dazu benötigen wir einen Satz über trennende Hyperebenen und einen Hilfssatz über disjunkte Mengen.

### Theorem 3.2. Trennungssatz von Minkowski

$X$  und  $Y$  sind nichtleere konvexe Mengen im  $\mathbb{R}^n$ , und es gilt  $X \cap Y = \emptyset$ . Dann gibt es ein  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$  und ein  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , so daß  $\mathbf{x}\mathbf{p} \geq \alpha$ , für alle  $\mathbf{x} \in X$  und  $\mathbf{y}\mathbf{p} \leq \alpha$ , für alle  $\mathbf{y} \in Y$ .

*Beweis:* (Takayama, a. a. O., S. 45)

### Hilfssatz 3.1

$Y$  sei die Menge der Produktionsmöglichkeiten im  $\mathbb{R}^n$ . Wenn  $\mathbf{y}^1$  ein effizienter Punkt in  $Y$  ist, dann gilt  $(Y - \mathbf{y}^1) \cap \Omega^- = \emptyset$ , wobei  $\Omega^-$  den negativen Orthanten des  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet.

*Beweis:*

Angenommen es gibt ein  $\mathbf{z} < 0$ , d. h.  $\mathbf{z} \in \Omega^-$ , so daß  $\mathbf{z} \in (Y - \mathbf{y}^1)$ . Dann ist  $(\mathbf{z} + \mathbf{y}^1) \in Y$ . Da  $\mathbf{z} < 0$ , folgt  $\mathbf{z} + \mathbf{y}^1 < \mathbf{y}^1$ . Somit kann  $\mathbf{y}^1$  kein minimales Element von  $Y$  sein, was einen Widerspruch zur Annahme,  $\mathbf{y}^1$  sei ein effizienter Punkt in  $Y$ , darstellt.

Auf der Grundlage dieser beiden Sätze läßt sich nun das folgende Theorem beweisen.

*Theorem 3.3: Existenz eines Effizienzpreissystems*

$Y$  ist die abgeschlossene und konvexe Menge der Nettoinputs im  $\mathfrak{R}^{nH}$ . Wenn  $\mathbf{y}^1$  ein effizienter Punkt in  $Y$  ist, dann gibt es ein  $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \mathbf{p} \in \mathfrak{R}^{nH}$ , so daß gilt

$$\sum_{t=0}^H (\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_t^1) \mathbf{p}_t \geq 0 .$$

*Beweis:*

Wir definieren  $X \equiv (Y - \mathbf{y}^1)$ .  $X$  ist konvex. Da  $\mathbf{y}^1$  ein effizienter Punkt von  $Y$  ist, gilt gemäß Hilfssatz 3.1.  $X \cap \Omega^- = \emptyset$ . Somit liegen zwei disjunkte Mengen vor, so daß wir Minkowskis Trennungssatz anwenden können. Demzufolge gibt es ein  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^{nH}$  und ein  $\alpha \in \mathfrak{R}$ , so daß

a)  $\mathbf{z}\mathbf{p} \leqq \alpha$ , für alle  $\mathbf{z} \in \Omega^-$

und

b)  $\mathbf{x}\mathbf{p} \geqq \alpha$ , für alle  $\mathbf{x} \in X$ .

Da  $\mathbf{y}^1 \in Y$ , folgt  $0 \in X$ . Damit folgt aus b)  $\alpha \leqq 0$ . Wir zeigen nun, daß  $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ . Angenommen dies gilt nicht, dann gibt es ein  $p_i$  ( $i$ -tes Element von  $\mathbf{p}$ ), das wegen  $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$  negativ sein muß. Wählt man nun das korrespondierende  $z_i$ ,  $z_i \in \Omega^-$ , beitragsmäßig hinreichend groß, ergibt sich  $\mathbf{z}\mathbf{p} > 0$ . Das stellt jedoch einen Widerspruch dar.

Ferner muß  $\alpha \geqq 0$  gelten. Denn wenn nicht, müßte  $\mathbf{z}\mathbf{p} \leqq \alpha < 0$  gelten, was nicht sein kann, da wir  $\|\mathbf{z}\|$  hinreichend klein wählen können, so daß sich  $\mathbf{z}\mathbf{p} > \alpha$  ergibt. Da sowohl  $\alpha \geqq 0$  als auch  $\alpha \leqq 0$  gilt, muß  $\alpha = 0$  sein. Für b) gilt somit  $\mathbf{x}\mathbf{p} \geqq 0$ . Da  $X \equiv (Y - \mathbf{y}^1)$ , gilt somit

$$(Y - \mathbf{y}^1) \mathbf{p} \geqq 0, \quad \text{bzw.} \quad \sum_{t=0}^H (\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_t^1) \mathbf{p}_t \geqq 0 .$$

Es soll hier nochmals erwähnt werden, daß das den konsumeffizienten Pfad stützende Preissystem nicht als ein System von Gleichgewichtspreisen interpretiert werden darf. Um dies zu bestimmen, müßte noch der optimale Nachfrageplan der Konsumenten modelliert werden und die Markträumungsbedingungen berücksichtigt werden. Da insbesondere die Formulierung einer intertemporalen Nutzenfunktion erst an späterer Stelle behandelt werden soll, beschränken wir uns auch im folgenden Abschnitt auf konsumeffiziente Pfade und ihre korrespondierenden Effizienzpreissysteme.

## 4. Effiziente Pfade mit unendlichem Horizont

### 4.1. Zur Begründung eines unendlichen Horizonts

Konfrontiert mit der Frage, wie denn die Annahme eines unendlichen Horizonts zu begründen sei, könnte man die Gegenfrage stellen und überlegen, welche Argumente für einen endlichen Horizont ins Feld geführt werden. Ein geläufiges Argument ist, daß Individuen nur einen endlichen Planungshorizont haben. Dieses Argument greift allerdings zu kurz, da Gesellschaften nicht nur aus einer Generation von Individuen, sondern prinzipiell aus unendlich vielen Generationen bestehen. Das Problem der intertemporalen Allokation sollte somit nicht aus der Perspektive einer einzigen Generation thematisiert werden.

„( . . . ) every finite time period points beyond itself.“

bemerkte Samuelson in seiner Pionierarbeit über Modelle mit sich überlappenden Generationen.<sup>20</sup>

Auch Unternehmen sind, insbesondere wenn es sich um Kapitalgesellschaften handelt, nicht an die Lebensdauer von Individuen gebunden. Schon gar nicht werden sie mit dem Ziel einer zum Zeitpunkt  $T$  zu erfolgenden Liquidation gegründet. Die Aktie als Finanzierungsform hebt den Aspekt der „Unendlichkeit“ einer Kapitalgesellschaft deutlich hervor, denn im Unterschied zum Kredit oder zur Obligation ist an die Aktie keine Rückzahlungsverpflichtung, sondern der Anspruch auf einen im Prinzip unendlichen Einkommensstrom gekoppelt.

Außer diesen eher metatheoretischen Argumenten gibt es freilich auch modellendogene Probleme, die gegen die Annahme eines endlichen Horizont sprechen. Modelle mit endlichem Horizont sind stimmig, wenn in der letzten Periode alle produzierten Güter Konsumgüter sind. Kapitalgüter sind reine Zwischenprodukte und fallen durch Konsolidierung heraus, so daß im Prinzip ein statisches Allokationsproblem besteht: Beliebige Anfangsausstattungen werden durch effiziente Faktorkombinationen in gewünschte Konsumgüterbündel transformiert.

Modelle mit endlichem Horizont werden unstimmig, wenn Kapitalakkumulation explizit berücksichtigt werden soll. Ist am Periodenende nicht „doomsday“, so daß auch jenseits des Planungshorizonts ökonomische Aktivitäten stattfinden sollen, dann müssen für die letzte Planungsperiode Kapitalguterendbestände festgelegt werden. Hierfür ein Kriterium zu finden, ist jedoch genauso schwierig, wie die Wahl eines Pfads jenseits des Planungshorizonts. Mit der Beschränkung auf einen endlichen Horizont wird diese Problemstellung gerade ausgeschlossen.

„If one adopts a finite time horizon, the choice of terminal capital stock is as much a part of the problem to be solved as the choice of the path. Terminal capital, after all, repre-

---

<sup>20</sup> P. A. Samuelson; „An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money“, The Journal of Political Economy, 1958, S. 467 – 482, Zitat: S. 467.

sents the collection of paths beyond the horizon that it makes possible. An infinite horizon is therefore perhaps a more natural specification in many formulations of the problem of optimal growth.“<sup>21</sup>

Auch Malinvaud greift das Problem der Kapitalgüterendbestände auf.

„But as it stands now, it is somewhat unsatisfactory because nothing implies that the final stock of commodities is economically efficient in any sense.“<sup>22</sup>

Unter kapitaltheoretischen Gesichtspunkten ist die Annahme eines endlichen Horizonts ebenfalls nicht sinnvoll. Erinnern wir uns, daß es das Anliegen der klassischen und der neoklassischen Kapitaltheorie ist, Kapitaleinkommen, d. h. Gewinn nicht als temporäres, sondern als dauerhaftes Einkommen und Kapital als eine dauerhafte Einkommensquelle zu begreifen. Eine Periodenbeschränkung führt zur Aufhebung des Begriffs einer dauerhaften Einkommensquelle. Diese Argumente machen deutlich, daß die Analyse der Akkumulation und Allokation bei unendlicher Horizontlänge weder esoterisch ist, noch dem Spieltrieb mathematischer Ökonomen entspringt.

Malinvaud war der erste Ökonom, der das Problem von Akkumulation und Allokation bei unendlicher Horizontlänge analytisch angegangen ist. Erst in den 60er Jahren haben andere Ökonomen diese Thematik aufgegriffen und fortgeführt.<sup>23</sup> Dabei zeigt sich, daß die Analyse von Modellen mit unendlichem Horizont ungleich abstrakter und formal anspruchsvoller ist als die von Modellen mit endlichem Horizont. Peleg und Yaari nennen die zwei wesentlichen Gründe hierfür:

„(1) The basic tool, separation theorems for convex sets, while it certainly exists in the infinite-dimensional case, is of very limited use in the exploration of efficiency prices. (...)

(2) In the infinite-dimensional case, several alternative definitions of efficiency prices suggest themselves, and the conditions which ensure the existence of one type of efficiency prices are usually quite different from the condition which ensure the existence of another type.“<sup>24</sup>

Bei dem zweiten von Peleg und Yaari genannten Grund handelt es sich um zwei verschiedene Verfahren, Effizienzpreissysteme im Fall des unendlichen Horizonts zu bestimmen. Malinvauds Methode besteht darin, ein Modell mit unendlichem Horizont in eine Folge von endlichen Teilmodellen mit zunehmendem Horizont zu zerlegen<sup>25</sup>. Für jedes Teilmodell mit endlichem Horizont läßt sich mit den üblichen

<sup>21</sup> T. C. Koopmans, On the Concept of Optimal Economic Growth, in: Scientific Papers of T. C. Koopmans, Dordrecht 1970, S. 485 – 545, hier: S. 489.

<sup>22</sup> E. Malinvaud; Capital Accumulation . . . , a. a. O., S. 244.

<sup>23</sup> Einen Überblick zur Analyse von Effizienzpreissystemen in Modellen mit unendlichem Horizont gibt: G. Stephan; Preise und Zinsen in Modellen mit unendlichem Horizont, Frankfurt/M. 1980, insb. S. 16 – 23.

<sup>24</sup> B. Peleg and M. E. Yaari, Efficiency Prices in an Infinite-Dimensional Space, Journal of Economic Theory, 1979, S. 41 – 85, hier: S. 42.

<sup>25</sup> Diese Methode wird in 4.b) ausführlich dargestellt.

Methoden die Existenz eines Preisvektors nachweisen. Der Folge der Teilmodelle korrespondiert eine Folge von Effizienzpreisvektoren. Die Frage ist nun, ob die Folge von Effizienzpreisvektoren mit wachsender Horizontlänge punktweise konvergiert. Ist das der Fall, dann definiert der Grenzwert dieser Folge von Punktmen gen den Effizienzpreisvektor für das Modell mit unendlichem Horizont. Malinvauds induktive Methode ist, wie Stephan hervorhebt, direkt ökonomisch interpretierbar, denn

„(….) diese Preissysteme sind Grenzfolgen von endlichhorizontigen Effizienzpreissystemen und damit selbst unendliche Folgen von reellen Zahlen. Also wird jedem erwünschten Gut in jeder Periode ein Preis zugeordnet. Und wie in Modellen mit endlichem Horizont lassen sich Zinsraten als Quotienten dieser Preise ausdrücken.“<sup>26</sup>

Die andere Methode zur Bestimmung von Effizienzpreissystemen bei unendlichem Horizont wurde von Radner<sup>27</sup> und McFadden<sup>28</sup> entwickelt. Bei Modellen mit endlichem Horizont bildet der Vektor der Effizienzpreise ein stetiges lineares Funktional auf den Raum aller zulässigen Mengenvektoren (z. B. Vektoren des Nettooutputs). Dieses Verfahren wird auf den Fall des unendlichen Horizonts übertragen. Ein zu einem effizienten Pfad gehöriger Preisvektor bildet ein lineares Funktional, das für diesen effizienten Pfad einen maximalen Gegenwartswert annimmt. Diese Methode hat jedoch ein schwerwiegendes Defizit:

„With an infinite horizon, more generally, with an infinite dimensional commodity space, such a continuous linear functional need not generate a sequence of Malinvaud prices that can be used for computing intertemporal profits.“<sup>29</sup>

Wenn sich aber die Preisvektoren nicht mehr als Folge reeller Zahlen darstellen lassen, bedeutet das,

„(….) that prices can no longer be looked upon as rates of transformation between commodities. Thus, by accepting this kind of solution to the problem, one is very nearly throwing the baby out with the bath water.“<sup>30</sup>

Denn im Unterschied zu Malinvauds Methode lassen sich bei der „Methode der linearen Funktionale“ keine Eigenzinssätze berechnen, weil die intertemporalen Transformationsraten zwischen den Gütern nicht bestimmbar sind.

Malinvauds Methode benötigt zusätzliche Annahmen, um die resultierenden Preissysteme als Gegenwartspreise (diskontierte Preise) auffassen zu können. Eine

---

<sup>26</sup> G. Stephan; Preise und Zinsen . . . , a. a. O., S. 20.

<sup>27</sup> R. Radner; Efficiency Prices for Infinite Horizon Production Programmes, Review of Economic Studies, 1967, S. 51 – 66.

<sup>28</sup> D. McFadden; The Evaluation of Development Programmes, Review of Economic Studies, 1967, S. 25 – 50.

<sup>29</sup> M. Majumdar; Efficient Programmes in Infinite Dimensional Spaces: A complete Characterization, Journal of Economic Theory 1974, S. 355 – 369, hier: S. 355 – 6.

<sup>30</sup> B. Peleg and M. E. Yaari; Efficiency Prices . . . , a. a. O., S. 48.

wesentliche Annahme ist die Nontightness-Bedingung, auf die wir noch ausführlich eingehen werden. Eine weitere wichtige Annahme bezieht sich auf die Einhaltung der Transversalitätsbedingung. Diese besagt, daß die Folge  $\{\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t\}_1^\infty$  eine Nullfolge bilden muß, wobei  $\{\mathbf{p}_t\}_1^\infty$  die zum konsumeffizienten Pfad  $C$  mit der Folge der Konsumvektoren  $\{\mathbf{x}_t\}_1^\infty$  korrespondierende Folge der Preisvektoren darstellt.<sup>31</sup> Wird die Transversalitätsbedingung nicht erfüllt, dann ist der Gegenwartswert eines konsumeffizienten Pfads bezogen auf das zugrunde liegende Preissystem nicht bestimmt. Trotz dieser Nachteile wird Malinvauds Methode bevorzugt, weil in dieser Arbeit kapital- und zinstheoretische Fragestellungen im Vordergrund stehen.

#### 4.2. Effizienzpreise bei unendlichem Horizont: Der Ansatz von Malinvaud

##### a) Unendliche Pfade mit einer linearen Technik und einem Primärfaktor

Malinvauds Methode, die Existenz von Effizienzpreisen für einen Pfad mit unendlichem Horizont nachzuweisen, beruht auf der Approximation des unendlichen Pfads durch Teilstücke mit jeweils endlicher, jedoch wachsender Horizontlänge. Dazu müssen wir zunächst die Definition der Konsumeffizienz erweitern. Eine Möglichkeit besteht darin, einen zulässigen Pfad  $C^1$  mit der Menge aller zulässigen Pfade, die ab einer Periode  $H$  identisch sind, zu vergleichen.<sup>32</sup> Diese Prozedur wird für größer werdendes  $H$  wiederholt. Wird dabei kein zulässiger Pfad gefunden, der besser als  $C^1$  ist, dann soll  $C^1$  konsumeffizient heißen.

Um Malinvauds Ansatz und Beweismethode zu rekonstruieren, vereinfachen wir das bisher zugrundegelegte Modell durch folgende Annahmen. Außer der Anfangsausstattung  $\mathbf{b}_0$  gibt es keine exogen gegebenen Ressourcen, d. h.  $\mathbf{z}_t = \mathbf{0}$ , für alle  $t$ . Weiterhin gibt es nur eine lineare Technik mit konstanten Skalenerträgen. Beschrieben wird diese Technik durch die Input-Output Matrix  $\mathbf{A}$ . Ein Element  $a_{ij}$  dieser Matrix gibt die Menge des Guts  $j$  an, die im Prozeß (Sektor)  $i$  eingesetzt wird, um eine Einheit Output des Sektors  $i$  herzustellen. Die Matrix  $\mathbf{A}$  ist nicht negativ. Weiterhin nehmen wir an, daß jeder Sektor mindestens ein Gut als Input verwendet und jedes Gut nur durch einen Sektor hergestellt wird. Die Matrix  $\mathbf{A}$  sei regulär, unzerlegbar und primitiv.<sup>33</sup>

<sup>31</sup> Vgl. M. Majumdar, Efficient Programmes in Infinite . . ., a. a. O., S. 356.

<sup>32</sup> Über verschiedene Definitionen von Konsumeffizienz und korrespondierenden Effizienzpreissysteme, die z.T. schwächer bzw. strenger als die Definition Malinvauds sind, vgl. M.E. Yaari, Efficiency Prices in an Infinite Dimensional Space, Journal of Economic Theory, 2, 1970, S. 41 – 85, hier: S. 51 ff.

<sup>33</sup> Die Annahme der Unzerlegbarkeit beinhaltet nicht, daß jedes Gut in jeder Periode produziert werden muß. So ist es mit der Unzerlegbarkeit durchaus verträglich, wenn  $k$ -Güter in  $k$  aufeinanderfolgenden Perioden produziert werden und dann das erste Gut in Periode  $k+1$  wieder mit Hilfe des  $k$ -ten Guts produziert wird. Ein solches Produktionssystem ist unzerlegbar und zyklisch bzw. imprimitiv. Ist es indes in jeder Periode erforderlich, jedes Gut zu pro-

**Definition 4.1.: Zulässigkeit**

Ein Pfad  $C \equiv \{\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}; \mathbf{x}_t, \mathbf{a}_H\}$  heißt zulässig bezüglich der Anfangsbedingungen, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \leqq \mathbf{x}_0 &= \mathbf{b}_0 - \mathbf{a}_0, & \mathbf{b}_0 &> 0, \\ \mathbf{0} \leqq \mathbf{x}_t &= \mathbf{b}_t - \mathbf{a}_t, & t &\geqq 1, \\ \mathbf{b}_{t+1}\mathbf{A} \leqq \mathbf{a}_t, & & t &\geqq 1. \end{aligned}$$

Ein Pfad  $C$  heißt zulässig, wenn er zulässig bezüglich der Anfangsbedingungen ist und wenn

$$\mathbf{b}_H - \mathbf{x}_H \geqq \mathbf{a}_H.$$

**Definition 4.2.: Konsumeffizienz**

Ein zulässiger Pfad  $C$  ist dann und nur dann für alle  $H$  konsumeffizient, wenn es keinen anderen zulässigen Pfad  $C^1$  mit den selben Anfangsbedingungen und Endbeständen gibt, für den gilt:

$$\mathbf{x}_t \leqq \mathbf{x}_t^1, \quad \text{für alle } t \leqq H$$

und

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t^1, \quad \text{für alle } t > H.$$

Berücksichtigt man Definition 4.1., dann lässt sich der Pfad  $C$  wie folgt aufschreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 - \mathbf{x}_0 &\geqq \mathbf{b}_1\mathbf{A} \\ \mathbf{b}_1 - \mathbf{x}_1 &\geqq \mathbf{b}_2\mathbf{A} \\ &\vdots \\ \mathbf{b}_t - \mathbf{x}_t &\geqq \mathbf{b}_{t+1}\mathbf{A} \\ \mathbf{b}_H - \mathbf{x}_H &\geqq \mathbf{a}_H. \end{aligned}$$

---

duzieren, dann ist das Produktionssystem azyklisch bzw. primitiv. Ein Produktionssystem, dargestellt durch die Matrix  $\mathbf{A}$ , ist *imprimitiv*, wenn sie durch Permutation von Spalten und Zeilen in die folgende Diagonalform transformiert werden kann,

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{B}_{n+1} \\ \mathbf{B}_n & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

wobei  $\mathbf{B}_i, i = 1, \dots, n$ , quadratische Untermatrizen sind.

Multipliziert man die erste Zeile mit  $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ , die zweite mit  $\mathbf{A}^1$ , die  $t$ -te Zeile mit  $\mathbf{A}^t$  usw. und addiert beide Seiten der Ungleichungen, dann kürzen sich die  $\mathbf{b}_t \mathbf{A}^t$ ,  $t = 0, 1, \dots, H$ , auf beiden Seiten heraus. Nach Umordnen erhält man:

$$\mathbf{b}_0 \geqq \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 \mathbf{A}^1 + \mathbf{x}_2 \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{a}_H \mathbf{A}^H ,$$

bzw.

$$\mathbf{b}_0 \geqq \sum_{t=0}^H \mathbf{x}_t \mathbf{A}^t + \mathbf{a}_H \mathbf{A}^H .$$

Die Terme  $\mathbf{x}_t \mathbf{A}^t$ ,  $t = 0, 1, \dots, H$ , bezeichnen die aus der Konsumnachfrage in Periode  $t$  abgeleitete Nachfrage nach „Diensten“ der Erstausstattung und der Term  $\mathbf{a}_H \mathbf{A}^H$  bezeichnet die aus dem zu produzierenden Endkapitalbestand abgeleitete Nachfrage nach den „Diensten“ der Erstausstattung. Die Ungleichung besagt, daß für einen zulässigen Pfad die gesamte Nachfrage nach „Diensten“ der Erstausstattung den Bestand nicht überschreiten darf. Das führt zu folgendem Theorem.

*Theorem 4.1.:*

a) Wenn  $C \equiv \{\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}; \mathbf{x}_t, \mathbf{a}_H\}$  ein beliebiger zulässiger Pfad ist, dann gilt:

$$\mathbf{b}_0 \geqq \sum_{t=0}^H \mathbf{x}_t \mathbf{A}^t + \mathbf{a}_H \mathbf{A}^H ,$$

wobei,  $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$  ist.

*Beweis:*

Angenommen für den Pfad  $C^* \equiv \{\mathbf{a}_t^*, \mathbf{b}_{t+1}^*; \mathbf{x}_t^*, \mathbf{a}_H^*\}$  gilt:

$$\mathbf{b}_0 < \sum_{t=0}^H \mathbf{x}_t^* \mathbf{A}^t + \mathbf{a}_H^* \mathbf{A}^H .$$

Gemäß Definition 4.1. gilt demnach

$$\mathbf{b}_t - \mathbf{x}_t^* = \mathbf{a}_t^* < \mathbf{b}_{t+1}^* \mathbf{A}^t , \quad t = 0, 1, \dots, H .$$

Der Pfad  $C^*$  ist nicht zulässig, da die in Periode  $t$  zur Verfügung stehende Inputmenge  $\mathbf{a}_t^*$  das Aktivitätsniveau  $\mathbf{b}_{t+1}^*$  nicht ermöglicht.

b) Ein zulässiger Pfad  $C \equiv \{\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}; \mathbf{x}_t, \mathbf{a}_H\}$  ist dann und nur dann konsumeffizient, wenn

$$(i) \quad \mathbf{b}_0 = \sum_{t=0}^H \mathbf{x}_t^* \mathbf{A}^t + \mathbf{a}_H^* \mathbf{A}^H ,$$

$$(ii) \quad \mathbf{b}_H - \mathbf{x}_H = \mathbf{a}_H$$

gilt.

*Beweis:*

Angenommen es gibt einen anderen zulässigen Pfad  $C^* \equiv \{\mathbf{a}_t^*, \mathbf{b}_{t+1}^*; \mathbf{x}_t^*, \mathbf{a}_H\}$  für den gilt

- a)  $\mathbf{x}_t^* \geq \mathbf{x}_t$ , für alle  $t$ ,
- b)  $\mathbf{x}_s^* = \mathbf{x}_s + \varepsilon$ , für ein  $s$ ,  $1 \leq s \leq H$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Erfüllt Pfad  $C$  Bedingung (i) und  $\mathbf{x}_s^* = \mathbf{x}_H$ , dann gilt  $\mathbf{b}_H - \mathbf{x}_s^* < \mathbf{a}_H$ , so daß (ii) verletzt wird. Gilt hingegen (ii), dann folgt:

$$\mathbf{b}_0 < \sum_{t=0}^H \mathbf{x}_t^* \mathbf{A}^t + \mathbf{a}_H \mathbf{A}^H,$$

d. h.  $C^*$  ist entgegengesetzt zur Annahme nicht zulässig.

Nun nehmen wir umgekehrt an, der Pfad  $C$  sei effizient, und es soll gelten:

$$\mathbf{b}_0 - \varepsilon = \sum_{t=0}^H \mathbf{x}_t^* \mathbf{A}^t + \mathbf{a}_H \mathbf{A}^H, \varepsilon > 0.$$

In diesem Fall läßt sich der folgende Konsumpfad  $\{\mathbf{x}'_t\}$  finden, für den gilt:

$$\{\mathbf{x}'_t\} \geq \{\mathbf{x}_t\} \quad \text{für alle } t,$$

z. B.  $\mathbf{x}'_0 = \mathbf{x}_0 + \varepsilon, \mathbf{x}'_t = \mathbf{x}_t, \forall t \geq 1$ ,

$$\mathbf{b}_0 - \mathbf{x}'_0 = \mathbf{a}'_0 = \mathbf{x}_1 \mathbf{A}^1 + \mathbf{x}_2 \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{x}_H \mathbf{A}^H + \mathbf{a}_H \mathbf{A}^H$$

bzw.  $\mathbf{b}'_1 = \sum_{t=0}^H \mathbf{x}_t^* \mathbf{A}^{t-1} + \mathbf{a}_H \mathbf{A}^{H-1}$ ,

analog  $\mathbf{b}'_t = \sum_{t=0}^H \mathbf{x}_k^* \mathbf{A}^{k-t} + \mathbf{a}_H \mathbf{A}^{H-1}$ .

Wie man sieht, ist der Pfad  $C'$  zulässig, so daß ein Widerspruch vorliegt.

Um nun die Existenz eines Effizienzpreissystems für einen konsumeffizienten Pfad mit vorläufig begrenztem Horizont nachzuweisen, brauchen wir in diesem Fall nicht auf ein Separationstheorem zurückgreifen, da wir den Beweis algebraisch führen können. Wir erinnern daran, daß Effizienzpreise ein Bewertungssystem darstellen, so daß, gegeben diese Preise, in jeder Periode  $t$  der gewinnmaximale Produktionsplan gewählt wird. Für jede Periode  $t$  gilt:

$$G_t = \mathbf{b}_{t+1} \mathbf{p}_{t+1} - \mathbf{a}_t \mathbf{p}_t \leq 0,$$

bzw.  $\mathbf{a}_t \mathbf{p}_t \geqq \mathbf{b}_{t+1} \mathbf{p}_{t+1}, \quad t = 0, 1, \dots, H-1$

und

$$(\mathbf{b}_H - \mathbf{x}_H) \mathbf{p}_H = \mathbf{a}_H \mathbf{p}_H .$$

Ist der Pfad  $C$  konsumeffizient, dann gilt für einen beliebigen Preisvektor  $\mathbf{p}_0 > \mathbf{0}$

$$\mathbf{b}_0 \mathbf{p}_0 = \sum_{t=0}^H \mathbf{x}_t^* \mathbf{A}^t \mathbf{p}_0 + \mathbf{a}_H \mathbf{A}^H \mathbf{p}_0 ,$$

bzw. ausformuliert

$$\begin{aligned} (\mathbf{b}_0 - \mathbf{x}_0) \mathbf{p}_0 &= \mathbf{b}_1 \mathbf{A} \mathbf{p}_0 \\ (\mathbf{b}_1 - \mathbf{x}_1) \mathbf{p}_1 &= \mathbf{b}_2 \mathbf{A} \mathbf{p}_1 \\ &\vdots \\ (\mathbf{b}_H - \mathbf{x}_H) \mathbf{p}_H &= \mathbf{a}_H \mathbf{A} \mathbf{p}_H . \end{aligned}$$

Wenn weiterhin

$$\mathbf{A} \mathbf{p}_0 \geqq \mathbf{p}_1, \quad \mathbf{p}_0 > 0,$$

dann gilt offensichtlich

$$(\mathbf{b}_0 - \mathbf{x}_0) \mathbf{p}_0 = \mathbf{b}_1 \mathbf{A} \mathbf{p}_0 \geqq \mathbf{b}_1 \mathbf{p}_1$$

bzw.

$$(\mathbf{b}_0 - \mathbf{x}_0) \mathbf{p}_0 = \mathbf{a}_0 \mathbf{p}_0 \geqq \mathbf{b}_1 \mathbf{p}_1 ,$$

und somit ist in jeder Periode  $t$

$$(\mathbf{b}_t - \mathbf{x}_t) \mathbf{p}_t = \mathbf{a}_t \mathbf{p}_t \geqq \mathbf{b}_{t+1} \mathbf{p}_{t+1} \quad t = 0, 1, \dots, H-1 ,$$

und

$$(\mathbf{b}_H - \mathbf{x}_H) \mathbf{p}_H = \mathbf{a}_H \mathbf{p}_H \geqq 0$$

erfüllt.

Das Preissystem  $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_H\}$  erfüllt die Gewinnmaximierungsbedingung in jeder Periode  $t$ .

Im nächsten Schritt heben wir die vorläufige Begrenzung des Horizonts auf, indem wir  $H$  schrittweise „in die Zukunft“ verschieben.

Wir wissen bereits, daß für einen zulässigen Pfad  $C$

$$\mathbf{b}_0 \geqq \sum_{t=0}^H \mathbf{x}_t \mathbf{A}^t + \mathbf{a}_H \mathbf{A}^H$$

gilt. Man sieht sofort, daß die endliche Summe  $\sum_{t=0}^H \mathbf{x}_t \mathbf{A}^t$  für jedes  $H$  beschränkt ist, weil nämlich

$$\sum_{t=0}^H \mathbf{x}_t \mathbf{A}' \leqq \mathbf{b}_0 - \mathbf{a}_H \mathbf{A}^H \leqq \mathbf{b}_0 .$$

Wir bezeichnen

$$\sum_{t=0}^H \mathbf{x}_t \mathbf{A}' \equiv S^H, \quad \sum_{t=0}^{H+1} \mathbf{x}_t \mathbf{A}' \equiv S^{H+1}, \dots, \text{usw.}$$

Für zunehmende  $H$  ergibt sich somit eine unendliche Folge dieser endlichen Summen von Vektoren. Diese Folge ist nicht absteigend und für alle  $H$  von oben durch  $\mathbf{b}_0$  beschränkt. Somit existiert

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \mathbf{x}_H \mathbf{A}^H .$$

Wir können nun das folgende Theorem aufstellen:

*Theorem 4.2.*

$C \equiv \{\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}; \mathbf{x}_t\}$  sei ein beliebiger zulässiger Pfad. Ein zulässiger unendlicher Konsumpfad  $\{\mathbf{x}_t\}_{t=0}^{\infty}$  ist dann und nur dann konsumeffizient, wenn

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_t \mathbf{A}' = \mathbf{b}_0 .$$

*Beweis* analog zu Theorem 4.1.

Wie im Fall des vorläufig begrenzten Horizonts lässt sich die Existenz eines Effizienzpreissystems recht einfach nachweisen. Das Preissystem für den Pfad  $C$  muß die folgenden Ungleichungen erfüllen:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A} \mathbf{p}_0 & \geqq & \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{A} \mathbf{p}_1 & \geqq & \mathbf{p}_2 \\ & \vdots & \\ \mathbf{A} \mathbf{p}_t & \geqq & \mathbf{p}_{t+1} \\ & \vdots & \end{array}$$

Durch Rekursion erhält man:

$$\mathbf{A}' \mathbf{p}_0 \geqq \mathbf{p}_t .$$

Wenn  $(\mathbf{b}_0 - \mathbf{x}_0) = \mathbf{b}_1 \mathbf{A}$  und  $\mathbf{p}_0 > \mathbf{0}$  gilt, dann muß

$$(\mathbf{b}_0 - \mathbf{x}_0) \mathbf{p}_0 = \mathbf{b}_1 \mathbf{A} \mathbf{p}_0 \geqq \mathbf{b}_1 \mathbf{p}_1 ,$$

bzw.  $(\mathbf{b}_t - \mathbf{x}_t) \mathbf{p}_t = \mathbf{b}_{t+1} \mathbf{A} \mathbf{p}_t \geq \mathbf{b}_{t+1} \mathbf{p}_{t+1}$ , für alle  $t$ ,

so daß  $(\mathbf{b}_t - \mathbf{x}_t) \mathbf{p}_t = \mathbf{a}_t \mathbf{p}_t \geq \mathbf{b}_{t+1} \mathbf{p}_{t+1}$ , für alle  $t$ .

### b) Unendliche Pfade mit mehreren Techniken und Primärfaktoren

Bisher sind wir davon ausgegangen, daß nur eine einzige lineare Technik zur Verfügung steht. Diese Annahme ist selbstverständlich sehr einschränkend. Ihr Vorteil besteht jedoch darin, daß sie einen vergleichsweise einfachen analytischen Zugang zum Problem der Existenz von Effizienzpreisen für einen konsumeffizienten unendlichen Pfad ermöglicht. Weiterhin haben wir Primärfaktoren völlig vernachlässigt. Beide Annahmen sollen nun durch andere ersetzt werden, ohne jedoch alle kombinatorisch möglichen Fälle im folgenden zu untersuchen. So werden wir substitutionale Techniken ausblenden und uns auf den Fall eines gegebenen Spektrums linearer Techniken konzentrieren. Von den Annahmen über die Technik sind die über die Rolle der Primärfaktoren (Land, Arbeit, Ressourcen) streng zu trennen.

Wir werden uns aus der Menge der kombinatorisch möglichen Fälle denjenigen auswählen, der im wesentlichen auch dem von Malinvaud untersuchten Fall entspricht und darüberhinaus unsere Darstellungs- und Analysemethode weitgehend beizubehalten gestattet.

Wir werden von einem Spektrum linearer Techniken ausgehen und mehrere Primärfaktoren zulassen. Der Umfang und die Zusammensetzung dieser Primärfaktoren ist exogen bestimmt, und sie werden zu Beginn einer jeden Periode, am jeweiligen Markttag also, zur Verfügung gestellt.

Bisher wurde ein Pfad durch Folgen von Input- und Outputvektoren  $\{\mathbf{a}_t\}$ ,  $\{\mathbf{b}_t\}$  und durch eine Folge von Nettokonsumvektoren  $\{\mathbf{x}_t\}$  beschrieben. Die nun zusätzlich zu berücksichtigenden Primärfaktoren werden durch die Folge  $\{\mathbf{z}_t\}$  beschrieben. Statt einer gegebenen linearen Technik, beschrieben durch die Matrix  $\mathbf{A}$ , führen wir nun ein Spektrum linearer Techniken ein und bezeichnen mit  $\mathbf{A}_t$  die in Periode  $t$  aus dem Spektrum gewählte Technik. Um nun die Existenz von Effizienzpreisen für einen Pfad mit Technikwahl und Primärfaktoren nachzuweisen, beschreibt wir einen ähnlichen Weg wie im vorangegangenen Abschnitt. Wir weisen zunächst die Existenz von Effizienzpreisen für Teilstücke mit vorläufig beschränktem Horizont nach und untersuchen dann für zunehmende Horizontlänge den Grenzübergang.

#### Definition 4.3. Konsumeffizienz

Ein zulässiger und durchführbarer, vorläufig begrenzter Teilstück  $C^H \equiv \{\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}; \mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t\}_{t=0}^H$  ist konsumeffizient, wenn kein anderer durchführbarer Pfad  $C^* \equiv \{\mathbf{a}_t^*, \mathbf{b}_{t+1}^*; \mathbf{x}_t^*, \mathbf{z}_t^*\}_{t=0}^H$  existiert, für den gilt:

(i)

$$\mathbf{b}_1 \mathbf{A}_0 + \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{b}_1^* \mathbf{A}_0 + \mathbf{x}_1^*$$

(ii)

$$\mathbf{a}_H \geq \mathbf{a}_H^*$$

(iii)

$$\mathbf{x}_t^* \geq \mathbf{x}_t, \quad t = 0, 1, \dots, H,$$

wobei  $\{\mathbf{x}_t\}$  und  $\{\mathbf{x}_t^*\}$  nicht identisch sind. Man beachte, daß beide Teilpfade die gleiche Ausstattung mit Primärfaktoren aufweisen.

Wir werden nun im ersten Schritt mit Hilfe der Methode der linearen Programmierung die Existenz von Effizienzpreisen für einen vorläufig begrenzten Pfad nachweisen<sup>34</sup> und daraufhin die Erweiterung auf den unendlichen Horizont durchführen.

Der vorläufig begrenzte Teilpfad  $C^H \equiv \{\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_{t+1}; \mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t\}_{t=0}^H$  sei zulässig und konsumeffizient. Wenn dem so ist, dann ist das Konsumniveau am Markttag  $t = 0$  unter Einhaltung der Nebenbedingungen maximal. Die Nebenbedingungen sind die gegebene Anfangsausstattung, die Technologie, die Kapitalendbestände und die Konsumniveaus aller Perioden von  $t = 1, 2, \dots, H$ . Das Primal des linearen Programms lautet:

$$\max ! \Theta$$

s.t.

$$\mathbf{b}_1 \mathbf{A}_0 + \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{b}_1^* \mathbf{A}_0 + \mathbf{x}_0 + \Theta \mathbf{u}^*$$

$$\mathbf{b}_t^* + \mathbf{z}_t \geq \mathbf{b}_{t+1}^* \mathbf{A}_t + \mathbf{x}_t$$

$$\mathbf{a}_H^* \geq \mathbf{a}_H$$

$$\mathbf{b}_t^* \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, H$$

Die angestrebte Lösung des linearen Programms ist  $\Theta = 0$  und  $\mathbf{b}_t^* = \mathbf{b}_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, H$ .  $\mathbf{u}^*$  ist ein semipositiver Vektor, der durch den Skalar  $\Theta$  proportional vergrößert bzw. verkleinert wird. Wäre  $\Theta > 0$  durchführbar, so hieße das, daß unter Einhaltung aller Nebenbedingungen zusätzlich zum Konsumniveau  $\mathbf{x}_0$  ein Güterbündel  $\Theta \mathbf{u}^*$  konsumtiv verwendet werden könnte, ohne in einer der Folgeperioden ein geringeres Konsumniveau in Kauf nehmen zu müssen. Es wird praktisch die Möglichkeit einer Pareto-Verbesserung überprüft. Die erste Nebenbedingung fordert implizit, daß die Lösung des linearen Programms am Markttag  $t = 0$  nicht mehr produzierbare Güter benötigt, als der konsumeffiziente Pfad. Die zweite Bedingung stellt sicher, daß die Outputs am Ende der Periode  $t$  zuzüglich der exogen gegebenen Primärfaktoren den Konsum am Markttag  $t$  und das Aktivitätsniveau

<sup>34</sup> Vgl. C. Bliss; Capital Theory and the Distribution of Income, North-Holland, 1975, S. 220 ff.

der anschließenden Periode  $t + 1$  begrenzen. (Es können nicht mehr Güter konsumtiv und produktiv verbraucht werden als in der Vorperiode produziert und exogen eingebracht wurden.) Die dritte Bedingung besagt, daß die Endkapitalbestände des konsumeffizienten Pfads nicht größer als  $\mathbf{a}_H^*$  sein dürfen und schließlich sollen alle Bruttooutputs nicht negativ sein.

Wir transformieren das primale Problem in die übliche LP-Schreibweise und erhalten:

$$\max ! \Theta$$

Nb.:

$$(\Theta, b_1^*, \dots, b_H^*, a_H) \begin{bmatrix} u^* \\ A_0 - I \\ A_1 - I \\ \ddots \\ A_{H-1} - I \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 A \\ z_1 - x_1 \\ \dots \\ z_H - x_H \\ -a_H \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_H) \geqq 0 .$$

Das dazu gehörige Dual-Problem lautet:

$$\min ! \mathbf{b}_1^* \mathbf{A}_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{t=1}^H (\mathbf{z}_t - \mathbf{x}_t) \mathbf{p}_t - \mathbf{a}_H^* \mathbf{p}_H$$

Nb.:

$$\begin{bmatrix} u^* \\ A_0 - I \\ A_1 - I \\ \ddots \\ A_{H-1} - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \dots \\ \dots \\ p_H \end{bmatrix} \geqq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wie aus der Theorie der linearen Programmierung bekannt ist, stehen das Primal- und Dual Problem in mehrfacher Hinsicht in Beziehung zueinander. Vor diesem Hintergrund können wir nun beweisen, daß zu dem konsumeffizienten Pfad  $C^H$  (mit vorläufig begrenztem Horizont) ein nicht triviales System von Effizienzpreisen existiert. Die optimale Lösung des Primals seien die Outputniveaus  $(\mathbf{b}_1^o, \mathbf{b}_2^o, \dots, \mathbf{b}_H^o)$  und  $\Theta = 0$ .  $\Theta > 0$  würde ja bedeuten, daß man am ersten Markttag den Konsum hätte erhöhen können, ohne an späteren Markttagen den Konsum reduzieren zu müssen. Wenn also das Primal eine optimale Lösung hat, dann muß das Dual mindestens eine Lösung aufweisen, die komplementär zu den Ungleichungen der Nebenbedingungen des Primals sind (complementary slackness conditions<sup>35</sup>).

<sup>35</sup> Vgl. M.D. Intriligator; Mathematical Optimization and Economic Theory, Englewood Cliffs, N.J. 1971, S. 79 ff.

Die zu  $\Theta$  komplementäre Nebenbedingung liefert die Numérairegleichung für die Basisperiode:

$$\mathbf{u}\mathbf{p}_0 = 1.$$

Die weiteren Nebenbedingungen des Duals lauten:

$$\mathbf{A}_t - \mathbf{p}_{t+1} \geq 0, \quad t = 1, \dots, H.$$

Komplementär hierzu gelten die Ungleichungen des Primals

$$\mathbf{b}_t \geq \mathbf{0}, \quad t = 1, 2, \dots, H.$$

Multipliziert man die Nebenbedingungen des Duals mit  $\mathbf{b}_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, H$ , so ergibt sich

$$\mathbf{b}_{t+1}\mathbf{A}_t\mathbf{p}_t \geq \mathbf{b}_{t+1}\mathbf{p}_{t+1}.$$

Umgekehrt sind die Nebenbedingungen des Primals

$$\mathbf{b}_{t+1}\mathbf{A}_t - \mathbf{b}_t \leq \mathbf{z}_t - \mathbf{x}_t, \quad t = 0, 1, \dots, H-1,$$

$$\mathbf{a}_H^* \leq \mathbf{a}_H$$

komplementär zu  $\mathbf{p}_t \geq \mathbf{0}$ ,  $t = 0, 1, \dots, H$ .

Multipliziert man die Nebenbedingungen des Primals mit  $\mathbf{p}_t$ , so erhält man

$$\mathbf{b}_{t+1}\mathbf{A}_t\mathbf{p}_t - \mathbf{b}_t\mathbf{p}_t \leq (\mathbf{z}_t - \mathbf{x}_t)\mathbf{p}_t$$

bzw.

$$\mathbf{b}_{t+1}\mathbf{A}_t\mathbf{p}_t \leq \mathbf{b}_t\mathbf{p}_t - \mathbf{x}_t\mathbf{p}_t + \mathbf{z}_t\mathbf{p}_t$$

$$\mathbf{a}_H\mathbf{p}_H \leq \mathbf{a}_H^*\mathbf{p}_H$$

Somit erhalten wir

$$\mathbf{b}_{t+1}\mathbf{p}_{t+1} \leq \mathbf{b}_{t+1}\mathbf{A}_t\mathbf{p}_t \leq \mathbf{b}_t\mathbf{p}_t - \mathbf{x}_t\mathbf{p}_t + \mathbf{z}_t\mathbf{p}_t,$$

bzw.

$$\mathbf{b}_{t+1}\mathbf{p}_{t+1} \leq \mathbf{a}_t\mathbf{p}_t = \mathbf{b}_t\mathbf{p}_t - \mathbf{x}_t\mathbf{p}_t + \mathbf{z}_t\mathbf{p}_t.$$

Damit gilt

$$\mathbf{b}_{t+1}\mathbf{p}_{t+1} - \mathbf{a}_t\mathbf{p}_t = \mathbf{G}_t \leq 0, \quad t = 0, 1, \dots, H-1,$$

und

$$\mathbf{a}_H \mathbf{p}_H \leq \mathbf{a}_H^* \mathbf{p}_H .$$

Wir haben bewiesen, daß zu einem konsumeffizienten Pfad mit vorläufig begrenztem Horizont ein Effizienzpreissystem existiert. Der umgekehrte Schluß, von einem Effizienzpreissystem auf die Existenz eines konsumeffizienten Pfads, ist auf der Grundlage der bisherigen Überlegungen nicht möglich. Ein einfaches Beispiel, das in der Literatur unter dem Begriff „Überakkumulationsproblem“ behandelt wird, verdeutlicht dies.

Man produziert Weizen mit Hilfe von Weizen und Arbeit. Die Zahl der Arbeitskräfte wachse mit einer konstanten Rate pro Einheitsperiode. In jeder Einheitsperiode wird der gesamte Weizenoutput wieder als Input eingesetzt. Unter den zur Verfügung stehenden Aktivitäten wird die mit dem höchsten Output pro Kopf eingesetzt. Ein solcher Pfad ist effizient und zwar in dem Sinne, daß die Waren in den richtigen Aktivitäten eingesetzt werden. Somit existieren auch Effizienzpreise. Da jedoch nichts konsumiert wird, ist der Pfad freilich nicht konsumeffizient.

Im nun folgenden letzten Schritt werden wir wieder Malinvauds Methode anwenden und den Pfad mit unendlichem Horizont durch Teilpfade mit vorläufig begrenzter aber wachsender Horizontlänge approximieren.

Angenommen für einen konsumeffizienten Pfad mit vorläufig begrenztem Horizont  $H$  existiere ein eindeutiges Effizienzpreissystem  $P^H \{ \mathbf{p}_0^H, \mathbf{p}_1^H, \dots, \mathbf{p}_H^H \}$ . Nun verschieben wir die Horizontlänge nach  $H + 1$  und erhalten wieder ein eindeutiges Effizienzpreissystem  $P^{H+1} = \{ \mathbf{p}_0^{H+1}, \mathbf{p}_1^{H+1}, \dots, \mathbf{p}_{H+1}^{H+1} \}$ . Bei Eindeutigkeit der Preissysteme ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0^H &= \mathbf{p}_0^{H+1} \\ \mathbf{p}_1^H &= \mathbf{p}_1^{H+1} \\ &\vdots \\ \mathbf{p}_H^H &= \mathbf{p}_H^{H+1} \end{aligned}$$

d. h. durch die Verschiebung des Horizontendes von  $H$  nach  $H + 1$  sind die ersten  $H$ -Preisvektoren des Preissystems  $P^H$  identisch mit den Preisvektoren des Preissystems  $P^{H+1}$ . Läßt man  $H$  gegen unendlich ( $\infty$ ) gehen, so gilt

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \mathbf{p}_0^H = \mathbf{p}_0^*$$

bzw.

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \mathbf{p}_t^H = \mathbf{p}_t^* \text{ für alle } t.$$

Damit ist  $P^* = \{ \mathbf{p}_0^*, \mathbf{p}_1^*, \dots, \mathbf{p}_t^*, \dots \}$  das Effizienzpreissystem für einen konsumeffizienten Pfad mit unendlichem Horizont.

Nun ergibt sich eine gewisse Komplikation beim Grenzübergang, wenn wir die bisherige Annahme der Eindeutigkeit der Effizienzpreisvektoren aufgeben. Bei glatter Substituierbarkeit (ein Kontinuum von Techniken) und bei einer einzigen linearen Technik ist Eindeutigkeit gewährleistet, nicht jedoch bei dem von uns zuletzt betrachteten Fall eines Spektrums linearer Techniken. So kann in einer Periode der konsumeffiziente Outputvektor z. B. mit zwei verschiedenen Techniken produziert werden. In diesem Fall spannen die den Techniken entsprechenden Effizienzpreisvektoren einen Kegel auf und jede Konvexitätskombination ist wiederum ein Effizienzpreisvektor. Angenommen der Effizienzpreisvektor für Horizontlänge  $H$  sei nicht eindeutig. Verschiebt man nun die Horizontlänge von  $H$  nach  $H + 1$ , so kann man „Glück“ oder „Pech“ haben. Ist in  $H + 1$  der Output nur durch eine Technik produzierbar, dann hat man „Glück“, denn dann ist  $\mathbf{p}_{H+1}^{H+1}$  eindeutig und  $\mathbf{p}_{H+1}^{H+1}$ ,  $\mathbf{p}_{H+1}^{H+1}$  usw. können rekursiv bestimmt werden. Ergibt sich in  $H + 1$  jedoch kein eindeutiger Effizienzpreisvektor, dann hat man „Pech“. Freilich gibt es zunächst keinen Grund anzunehmen, daß im allgemeinen eine fortlaufende Horizontverschiebung dazu führt, daß sich „irgendwann“ ein eindeutiger Preisvektor ergeben wird. Um aus dieser unendlichen Folge der Preisvektorenkegel eine Folge von Preisvektoren herausziehen zu können, die dann als das Effizienzpreissystem für den unendlichen Horizont interpretiert werden kann, muß gewährleistet sein, daß die Folge der Preisvektorenkegel einen nichtleeren Durchschnitt aufweist. Extrem vereinfacht lautet die Frage, ob sich z. B. bei der Projektion eines durch Preisvektoren aufgespannten dreidimensionalen Kegels auf seine ersten zwei Koordinaten eine Überdeckung mit dem zweidimensionalen Kegel ergibt. Unter der Voraussetzung, daß in jeder Periode die Menge der Preisvektorenkegel kompakt ist, gilt hinsichtlich der Folge der Preisvektorenkegel der Cantorsche Durchschnittssatz, demzufolge eine absteigende Folge nichtleerer, kompakter Mengen einen nichtleeren Durchschnitt hat.<sup>36</sup>

Ein durch Preisvektoren aufgespannter Kegel ist abgeschlossen und konvex. Um Kompaktheitseigenschaften zu erhalten, muß er außerdem noch beschränkt sein. Dieses mengentheoretische Erfordernis sollte freilich auch einen ökonomischen Sinn haben, d. h. ökonomisch interpretiert werden können. Malinvaud erzeugt diese Beschränkung, indem er zusätzliche Anforderungen an die Technologie stellt. Die Technologie muß neben den üblichen Eigenschaften wie Konvexität, free disposal usw. eine bestimmte zusätzliche Eigenschaft haben.<sup>37</sup> Diese Eigenschaft wird durch die *Nontightness-Bedingung* beschrieben.<sup>38</sup> Sie beschreibt eine

<sup>36</sup> Vgl. v. Mangoldt-Knopp, Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 4, Stuttgart 1974, S. 356 ff.

<sup>37</sup> Malinvaud hat diese zusätzliche Eigenschaft der Technologie, die die mathematisch geforderte Beschränkung erzeugt, 1962 in einer Korrektur seines Beweises von 1953 genau spezifiziert. Vgl. E. Malinvaud; Efficient Capital Accumulation: A Corrigendum, *Econometrica*, 1962, S. 570–573.

<sup>38</sup> Zur Nontightness-Bedingung siehe: R. Radner; Efficiency Prices for Infinite Horizon Production Programmes, *Review of Economic Studies*, 1967, S. 51–66. D. McFadden; An Example of the Non-Existence of Malinvaud Prices in a Tight Economy, *Journal of Mathe-*

technologische Substitutionseigenschaft zwischen Primärfaktoren und produzierten Inputs (Produktionsmitteln). Zur exakten Formulierung der Bedingung teilen wir die Vektoren der Inputs, der Outputs und den Preisvektor nach Primärfaktoren und produzierten Gütern auf:

$$\mathbf{a}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_t \\ \mathbf{e}_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_t \\ \mathbf{s}_t \end{bmatrix},$$

wobei  $\mathbf{d}_t, \mathbf{f}_t, \mathbf{v}_t$  die  $l = n - m$  Elemente und  $\mathbf{e}_t, \mathbf{s}_t$  die  $m$  Elemente der  $n$ -dimensionalen Vektoren  $\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_t, \mathbf{p}_t$  darstellen. Der Vektor der Primärfaktoren ist  $\mathbf{e}_t$ , und  $\mathbf{s}_t$  ist deren Preisvektor;  $\mathbf{d}_t, \mathbf{f}_t, \mathbf{v}_t$ , bezeichnen den Input-, Output- bzw. Preisvektor der produzierten Güter.

*Definition der Nontightness:*

Ein Paar von Input-Output-Vektoren  $(\bar{\mathbf{a}}_t, \bar{\mathbf{b}}_{t+1}) \in T_t$  ist *nontight*, wenn ein zweites Vektorpaar  $(\bar{\mathbf{a}}_t, \bar{\mathbf{b}}_{t+1}) \in T_t$  existiert, und in einer beliebigen Periode gilt:

$$\mathbf{f}_{t+1} > \bar{\mathbf{f}}_{t+1},$$

$$\mathbf{e}_t < \bar{\mathbf{e}}_t, \quad \mathbf{d}_t \geq \bar{\mathbf{d}}_t.$$

Nontightness besagt somit, daß ein Anstieg produzierter Inputs einen reduzierten Einsatz von Primärfaktoren bei insgesamt gestiegenem Output gestattet. Das ist jedoch nur möglich, wenn die Technologie erlaubt, in der gleichen Periode Primärfaktoren durch produzierte Inputs zu ersetzen. Im einfachsten Fall, in dem Weizen (Output) mit Hilfe von Arbeit (Primärfaktor) und Weizen (Input) produziert wird, reduziert sich die Nontightness-Bedingung auf die statische Substitutionsbeziehung zwischen dem eingesetzten Produktionsmittel Weizen und dem Primärfaktor Arbeit.

Im nächsten Schritt soll gezeigt werden, inwieweit die Nontightness-Bedingung zu einer Beschränkung der unendlichen Folge der Preisvektoren führt. Hierbei stützen wir uns auf Malinvauds Vorgehensweise.

Zunächst definieren wir die Norm der zwei nichtnegativen Preisvektoren:

$$\|\mathbf{v}_t\| = \sum_{i=1}^l v_{it}, \quad \|\mathbf{s}_t\| = \sum_{i=l+1}^m s_{it}.$$

Die Nontightness-Bedingung impliziert die Existenz von Zahlen  $\alpha_t$ , so daß für jeden  $nH$ -dimensionalen Preisvektor

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_H, \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0},$$

---

mathematical Economics 1975, S. 17 – 19. M. Kurz; Tightness and Substitution in the Theory of Capital, Journal of Economic Theory, 1969, S. 244 – 272.

der die Gewinnmaximierungsbedingung erfüllt, gilt

$$(III.26) \quad \mathbf{v}_1 \geq \mathbf{0} ;$$

$$(III.26'') \quad \|\mathbf{v}_{t+1}\| \leqq \alpha_t \|\mathbf{v}_t\| ;$$

$$(III.26''') \quad \|\mathbf{s}_t\| \leqq \alpha_t \|\mathbf{v}_t\| , \quad \text{für alle } t < H.$$

Die Preisvektoren müssen also eine beschränkte Folge bilden. Um das zu beweisen, gehen wir davon aus, daß die Technik  $(\bar{\mathbf{a}}_t, \bar{\mathbf{b}}_{t+1})$  für alle  $t < H$  die Periodengewinne maximiert, d. h. für  $\mathbf{y}_t = \mathbf{a}_t - \mathbf{b}_t$  muß gelten:

$$\sum_{t=1}^H (\mathbf{y}_t - \bar{\mathbf{y}}_t) \mathbf{p}_t \geqq 0, \forall t < H.$$

Unter der Berücksichtigung der Nontightness-Bedingung läßt sich diese in „intensiver“ Schreibweise formulierte Bedingung in die „extensive“ Schreibweise transformieren. Für Periode  $t$  gilt:

$$\bar{\mathbf{f}}_{t+1} \mathbf{v}_{t+1} - \bar{\mathbf{d}}_t \mathbf{v}_t - \bar{\mathbf{e}}_t \mathbf{s}_t \geqq \mathbf{f}_{t+1} \mathbf{v}_{t+1} - \mathbf{d}_t \mathbf{v}_t - \mathbf{e}_t \mathbf{s}_t$$

bzw.

$$(III.27) \quad (\mathbf{f}_{t+1} - \bar{\mathbf{f}}_{t+1}) \mathbf{v}_{t+1} - (\mathbf{d}_t - \bar{\mathbf{d}}_t) \mathbf{v}_t - (\mathbf{e}_t - \bar{\mathbf{e}}_t) \mathbf{s}_t \leqq 0 ,$$

wobei

$$(III.28) \quad \mathbf{v}_{t+1} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_t \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{s}_t \geqq \mathbf{0} ,$$

sowie

$$(III.29) \quad \mathbf{f}_{t+1} - \bar{\mathbf{f}}_{t+1} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{e}_t - \bar{\mathbf{e}}_t < \mathbf{0} .$$

Da die Triviallösung ausgeschlossen ist, kann davon ausgegangen werden, daß der Preisvektor für reproduzierbare Güter zumindest in der ersten Periode semi-positiv ist. Wenn also

$$\mathbf{v}_1 \geqq \mathbf{0} ,^{39}$$

dann ist die Bedingung (III.26') erfüllt. Um (III.26'') und (III.26''') zu erfüllen, muß gelten:

---

<sup>39</sup> Angenommen in Periode  $\tau$ ,  $1 < \tau < t$ , gelte  $\mathbf{v}_\tau = \mathbf{0}$ , dann würde aus (III.27) und (III.29) folgen, daß  $\mathbf{v}_{\tau+1} = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{s}_\tau = \mathbf{0}$ , was der Annahme  $\mathbf{p} \geqq \mathbf{0}$  widerspricht. Somit gilt zumindest in der ersten Periode  $\mathbf{v}_1 \geqq \mathbf{0}$ , so daß die Bedingung (III.26') erfüllt ist.

$$(III.30') \quad f_{i,t+1} - \bar{f}_{i,t+1} \geqq \varphi_t, \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

$$(III.30'') \quad e_{it} - \bar{e}_{it} \leqq \varphi_t, \quad i = l+1, \dots, m,$$

$$(III.30''') \quad d_{it} - \bar{d}_{it} \leqq \delta_t, \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

wobei  $\varphi_t, \delta_t$  beliebige, positive Zahlen darstellen. Damit wird sichergestellt, daß die Differenz im Output der reproduzierbaren Güter und die für den Einsatz der Primärfaktoren zwischen den beiden technologischen Verfahren eine bestimmte Grenze nicht unter- bzw. überschreitet. Daraus folgt unmittelbar

$$(III.31) \quad \|\mathbf{v}_{t+1}\| |\varphi_t| - \|\mathbf{v}_t\| \delta_t + \|\mathbf{s}_t\| \varphi_t \leqq (\mathbf{f}_{t+1} - \bar{\mathbf{f}}_{t+1}) \mathbf{v}_{t+1} - (\mathbf{d}_t - \bar{\mathbf{d}}_t) \mathbf{v}_t - (\mathbf{e}_t - \bar{\mathbf{e}}_t) \mathbf{s}_t \leqq 0.$$

Unterstellt man  $\alpha_t = \delta_t / \varphi_t$ , so ergibt sich aus der linken Seite von Ungleichung (III.31)

$$\mathbf{v}_{t+1} - \alpha_t \mathbf{v}_t \leqq -\mathbf{s}_t,$$

so daß

$$\mathbf{v}_{t+1} \leqq \alpha_t \mathbf{v}_t.$$

Somit ist Bedingung (III.26'') erfüllt.

Aus

$$\mathbf{v}_{t+1} \leqq \alpha_t \mathbf{v}_t - \mathbf{s}_t,$$

folgt

$$\mathbf{s}_t \leqq \alpha_t \mathbf{v}_t,$$

so daß auch Bedingung (III.26''') erfüllt wird.

Vorausgesetzt also der Vektor

$$\mathbf{P}^H = \{\mathbf{p}_1^H, \mathbf{p}_2^H, \dots, \mathbf{p}_H^H\}, \quad \forall H,$$

ist ein Effizienzpreissystem, dann ist (III.26')

$$\mathbf{v}_1^H \geqq \mathbf{0}$$

erfüllt, und dann läßt sich dieser Vektor normieren, so daß

$$\|\mathbf{v}_1^H\| = 1.$$

Aus (III.26'') und (III.26''') folgt dann, daß jede Folge gleichdatierter Preise  $\{\mathbf{p}_t^H\}, H = 1, 2, 3, \dots$ , beschränkt ist und somit mindestens einen Häufungspunkt

hat. Damit ist gezeigt, daß die Nontightness-Bedingung die Existenz eines nichttrivialen Preissystems für einen unendlichen Pfad sicherstellt.

Die Nontightness-Bedingung ist eine sehr spezielle Substitutionsbeziehung, die sowohl Leontief-Technologien als auch die für das von Neumann-Modell charakteristischen Polyedertechnologien ausschließt.<sup>40</sup> Ist ein Primärfaktor in irgendeiner Periode nicht erhältlich, dann ist die Nontightness-Bedingung verletzt. Erfüllt ein Pfad die Nontightness-Bedingung nicht, schließt das noch lange nicht aus, daß für solch einen Pfad ein nichttriviales Preissystem gefunden werden kann. Es steht ja außer Frage, daß für ein von Neumann-System unter geeigneten Bedingungen ein nichttriviales Preissystem existiert.

## 5. Konsumoptimale Pfade

All diese Probleme können, so scheint es, gelöst werden, wenn man das ziemlich schwache Kriterium der Konsumeffizienz durch ein strengeres ersetzt. Eine Möglichkeit besteht darin, nur solche Pfade zu berücksichtigen, die sich als nutzenmaximal herausstellen, wobei die zu maximierende intertemporale Nutzenfunktion über den gesamten Pfad definiert wird. Pfade, die nach diesem Kriterium ausgewählt wurden, nennen wir *konsumoptimal* oder kurz *optimal*. Definiert man die Nutzenfunktion über den Lebenszyklus der Konsumenten, d. h. bleibt man bei einem endlichen Horizont, dann kann, wie Burmeister mit Hilfe eines einfachen Beispiels zeigt<sup>41</sup>, nicht ausgeschlossen werden, daß trotz intertemporaler Nutzenmaximierung, dem Vorliegen von Gleichgewichtspreisen und vollkommener Voraussicht, ein konsumineffizienter Pfad gewählt wird. Die Ursache hierfür liegt an den Eigenschaften der Nutzenfunktion. Der Konsumverzicht am „Anfang“ des Lebenszyklus dient der Akkumulation eines Kapitalbestands, dessen Ertrag am „Ende“ des Lebenszyklus den Konsum alimentiert. Ist der Konsumverzicht „zu groß“, d. h. wird „zu viel“ Kapital akkumuliert, dann fällt die Ertragsrate des Kapitals, der reale Zinssatz also, unter die Wachstumsrate des Kapitals. Da der Konsum pro Kopf maximal ist, wenn die Ertragsrate des Kapitals dessen Wachstumsrate entspricht, folgt aus der Abweichung, daß die gewählte Allokation konsumineffizient ist, da jeder Konsument in jeder Periode seines Lebenszyklus mehr Güter hätte konsumieren können.

Das Überakkumulationsproblem bleibt somit auch bei Nutzenmaximierung der Konsumenten bestehen. Die Frage ist somit, was durch die Einführung einer intertemporalen Nutzenfunktion gewonnen worden ist.

Zweifellos wird die Vergleichbarkeit von Paden vereinfacht, da man von einer vektoriellen Betrachtung zu einer skalaren übergeht. Damit wird die Menge der zu betrachtenden Pfade drastisch eingeschränkt. Die Menge der konsumoptimalen

<sup>40</sup> Vgl. M. Kurz; Tightness and Substitution in the Theory of Capital, a. a. O., S. 245.

<sup>41</sup> Vgl. E. Burmeister; Capital Theory and Dynamics, a. a. O., S. 53 – 57.

Pfade bildet eine Teilmenge der Menge der konsumeffizienten Pfade. Allerdings steht oder fällt diese Eingrenzung mit den Bedingungen und Möglichkeiten, eine Nutzenfunktion über eine unendliche Folge von Konsumvektoren  $\{\mathbf{x}_t\}_1^\infty$  zu definieren. Es muß an dieser Stelle vorausgeschickt werden, daß der durch die Einführung einer Nutzenfunktion erzielten Einschränkung auf konsumoptimale Pfade eine Reihe neuer Probleme gegenübersteht. Nehmen wir also zunächst einmal an, daß es möglich ist, eine Nutzenfunktion

$$U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_t, \dots) = U(\mathbf{x}_t), \forall t ,$$

zu definieren, so daß die Zielfunktion eines Konsumenten lautet:

$$\max! \sum_{t=1}^{\infty} U(\mathbf{x}_t) ,$$

bzw. bei stetiger Zeit

$$\max! \int_0^{\infty} U(\mathbf{x}_t) dt ,$$

d. h. daß der Nutzenstrom des Konsumpfads  $\{\mathbf{x}_t\}_1^\infty$  maximiert werden soll. Wir sehen sofort, daß ohne zusätzliche Annahmen die Summe bzw. das Integral über den Nutzenstrom unendlich ist. Um einen endlichen Nutzenstrom eines unendlichen Konsumpfads zu erhalten, kann man zunächst über zwei Alternativen nachdenken. Eine Variante stammt von Ramsey.<sup>42</sup> Ramsey postulierte ein globales Sättigungsniveau  $U$  (state of bliss), so daß

$$\max! \int_0^{\infty} (U(\mathbf{x}_t) - \bar{U}) dt$$

gilt. Unter der Voraussetzung, daß die Technologie produktiv ist und die Konsumgüterproduktion technologisch beschränkt wird, nähert sich  $U(\mathbf{x}_t)$  für  $t \rightarrow \infty$  asymptotisch an  $\bar{U}$  an. In diesem Fall nimmt das Integral einen endlichen Wert an. Die Annahme eines globalen Sättigungsniveaus ist freilich nicht ganz unproblematisch, denn üblicherweise wird in der Präferenz- bzw. Nutzentheorie gerade „Nichtsättigung“ vorausgesetzt.

Die zweite Möglichkeit besteht in der Diskontierung des Nutzenstroms mit einer Zeitpräferenzrate  $\xi$ , so daß die Zielfunktion des Konsumenten wie folgt lautet:

$$\max! \int_0^{\infty} (U(\mathbf{x}_t) e^{-\xi t}) dt$$

---

<sup>42</sup> F. P. Ramsey; „A Mathematical Theory of Saving“, Economic Journal, 1928, S. 543–559.

Eine positive Zeitpräferenzrate ist jedoch keine hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Integrals. Darüber hinaus ist die Annahme einer positiven (und sogar noch uniformen) Zeitpräferenzrate eine reine ad hoc Hypothese, die aus ethischen Gründen nicht ganz unproblematisch ist, weil sie impliziert, daß der Nutzen (bzw. die Wohlfahrt) späterer Generationen geringer gewichtet wird als derjenige der gegenwärtigen Generation. Soll die Wohlfahrt aller Generationen gleich gewichtet werden, dann müßte die Zeitpräferenzrate gleich Null gesetzt werden. Ist das Integral über den Nutzenstrom nicht von oben beschränkt, dann ist auch eine positive Zeitpräferenzrate keine hinreichende Bedingung für die Konvergenz derselben.

Ein weiteres Optimalitätskriterium für unendliche Pfade, das das Konvergenzproblem elegant umgeht, wurde von von Weizsäcker vorgeschlagen.<sup>43</sup>

*Definition: „Overtaking criterion“.*

Ein technisch effizienter Pfad  $(\mathbf{a}_t^1, \mathbf{b}_t^1, \mathbf{x}_t^1)$  ist gegenüber einem anderen technisch effizienten Pfad  $(\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_t, \mathbf{x}_t)$ , der mit den gleichen Anfangsbeständen  $\mathbf{b}_0^1 = \mathbf{b}_0$  startet, dann optimal, wenn ab einem Zeitpunkt  $T \geq T^*$  gilt:

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \int_0^T [U(\mathbf{x}_t^1) - U(\mathbf{x}_t)] e^{-\xi t} dt \geq 0$$

Das Kriterium besagt, daß von zwei technisch effizienten Pfaden, die mit den gleichen Anfangsausstattungen starten, der Pfad optimal ist, der ab einem bestimmten Zeitpunkt für alle folgenden Perioden einen dauerhaft höheren diskontierten Nutzenstrom ermöglicht. Wie groß auch immer der Nutzenstrom eines Pfads zwischen 0 und  $T^*$  sein mag, wird er ab  $T^*$  von einem anderen Pfad dauerhaft „überholt“, dann dominiert der Pfad, der ab  $T^*$  den höheren diskontierten Nutzenstrom ermöglicht. Da Konsumpfade und ihre Differenzen nicht a priori monoton sind, wird bei diesem Kriterium der „lim inf“ berücksichtigt. Gilt die Vorteilhaftigkeit für den kleinsten Grenzwert, dann gilt sie auch für den größten.

Die aus der kapitaltheoretischen Perspektive wichtigere Frage ist freilich, wie man der Annahme einer positiven (und uniformen) Zeitpräferenzrate ihren ad-hoc-Charakter nimmt. Man müßte zeigen, daß sie aus den Präferenzen selbst resultiert, bzw. selbst eine Eigenschaft der Präferenzen ist. Hierbei handelt es sich *nicht* um das Konzept der marginalen Zeitpräferenz. Vielmehr muß man im Grunde auf ein allgemeineres Konzept zurückgreifen, um eine positive marginale Zeitpräferenz zu begründen. Dieses Konzept wurde bereits von Fisher<sup>44</sup> mit dem Begriff „impatience“ belegt. Burmeister nennt es in Abgrenzung zur marginalen Zeitpräferenz „ab-

<sup>43</sup> C. C. von Weizsäcker; Existence of Optimal Programs of Accumulation for an Infinite Time Horizon, Review of Economic Studies, 1965, S. 85 – 104.

<sup>44</sup> J. Fisher, The Theory of Interest, New York 1930, S. 66 – 68.

solute“ Zeitpräferenz.<sup>45</sup> Das folgende Diagramm hilft, das Konzept der „impatience“ zu erläutern.

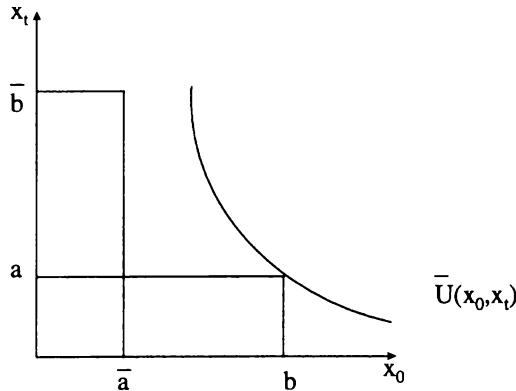


Abbildung 2

$(a, b)$  und  $(\bar{a}, \bar{b})$  sind Güterbündel, in denen Gegenwartskonsum  $x_0$  und Zukunftskonsum  $x_t$  in genau umgekehrten Proportionen vorliegen, wobei  $(\bar{a} = a < b = \bar{b})$  gilt. Positive absolute Zeitpräferenz bezüglich  $(a, b)$  liegt vor, wenn

$$\bar{U}(a, b) > \bar{U}(\bar{a}, \bar{b}).$$

Man sieht, daß zwischen dem Vorliegen einer positiven absoluten Zeitpräferenz und z. B. einer negativen marginalen Zeitpräferenzrate kein Widerspruch besteht.

Die zentrale Frage ist also, welche Annahmen getroffen werden müssen, so daß eine intertemporale Nutzenfunktion, definiert über eine unendliche Folge von Konsumvektoren, eine positive absolute Zeitpräferenz aufweist. Eine eingehende Analyse dieses Sachverhalts erfordert einen recht umfangreichen Produktionsumweg, der sinnvoll ist, wenn unser Hauptinteresse auf konsumoptimale Pfade gerichtet wäre. Da wir uns im weiteren Verlauf jedoch überwiegend auf konsumeffiziente Pfade und Produktionsmodelle konzentrieren, wollen wir nur die aus unserer Sicht interessanten Aspekte betrachten.

Zur Aufstellung einer intertemporalen Nutzenfunktion werden drei Annahmen getroffen:

- (1) Stationarität der Präferenzen.
- (2) Homogenität der Präferenzen.
- (3) Periodenunabhängigkeit der Präferenzen.

<sup>45</sup> E. Burmeister, Capital Theory and Dynamics, a. a. O., S. 27 – 29.

Zu (1):

Hiermit ist gemeint, daß sich das Präferenzsystem der Individuen über die Zeit nicht verändert.

„This expresses the idea that the passage of time does not have an effect on preferences.“<sup>46</sup>

Zu (2):

Homogenität heißt, daß ein proportionaler Anstieg der Menge der Konsumgüter zu einem Anstieg des Nutzenniveaus führt, und zwar unabhängig von den Proportionen, in denen die Güter im Konsumgüterkorb enthalten sind.

Zu (3):

Hiermit ist gemeint, daß der Nutzen bzw. der Grenznutzen in einer Periode nur von der Menge der Konsumgüter in *dieser* Periode abhängt.

Jede dieser Annahmen wirkt für sich genommen ziemlich harmlos. Kombiniert man sie, ergeben sich jedoch drastische Konsequenzen.<sup>47</sup> Sollen alle drei Annahmen durch eine intertemporale Nutzenfunktion erfüllt sein, dann kann der aggregierte Nutzen, d. h. der Nutzen des gesamten Pfades als Summe der diskontierten, periodenbezogenen Nutzenwerte gewonnen werden und die Zeitpräferenzrate mit der der Periodennutzen diskontiert wird, ist *notwendig* uniform, d. h. in allen Perioden gleich. Als besonders drastisch wurde die Annahme der Unabhängigkeit gesehen, denn sie bedeutet, daß die Menge Konsumgüter, die ein Konsument heute aufgibt, um in Periode 5 seinen Konsum zu erhöhen, unabhängig von der Gütermenge ist, die er in Periode 4 und 6 zu konsumieren plant.

„It is nonsense to assume that successive consumptions are independent; the normal condition is that there is a strong complementarity between them.“<sup>48</sup>

Sparen im Sinne von „Nichtkonsumieren“ impliziert nicht, daß die Periode des zukünftigen Konsumierens bereits festgelegt werden muß. Bereits Keynes verwies darauf, daß ein Sparakt

„( . . . ) does *not* necessitate a decision to have dinner or to buy a pair of boots a week hence or a year hence or to consume any specified thing at any specified date.“<sup>49</sup>

Daher, so Hicks:

„What are being compared are present sacrifice, and *flow* of future satisfaction.“<sup>50</sup>

<sup>46</sup> T. C. Koopmans; Stationary Ordinal Utility and Impatience, *Econometrica*, 1960, S. 287–309, hier: S. 294.

<sup>47</sup> Vgl. J. R. Hicks; *Capital and Growth*, Oxford 1965, S. 253–258.

<sup>48</sup> Vgl. J. R. Hicks; *Capital and Growth*, a. a. O., S. 261.

<sup>49</sup> J. M. Keynes; *The General Theory of Employment, Interest and Money*, London 1936, S. 210.

<sup>50</sup> J. R. Hicks; *Capital and Growth*, a. a. O., S. 262.

Anstatt die Aufgabe einer bestimmten Konsummenge in Periode 0 der Konsummenge in, sagen wir, Periode 5 gegenüberzustellen, muß der gesamte Konsumstrom von Periode 1 bis Periode  $h$  (bzw. bis unendlich) dieser Aufgabe des Konsums in Periode 0 gegenübergestellt werden. Die Nutzenänderung in der Basisperiode wird der Nutzenänderung des gesamten folgenden Konsumstroms gegenübergestellt. Das folgende Schaubild will diese Überlegung verdeutlichen helfen.<sup>51</sup> Die Präferenzen eines Konsumenten werden durch eine Indifferenzkurve beschrieben. Die horizontale Achse bezeichnet das Nutzenniveau des Gegenwartskonsums  $u_0$ . An der vertikalen Achse tragen wir das Nutzenniveau des zukünftigen Konsums in Periode  $t$ ,  $u_t$ , ab. Jede Indifferenzkurve ist konvex zum Ursprung und schneidet die horizontale Achse.

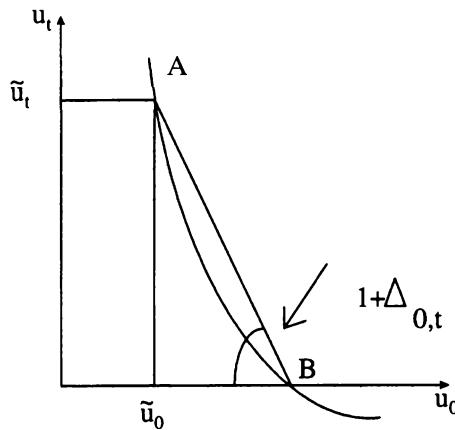


Abbildung 3

Der Punkt A gibt eine bestimmte Aufteilung von Gegenwartsnutzen  $\tilde{u}_0$  und zukünftigen Nutzen  $\tilde{u}_t$  an. Im Punkt B schneidet die durch A laufende Indifferenzkurve die  $u_0$ -Achse. Den Gegenwartsnutzen in B bezeichnen wir mit  $U$ . Ein Rückgang des Zukunftsnuzen von  $\tilde{u}_t$  auf 0 wird durch einen Anstieg des Gegenwartsnutzens von  $\tilde{u}_0$  auf  $U$  gerade kompensiert.

Das Verhältnis

$$\frac{\tilde{u}_t}{U - \tilde{u}_0} - 1$$

<sup>51</sup> Vgl. H. Uzawa; Time Preference, the Consumption Function, and Optimum Asset Holdings, in: „Value, Capital and Growth: Papers in Honour of Sir John Hicks“ (Ed. J. N. Wolfe), Edinburgh, 1968, S. 485 – 504.

bildet die Rate, mit der der Zukunftsnutzen diskontiert wird, um ihn mit dem Gegenwartsnutzen vergleichen zu können. Diese Zeitpräferenzrate ist somit definiert durch

$$1 + \Delta_{0,t} = \frac{\tilde{u}_t}{U - \tilde{u}_0} - 1 ,$$

bzw.

$$U = \tilde{u}_0 + \frac{\tilde{u}_t}{1 + \Delta_{0,t}} .$$

Für den allgemeinen Fall, in dem ein gesamter Konsumpfad die „Zukunft“ darstellt, gibt es so viele Nutzenniveaus zu berücksichtigen, wie der Konsumpfad Perioden hat, d. h. für den Fall, daß  $t = 1, 2, \dots, h$ , gilt:

$$U = u_0 + \frac{u_1}{1 + \Delta_{0,1}} + \frac{u_2}{1 + \Delta_{0,2}} + \dots + \frac{u_h}{1 + \Delta_{0,h}} .$$

In diesem Fall wird der Strom des Nutzens mit dem gegenwärtigen Nutzenniveau verglichen. Die Zeitpräferenzrate  $\Delta_{0,t}$  ist somit präferenzendogen, d. h. sie wird nicht mehr ad-hoc eingeführt. Ihre Höhe hängt vom Zeitprofil des gesamten Nutzenstroms  $(u_0, u_1, \dots, u_t)$  ab. Darüber hinaus sind die periodenbezogenen Zeitpräferenzraten  $(\Delta_{0,1}, \Delta_{1,2}, \Delta_{2,3}, \dots, \Delta_{t-1,t})$  nicht notwendig uniform wie im Fall periodenunabhängiger Nutzenniveaus. Dieses geänderte Konzept der Zeitpräferenz erlaubt es, eine sogenannte rekursive Nutzenfunktion über den gesamten Pfad zu konstruieren. Der Vorteil dieser rekursiven Nutzenfunktion besteht darin, daß sie nicht das Axiom der „Periodenunabhängigkeit des Nutzens“ erfüllen muß. Da wir, wie bereits erwähnt, konsumoptimale Pfade im weiteren Gang der Untersuchung nicht berücksichtigen, wollen wir das Konzept des rekursiven Nutzens jedoch nicht weiter behandeln.

## 6. Argumentationsstand und Folgeprobleme

Erinnern wir uns an unsere Fragestellung und den Gang der bisherigen Untersuchung. Eine zentrale Fragestellung der Kapitaltheorie ist, warum Kapital als produziertes Produktionsmittel einen dauerhaften Einkommensstrom abwirft, oder etwas anders ausgedrückt: Warum ist der reale Zinssatz bzw. die Profitrate im Gleichgewicht positiv?

Wir haben zunächst die Walrassche und die Wicksellianische Behandlung dieser Frage dargestellt und sind dabei auf Konsistenzprobleme gestoßen, die bei Lindahl zu einer theoretischen Neuorientierung führte. Er gab den Anstoß zur Entwicklung der intertemporalen Gleichgewichtstheorie, in der die Fragen der Kapitaltheorie mit Hilfe allgemeiner Sätze über die intertemporale Allokation behandelt werden. So gesehen ist Kapitaltheorie letztendlich nur ein Spezialfall einer allgemeinen Theorie intertemporaler Ressourcenallokation. Eine Analyse des Grundmodells

der intertemporalen Allgemeinen Gleichgewichtstheorie war deshalb Gegenstand des zweiten Teils dieser Untersuchung. Modellen mit unendlichem Horizont kam dabei eine große Bedeutung zu, weil darin der mit kapitaltheoretischen Fragestellungen konsistente Modellansatz gesehen wird. Unter planungstheoretischen Aspekten, wie sie in der Theorie des effizienten bzw. optimalen Wachstums vorherrschen, läßt sich die Festlegung der Horizontlänge noch plausibel begründen, nicht jedoch, wenn es um eine marktwirtschaftliche Steuerung geht. Auch Malinvauds bahnbrechender Aufsatz von 1953 wird m.E. sehr häufig aus planungstheoretischer Perspektive interpretiert, obwohl der kapitaltheoretische Aspekt nicht nur durch seine dogmenhistorische Anknüpfung an Lindahl, Wicksell und Walras hervortritt, sondern gerade durch sein Bemühen, die Bedingungen für die Existenz eines positiven Realzinssatzes bei „kapitalistischer“ Produktion aufzuzeigen. Da sich Malinvaud überwiegend auf die Analyse konsumeffizienter Pfade beschränkt, kann die Begründung positiver Zinssätze nicht mit dem Rekurs auf die Zeitpräferenzrate geführt werden. Das ist nur möglich, wenn man sich auf konsumoptimale Pfade stützt.

Für konsumeffiziente Pfade muß die Begründung positiver Zinssätze auf der Produktionsseite gesucht werden. Betrachten wir zunächst die Eigenzinssätze. Da positive Eigenzinssätze vorliegen, wenn die diskontierten Preise der Güter entlang des Pfads fallen und somit die Mengen steigen, muß die verfügbare Technologie eine solche Mengenentwicklung ermöglichen. Werden auf diesem Pfad *nichtvermehrbar* Primärfaktoren eingesetzt, dann führt eine Expansion der produzierbaren Güter zu einer Verknappung der Primärfaktoren und damit zu einem Preisanstieg von diesen. Im allgemeinen werden die Preise der produzierbaren Güter nicht fallen, so daß positive Eigenzinssätze nicht garantiert werden können. Aus diesem Grund muß die Nontightness Bedingung eingeführt werden. Ist die Technologie „nontight“, dann kann der Anstieg der Preise der Primärfaktoren bei einer Expansion der Produktion verhindert werden, weil Primärfaktoren durch produzierbare Güter substituiert werden können. Unter diesen strengen Voraussetzungen ist die Positivität der Eigenzinssätze sichergestellt.

Von diesem im engeren Sinne kapitaltheoretischen Problem kommen wir nun zum gleichgewichtstheoretischen Aspekt unserer Betrachtung. Sowohl in der Klassik als auch bei Wicksell und Walras ist die Uniformität des realen Zinssatzes bzw. der Profitrate ein Charakteristikum des langperiodigen Gleichgewichts. Dagegen sind die Eigenzinssätze, die in einem allgemeinen intertemporalen Gleichgewicht herrschen, weder von Periode zu Periode uniform, noch uniform bezüglich der verschiedenen Kapitalgüter. Sie sind in einem Sektor nicht uniform, weil die Outputmengen eines Sektors nicht mit einer konstanten Expansionsrate wachsen. Halten wir andererseits die Periode fest und vergleichen die Eigenzinssätze der verschiedenen Güter, die in den jeweiligen Sektoren produziert werden, dann gibt es a priori keinen Grund anzunehmen, daß diese gleich sind. Somit liegen weder intrasektoral noch intersektoral uniforme Eigenzinssätze vor. Trotzdem kann man in diesem Fall von einem Gleichgewicht sprechen, denn die Produzenten erfüllen die inter-

temporale Gewinnmaximierungsbedingung und der Nutzen des pro Kopf-Konsums wird unter Einhaltung der Budgetbeschränkung maximiert. Um diese Bedingungen zu erfüllen, benötigt man freilich keine Eigenzinssätze, da das Kalkül in diskontierten Preisen durchgeführt wird. Rekurriert man auf diskontierte Preise, dann sind die Informationen der Eigenzinssätze redundant, d. h. Eigenzinssätze liefern keine Signale, die von Wirtschaftssubjekten berücksichtigt werden müßten. Geht man vom System diskontierter Preise zum System laufender Preise über, dann wird der Eigenzinssatz des Numeraires zum relevanten Zinssatz der betrachteten Ökonomie. Das Phänomen multipler Eigenzinssätze hat sich somit als Normierungsproblem entpuppt und nicht etwa als ein Problem des Gleichgewichtsbegriffs. Mit der Normierung auf laufende Preise gibt es in einer gegebenen Periode für alle Sektoren nur einen relevanten Zinssatz, und die Frage ist, ob ein Periodengleichgewicht erfordert, daß für die gegebene Periode in allen Sektoren eine einheitliche Profitrate herrschen muß. Davon unabhängig ist die Frage, ob dieser Zinssatz auch über die Zeit, d. h. von Periode zu Periode gleich sein muß, wenn ein langperiodiges Gleichgewicht herrschen soll.

Aus der Perspektive der intertemporalen Allgemeinen Gleichgewichtstheorie erscheint die Charakterisierung eines Gleichgewichts durch uniforme Eigenzinssätze als extremer Spezialfall. Bei uniformen Eigenzinssätzen ist die Struktur der relativen Preise über die Zeit konstant, d. h. die Ökonomie befindet sich in einem stationären bzw. semistationären Zustand. Dieser allokativtheoretische Spezialfall wird in der Wachstumstheorie zum Referenzfall. Man denke hierbei in erster Linie an die Turnpike Theorie. Der von Neumann-Pfad wird zur Referenz eines intertemporalen Pfads, ganz analog zum statischen langfristigen Gleichgewicht, das den Referenzfall für das kurzperiodige Gleichgewicht darstellt.

Bevor wir jedoch zur Turnpike Theorie kommen, müssen wir uns zunächst mit dem von Neumann Modell beschäftigen.

## IV. Gleichschrittiges Wachstum und Turnpike Theorie

### 1. Das von Neumann-Modell

Die Literatur zum von Neumann-Modell ist inzwischen recht umfangreich.<sup>1</sup> Eine vollständige Analyse der zu diesem Bereich zählenden Fragestellungen kann und soll hier nicht erfolgen. Für uns ist das von Neumann Modell von Interesse, weil es die Grundlage und den Ausgangspunkt der Turnpike-Theorie darstellt.

In Anlehnung an Morishima<sup>2</sup> lassen sich neben der ursprünglichen Formulierung des Modells durch von Neumann noch drei Varianten des Modells unterscheiden.

a) Die v. Neumann-Leontief-Variante: Für den Fall der Einzelproduktion wird ein Spektrum linearer Technologien zugelassen (Book of Blueprint-Annahme).

b) Die v. Neumann-Marx-Variante: Arbeit wird als Primärinput begriffen. Die Arbeit wird vorgeschossen (variables Kapital) und somit verzinst.

Dagegen wird in der

c) v. Neumann-Walras-Variante die Arbeit als Primärinput nicht vorgeschossen, sondern post-factum entlohnt und damit auch nicht verzinst.

Das ursprüngliche v. Neumann-Modell lässt sich durch die folgenden Charakteristika beschreiben:

(C1) Die Produktionstechnologie wird durch eine endliche Zahl von Produktionsaktivitäten beschrieben, die durch den Index  $i, j = 1, \dots, m$ , gekennzeichnet werden. Auf dem Einheitsniveau erfordert die  $i$ -te Aktivität Inputs  $a_{ij}, j = 1, \dots, n$ , von  $n$  Gütern um Outputs  $b_{ij}, j = 1, \dots, n$ , zu produzieren.

(C2) Die Technologie ist linear homogen und konvex mit Vertex 0, d. h. es herrschen konstante Skalenerträge.

(C3) Der Output am Ende der Periode  $t$  bildet den Input am Anfang der Periode  $t + 1$ .

(C4) Arbeit ist kein Primärinput, sondern wird im System durch Konsumgüter „produziert“. Das impliziert, daß der Wert des Konsumgüteroutputs gleich der Lohnsumme ist.

---

<sup>1</sup> Vgl. G. Bruckmann und W. Weber (Hrsg.); Contributions to the von Neumann Growth Model, Zeitschrift für Nationalökonomie, Supplementum 1, Wien / New York, 1971.

<sup>2</sup> M. Morishima; Equilibrium, Stability and Growth, Oxford 1964, S. 131 ff.

(C5) Der gesamte Surplus wird investiert, d. h. daß der Wert des Surplus gleich dem gesamten Gewinneinkommen ist und die Sparneigung aus Gewinneinkommen gleich Eins ist.

(C6) Alle Produktionsprozesse (Aktivitäten) haben eine einheitliche Periodenlänge, und längere Prozesse werden in ein Vielfaches der Einheitsperiode unterteilt.

Die Technologie des von Neumann-Modells lässt sich somit wie folgt darstellen:

Die  $m \times n$ -dimensionalen Matrizen  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  und  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  stellen die Input- bzw. Outputseite des Modells dar. Die letzte Spalte der Matrix  $\mathbf{A}$  enthält die Koeffizienten der direkten Arbeitsinputs und in der letzten Zeile stehen die „Konsumgüter“ mit deren Hilfe die Arbeit „reproduziert“ wird. Weiterhin gibt es einen  $(1 \times m)$  Zeilenvektor des Aktivitätsniveaus zum Zeitpunkt  $t$ ,  $\mathbf{q}_t$ .

Gemäß (C4) gilt somit:

$$(IV.1) \quad \mathbf{q}_{t+1}\mathbf{A} \leqq \mathbf{q}_t\mathbf{B},$$

d. h. der Input kann den Output der Vorperiode nicht überschreiten.

Das Preissystem des v. Neumann-Modells lautet

$$(IV.2) \quad R_t \mathbf{A} \mathbf{p}_t \geqq \mathbf{B} \mathbf{p}_{t+1},$$

wobei  $\mathbf{p}_t$  ein Spaltenvektor im Zeitpunkt  $t$  und  $R_t$  der Profitfaktor in Periode  $t$  ist. Definitorisch gilt

$$R_t = (1 + r_t),$$

wobei  $r_t$  die Profitrate im Zeitpunkt  $t$  bezeichnet.

Die Gleichung (IV.2) besagt, daß bei gegebenen Preisen und einer gegebenen Profitrate in einigen Prozessen Surplusgewinne realisiert werden können. Unter der Voraussetzung vollkommener Konkurrenz würde das jedoch zu Zuwanderung von Produzenten führen, so daß es zu einem Anstieg der Produktionsmittelpreise kommt. Gibt es hingegen Prozesse, die es bei den gegebenen Preisen in Periode  $t$  nicht gestatten, die Profitrate  $r_t$  zu zahlen, so werden diese Prozesse nicht aktiviert, d. h. es gilt die Gleichung

$$(IV.3) \quad R_t \mathbf{q}_t \mathbf{A} \mathbf{p}_t = \mathbf{q}_t \mathbf{B} \mathbf{p}_{t+1}.$$

Im Gleichgewicht gilt, daß Güter, deren Zufuhr bei Gleichgewichtspreisen die Nachfrage übersteigen, den Preis null erhalten, d. h. es gilt die Gleichung

$$(IV.4) \quad \mathbf{q}_{t+1} \mathbf{A} \mathbf{p}_{t+1} = \mathbf{q}_t \mathbf{B} \mathbf{p}_{t+1}.$$

Im Sinne von Neumanns herrscht ein Gleichgewicht, wenn

$$(IV.5') \quad \mathbf{p}_t = \mathbf{p}_{t+1}, \quad \forall t,$$

ist, d. h. wenn die relativen Preise über die Zeit hinweg konstant sind,

$$(IV.5'') \quad R_t = (1 + r_t) = R = (1 + r), \quad \forall t,$$

wenn in allen Sektoren und über alle Perioden die Profitrate uniform ist und

$$(IV.5''') \quad \mathbf{q}_{t+1} = G\mathbf{q}_t = (1 + g)\mathbf{q}_t, \quad \forall t,$$

wenn das Aktivitätsniveau mit einer konstanten Wachstumsrate  $g$ , d. h. gleichschrittig wächst. Wenn man (IV.5') – (IV.5''') in (IV.1) – (IV.4) berücksichtigt, ergibt sich

$$(IV.1') \quad G\mathbf{q}\mathbf{A} \leqq \mathbf{q}\mathbf{B},$$

$$(IV.2') \quad R\mathbf{A}\mathbf{p} \geqq \mathbf{B}\mathbf{p},$$

$$(IV.3') \quad R\mathbf{q}\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{q}\mathbf{B}\mathbf{p},$$

$$(IV.4') \quad G\mathbf{q}\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{q}\mathbf{B}\mathbf{p}.$$

Als nächstes gilt es zu untersuchen, ob das durch die Gleichungssysteme (IV.1') – (IV.4') beschriebene Modell sinnvolle ökonomische Lösungen hat, d. h. es muß untersucht werden, ob es für den Preis- bzw. Aktivitätsvektor semipositive Lösungen

$$\mathbf{q} \geqq \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{p} \geqq \mathbf{0},$$

und für den Wachstums- bzw. Profitfaktor Lösungen

$$R \geqq 0,$$

$$G \geqq 0.$$

gibt. Von Neumann machte hierzu folgende Annahmen:

$$(A1) \quad \mathbf{A} \geqq \mathbf{0}, \mathbf{B} \geqq \mathbf{0}$$

und

$$(A2) \quad \mathbf{B} + \mathbf{A} > \mathbf{0}.$$

(A2) besagt, daß jedes Gut entweder als Input oder als Output in jedem Prozeß vorhanden sein muß. Da diese Bedingung völlig unplausibel ist und darüber hinaus

6\*

DOI <https://doi.org/10.3790/978-3-428-49736-2>

Generated for Hochschule für angewandtes Management GmbH at 88.198.162.162 on 2025-12-20 04:33:11

FOR PRIVATE USE ONLY | AUSSCHLIESSLICH ZUM PRIVATEN GEBRAUCH

auch in dem ökonomisch nicht ganz sinnvollen Fall der Gütervernichtung gilt, d. h.  $\mathbf{A} > \mathbf{0}, \mathbf{B} = \mathbf{0}$ , wurde (A2) von Kemeny, Morgenstern und Thompson<sup>3</sup> durch zwei andere Annahmen ersetzt, die auch den Fall der reinen Gütervernichtung ausschließen.

(A 2a) Für eine Aktivität  $j$  gibt es mindestens ein Gut  $i$ , so daß  $a_{ij} > 0$ .

(A 2b) Für ein Gut  $i$  gibt es mindestens eine Aktivität  $j$ , so daß  $b_{ij} > 0$ .

Annahme (A 2a) bedeutet, daß jeder Prozeß (Aktivität) mindestens ein Gut als Input verwendet und Annahme (A 2b) beinhaltet, daß jedes Gut durch mindestens einen Prozeß (Aktivität) hergestellt werden kann.

Unter diesen getroffenen Voraussetzungen läßt sich die Existenz einer Gleichgewichtslösung für das folgende „reduzierte“ v. Neumann-Modell beweisen

$$(IV.5) \quad G\mathbf{q}\mathbf{A} \leqq \mathbf{q}\mathbf{B},$$

$$(IV.6) \quad R\mathbf{A}\mathbf{p} \geqq \mathbf{B}\mathbf{p},$$

$$(IV.7) \quad \mathbf{q}\mathbf{B}\mathbf{p} > \mathbf{0},$$

wobei (IV.7) aus (A 2a, b) folgt und besagt, daß der Wert des Outputs positiv sein muß. Dabei werden wir zunächst der nichtspieltheoretischen Beweistechnik von Gale folgen.<sup>4</sup>

*Vorüberlegung:*

Angenommen, es gibt eine Zahl  $G > 0$ , so daß für den Aktivitätsvektor  $\mathbf{q}$  gilt

$$G\mathbf{q}\mathbf{A} \leqq \mathbf{q}\mathbf{B},$$

d. h. das System wächst mindestens mit dem Wachstumsfaktor  $G$ . Aus (A 2a) und (A 2b) folgt:

- (a) Jede Zeile von  $\mathbf{A}$  ist semipositiv.
- (b) Jede Spalte von  $\mathbf{B}$  ist semipositiv.

Es soll gelten

- (c) wenn  $\mathbf{q} \geqq \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{q}\mathbf{A} \geqq \mathbf{0}$

bzw.

- (d) wenn  $\mathbf{q} \geqq \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{q}\mathbf{B} > \mathbf{0}$ .

---

<sup>3</sup> J. G. Kemeny, O. Morgenstern, G. L. Thompson; A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding Economy, *Econometrica* 1956, S. 115 – 135.

<sup>4</sup> Vgl. D. Gale; *The Theory of Linear Economic Models*, New York 1960 und O. Moecklin; Zur Theorie von Neumannscher Wachstumsmodelle, Berlin / Heidelberg 1974.

*Definition:*

$$Z(G) := \mathbf{q} \geq \mathbf{0} \mid G \mathbf{qA} \leqq \mathbf{qB}, \mathbf{qy} = 1 ,$$

wobei  $\mathbf{y} > \mathbf{0}$  ein  $(m \times 1)$  Vektor ist.

*Definition:*

$$G^* := \max G \mid Z(G) \neq \emptyset .$$

*Theorem:* (Moeschlin, S. 44)

Es existiert ein maximaler Wachstumsfaktor, für den gilt:

$$0 < G^* < +\infty .$$

*Beweis:* (siehe Moeschlin, S. 44):<sup>5</sup>

Der Beweis basiert einerseits auf der Annahme, daß  $Z(G^*)$  kompakt und eine echte Teilmenge von  $Z(G)$ ,  $G < G^*$  ist. Damit ist sichergestellt, daß  $G^* > 0$  ist. Andererseits führt die Annahme  $G^* < +\infty$  zum Widerspruch, weil die Ungleichung

$$G \mathbf{qA} \leqq \mathbf{qB} ,$$

für alle  $\mathbf{q} \in Z(G^*)$  und alle  $G > 0$  erfüllt ist. Daraus folgt aber

$$\mathbf{qA} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{q} \in Z(G^*) ,$$

so daß ein Widerspruch zu (c) vorliegt.

Damit ist bewiesen, daß der maximale Wachstumsfaktor kleiner als  $+\infty$  und positiv ist.

Für das durch die Technologie  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  beschriebene von Neumann-Modell wird ein Aktivitätsvektor  $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$  und eine Zahl  $G$  gesucht, so daß

$$\max G!$$

s.t.

$$\mathbf{q} G \mathbf{A} \leqq \mathbf{qB} .$$

Existiert dieser maximale Wert für  $G$ , dann ist dieser Wert der technologische Wachstumsfaktor und wir bezeichnen ihn mit  $G^*$ . Der dazugehörige Vektor  $\mathbf{q}$  ist der optimale Aktivitätsvektor  $\mathbf{q}^*$ .

Das duale Problem hierzu besteht darin, für das durch die Technologie  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  beschriebene von Neumann-Modell einen Preisvektor  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ , und eine Zahl  $R$  zu suchen, so daß

---

<sup>5</sup> O. Moeschlin; Zur Theorie von Neumannscher Wachstumsmodelle, Berlin, 1974, S. 44.

min  $R!$

s.t.

$$R \mathbf{A} \mathbf{p} \geqq \mathbf{B} \mathbf{p} .$$

Der minimale Wert von  $R$  wird als minimaler Profitfaktor  $R^*$  bezeichnet und den entsprechenden Preisvektor – den optimalen Preisvektor – bezeichnen wir mit  $\mathbf{p}^*$ .

Obwohl die Formulierung des Problems an die Methode der linearen Programmierung erinnert, kann sie hier keine Anwendung finden, weil die Nebenbedingungen nichtlineare Polynome sind. Da man sich nicht auf den Dualitätssatz der linearen Programmierung stützen kann, muß ein von Preisvektoren unabhängiges Kriterium herangezogen werden, welches sichert, daß eine Gleichgewichtslösung für  $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$  und  $G = G^*$  und  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^*$  existiert.

Hierzu benötigt man einen Hilfssatz.

*Hilfssatz 1:*

(nichtnegative Lösungen von linearen Ungleichungen, Gale, S. 47)<sup>6</sup>

$\mathbf{M}$  sei eine  $(m \times n)$ -Matrix und  $\mathbf{x}$  ein  $(1 \times n)$ -Vektor. Genau *eines* der beiden Ungleichungssysteme ist lösbar. Entweder

$$\mathbf{q} \mathbf{M} \geqq \mathbf{x}, \quad \mathbf{q} \geqq \mathbf{0}$$

oder

$$\mathbf{M} \mathbf{p} \leqq \mathbf{0}, \mathbf{x} \mathbf{p} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{p} \geqq \mathbf{0} .$$

*Beweis:* (siehe Gale, S. 47 – 8, Theorem 2.8.)

Gesucht wird eine Gleichgewichtslösung  $(\mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*, G^*)$  für die Ungleichung

$$\mathbf{q} \mathbf{B} \geqq G \mathbf{q} \mathbf{A}$$

bzw.

$$\mathbf{q} (\mathbf{B} - G \mathbf{A}) \geqq \mathbf{0} .$$

*Theorem Gale-Los:* (Moeschlin; S. 48 – 49)

Es existiert genau dann eine Gleichgewichtslösung  $(\mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*, G^*)$ , wenn die Ungleichung

$$\mathbf{q} \mathbf{B} \leqq \mathbf{q} (\mathbf{B} - G \mathbf{A}), \quad \mathbf{q} \leqq \mathbf{0}$$

keine Lösung hat.

---

<sup>6</sup> Vgl. D. Gale, The Theory of Linear Economic Models, a. a. O.

*Beweis:*

Durch Rückgriff auf Hilfssatz 1:

Ersetze  $\mathbf{M}$  durch  $(\mathbf{B} - G\mathbf{A})$  und  $\mathbf{x}$  durch  $\mathbf{qB}$ .

Entweder a)  $\mathbf{qB} \leqq \mathbf{q}(\mathbf{B} - G\mathbf{A}), \mathbf{q} \geqq \mathbf{0}$

oder b)  $\mathbf{0} \geqq (\mathbf{B} - G\mathbf{A})\mathbf{p}, \mathbf{qBp} > 0, \mathbf{p} \geqq \mathbf{0}$

ist lösbar. Ist Term a) erfüllt, dann sind (IV.6) und (IV.7) nicht zu erfüllen und umgekehrt. Angenommen  $\mathbf{q}$  sei eine Lösung, die Term a) erfüllt. Dann muß

$$\mathbf{0} \geqq -\bar{\mathbf{q}}G\mathbf{A},$$

gelten.

Für  $\mathbf{q} \geqq \mathbf{0}$  muß  $G \leqq 0$  sein. Dann ist  $G$  jedoch nicht der maximale Wachstumsfaktor. Für  $G$  ist

$$\mathbf{qB} > G\mathbf{qA}$$

erfüllt. Für  $G = G + \varepsilon, \varepsilon > 0$  ist

$$\mathbf{qB} \geqq \bar{G}\mathbf{qA}$$

ebenfalls erfüllt. Da  $\bar{G} > G$ , ist  $G$  nicht maximal. Weiterhin ist für  $G \leqq 0$  die Ungleichung

$$(IV.8) \quad \mathbf{Bp} \geqq G\mathbf{Ap}$$

für  $\mathbf{p} > \mathbf{0}$  nicht erfüllt. Für den Fall, daß  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  ist, kann Bedingung

$$(IV.7) \quad \mathbf{qBp} > 0$$

nicht erfüllt werden. Bedingung (IV.7) ist ebenfalls für  $G = 0$  nicht erfüllt, weil dann aus (IV.8)  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  folgt. Somit ist bewiesen, daß eine Gleichgewichtslösung  $(\mathbf{q}^*, G^*, \mathbf{p}^*)$  für das durch die Ungleichungen (IV.5), (IV.6), (IV.7) beschriebene von Neumann-Modell existiert.

Es muß allerdings angemerkt werden, daß mit diesem Ansatz und unter den getroffenen Annahmen noch nicht bewiesen wurde, daß  $G = R$  ist. Der von Gale durchgeführte Beweis zeigt lediglich, daß  $G \geqq R$  gilt. Das ist leicht zu sehen, denn die Gleichgewichtslösung  $(\mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*, G^*)$  erfüllt die Ungleichung (IV.8)

$$G^*\mathbf{Ap}^* \geqq \mathbf{Bp}^*.$$

Andererseits muß auch für die Zahl  $R$  die Ungleichung

$$R \mathbf{A} \mathbf{p}^* \geqq \mathbf{B} \mathbf{p}^*$$

erfüllt sein. Ist  $R > G$ , z. B.  $R = G + \varepsilon, \varepsilon > 0$ , dann ist  $G$  nicht maximal.

Im letzten Schritt wird nun untersucht, unter welchen Voraussetzungen eine Gleichgewichtslösung für das Quadrupel  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, G, R)$  mit  $R = G$  existiert. Zunächst nehmen wir an, daß

$$R = G \equiv \alpha^*,$$

wobei  $\alpha^*$  den maximalen Expansionsfaktor darstellt.

*Theorem* (von Neumann) (Gale, S. 314–5)

Wenn das durch die Technologie  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  beschriebene Modell die Annahmen (A 1), (A 2a) und (A 2b) erfüllt, dann existiert ein semipositiver Aktivitätsvektor  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)$ , ein semipositiver Preisvektor  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  und eine Zahl  $\alpha$  derart, daß die folgenden Ungleichungen erfüllt sind.

$$(IV.9) \quad \alpha^* \mathbf{q}^* \mathbf{A} \leqq \mathbf{q}^* \mathbf{B},$$

$$(IV.10) \quad \text{wenn } \alpha^* \mathbf{q}^* \mathbf{a}_j < \mathbf{q}^* \mathbf{b}_j \rightarrow \mathbf{p}_j = \mathbf{0}.$$

$$(IV.11) \quad \alpha^* \mathbf{A} \mathbf{p}^* \geqq \mathbf{B} \mathbf{p}^*,$$

$$(IV.12) \quad \text{wenn } \alpha^* \mathbf{a}_i \mathbf{p}^* > \mathbf{b}_i \mathbf{p}^* \rightarrow \mathbf{q}_i = \mathbf{0}.$$

*Beweis:*

Ungleichung (IV.9) ist erfüllt, weil  $\alpha^*$  der maximale Expansionsfaktor ist und  $\mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*$  der optimale Aktivitäts- bzw. Preisvektor darstellt. Weiterhin folgt aus dem Theorem Gale-Los:

$$\alpha^* \mathbf{A} \mathbf{p}^* = G^* \mathbf{A} \mathbf{p}^* \geqq R \mathbf{A} \mathbf{p}^* \geqq \mathbf{B} \mathbf{p}^*,$$

so daß (IV.11) ebenfalls erfüllt wird.

Aus (IV.9) und (IV.11) ergibt sich

$$\alpha^* \mathbf{q}^* \mathbf{A} \mathbf{p}^* \leqq \mathbf{q}^* \mathbf{B} \mathbf{p}^* \leqq \alpha^* \mathbf{q}^* \mathbf{A} \mathbf{p}^*,$$

so daß

$$\sum_i \mathbf{q}_i (\mathbf{b}_i - \alpha^* \mathbf{a}_i) \mathbf{p}^* = 0 = \sum_j \mathbf{q}_j^* (\mathbf{b}_j - \alpha^* \mathbf{a}_j) \mathbf{p}_j.$$

Da  $\mathbf{q}^* (\mathbf{b}_j - \alpha^* \mathbf{a}_j)$  und  $(\mathbf{b}_i - \alpha^* \mathbf{a}_i) \mathbf{p}^*$  nichtnegativ sind, ist somit auch (IV.10) und (IV.11) erfüllt.

Dem Theorem Gale-Los zufolge gilt

$$R \leqq G^* .$$

Sind  $\mathbf{q}^*$  und  $\mathbf{p}^*$  optimal, dann sind die Ungleichungen

$$G^* \mathbf{q}^* \mathbf{A} \leqq \mathbf{q}^* \mathbf{B}$$

und

$$R \mathbf{A} \mathbf{p}^* \geqq \mathbf{B} \mathbf{p}^*$$

erfüllt, und es gilt

$$G^* \mathbf{q}^* \mathbf{A} \mathbf{p}^* \leqq \mathbf{q}^* \mathbf{B} \mathbf{p}^* \leqq R \mathbf{q}^* \mathbf{A} \mathbf{p}^* ,$$

d. h.  $G^* \leqq R$ .

Wenn sowohl

$$R \leqq G^*$$

als auch

$$R \geqq G^* ,$$

dann ist  $R = G^*$ .

Die Ungleichung

$$R \geqq G^*$$

gilt, wenn sich zeigen lässt, daß

$$\mathbf{q}^* \mathbf{A} \mathbf{p}^* > 0$$

ist. Das ist gesichert, wenn das System  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  unzerlegbar ist, d. h. wenn das System ein Basissystem im Sinne Sraffas darstellt. Wenn alle Waren, die direkt und indirekt zur Produktion benötigt werden, auch produziert werden, d. h. bei den optimalen Aktivitätsniveau  $\mathbf{q}^*$  in positiven Mengen im Output vorhanden sind, dann gilt

$$\mathbf{q}^* \mathbf{b}_j > 0, \quad \forall_j ,$$

bzw.  $\mathbf{q}^* \mathbf{B} > \mathbf{0}$ .

Da der optimale Preisvektor semipositiv ist,  $\mathbf{p}^* \geqq \mathbf{0}$ , gilt

$$\mathbf{q}^* \mathbf{B} \mathbf{p}^* > 0 .$$

Somit erhält man

$$R \mathbf{q}^* \mathbf{A} \mathbf{p}^* \geqq \mathbf{q}^* \mathbf{B} \mathbf{p}^* > 0 ,$$

so daß  $\mathbf{q}^* \mathbf{A} \mathbf{p}^* > 0$  bewiesen ist.

Aus neoricardianischer Sicht lassen sich wenigstens zwei konzeptionelle Unterschiede zwischen dem von Neumann-Modell und dem Ansatz Sraffas ausmachen. Zum einen legt die Formulierung der Zielfunktionen des von Neumann-Modells eine planungstheoretische Perspektive (im Sinne einer Effizienzorientierung) nahe, denn die Zielfunktionen „Maximiere die Wachstumsrate“ und „Minimiere die Zinsrate / Profitrate“ kann wohl kaum den Wirtschaftssubjekten unterstellt werden; zumindest passen sie nicht zu der Vorstellung, ökonomische Handlungen der Wirtschaftssubjekte seien am Eigeninteresse ausgerichtet.

Zum zweiten muß angemerkt werden, daß die Dualität von Wachstums- und Profitrate der neoricardianischen Perspektive zuwiderläuft. Während im von Neumann-Modell die Existenz einer positiven und uniformen Profitrate an die Existenz einer positiven und uniformen Wachstumsrate gebunden ist, wird in der durch Sraffa wiederbelebten klassischen Theorie die Existenz einer positiven Profitrate unabhängig von der Existenz einer Wachstumsrate begründet. So wird im neoricardianischen Denken die potentielle Existenz einer Profitrate mit der Fähigkeit des Systems, einen Surplus zu produzieren, begründet. Wie dieser Surplus verwendet wird, d. h. in welchen Proportionen er konsumiert und investiert wird, ist eine ganz andere Frage und damit Gegenstand einer Theorie, die den Zusammenhang von Verteilung und Verwendung des Surplus (Nettosozialprodukts) thematisiert. Für das neoricardianische Denken ist es daher legitim, Preisbildung und Verwendung des Surplus getrennt voneinander zu analysieren. Damit bleibt die Analyse nicht nur auf Situationen, in denen  $R = G$  gilt, beschränkt. Für den Fall aber, in dem  $R > G$  gilt, treten die Unterschiede zwischen dem Ansatz von Neumanns und dem Sraffas noch deutlicher hervor.<sup>7</sup> Um Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den beiden Theorien aufzeigen zu können, folgen wir Schefold und reformulieren das von Neumann-Modell als ein lineares Programm. Dazu gehen wir von einer geschlossenen Formulierung des Mengen- bzw. Preissystems zu einer offenen über. Dem Vektor der Konsumgüter (genaugenommen: Lohngüter), der den Reallohn-güterkorb im Mengensystem darstellt, steht der Arbeitsinputvektor  $\ell$  im Preisystem gegenüber, so daß das von Neumann-Modell durch die zwei folgenden Ungleichungen beschrieben wird:

$$G\mathbf{q}\mathbf{A} + \mathbf{d} \leqq \mathbf{q}\mathbf{B} ,$$

$$R\mathbf{A}\mathbf{p} + \ell \leqq \mathbf{B}\mathbf{p} ,$$

wobei die Preise in Lohneinheiten ausgedrückt werden. Als lineares Programm formuliert lautet das von Neumann-Modell:

Primal:

Max  $\mathbf{d}\mathbf{p}!$

$$\text{Nb. : } (\mathbf{B} - R\mathbf{A})\mathbf{p} \leqq \ell, \quad \mathbf{p} \geqq \mathbf{0} .$$

---

<sup>7</sup> Vgl. B. Schefold; Von Neumann and Sraffa; Mathematical Equivalence and Conceptual Difference, Economic Journal, 1980, S. 140 – 156, hier insbesondere S. 149 f.

Dual:

Min  $qI$ !

$$\text{Nb. : } (\mathbf{B} - G\mathbf{A}) \geqq \mathbf{d}, \quad \mathbf{q} \geqq \mathbf{0}.$$

wobei  $R = G$ , die goldene Regel also, gelten soll. Man beachte, daß die Maximierung des pro Kopf-Konsums im Primal eine Minimierung des Reallohns bedeutet. Die Maximierung des pro Kopf-Konsums beinhaltet, daß im Dual alle optimalen Aktivitätsvektoren für die Prozesse Nullen aufweisen, die bei einem optimalen Preisvektor im Primal unprofitabel sind. Alle optimalen Preisvektoren haben für die Güter Nullen, die bei der optimalen Lösung im Dual überproduziert werden. Bis auf einige Sonderfälle läßt sich zeigen<sup>8</sup>, daß die optimale Lösung des linearen Programms zu einem „quadratischen“ System von Input-Output-Matrizen führt, in dem die Anzahl der aktivierten Prozesse der Zahl der produzierten (nicht überproduzierten) Güter entspricht. In diesem optimalen System werden genau die im Konsumgüterkorb  $\mathbf{d}$  enthaltenen Güter produziert, die im Primal positive Preise haben. Formal entspricht das „gefundene“ optimale System einem quadratischen Kuppelproduktionssystem á la Sraffa, in dem von einer gegebenen technologischen Struktur der Warenproduktion und einer gegebenen Verteilung ausgegangen wird. Außer der Frage, welche mit der technologischen Struktur kompatiblen positiven Preise sich ergeben, wenn die Verteilung variiert, eignet sich Sraffas Ansatz zur komparativ statischen Analyse des Technikwechsels. Eine neue Technik wird eine alte verdrängen, wenn bei den herrschenden Preisen die neue Technik bei gegebener Lohnrate eine höhere Profitrate bzw. bei gegebener Profitrate eine höhere Lohnrate zu zahlen gestattet. Diese Betrachtung scheint der von Neumannschen diametral gegenüberzustehen. Tatsächlich liegt jedoch kein wirklicher Widerspruch, sondern ein methodischer Unterschied vor. Während Sraffa, ausgehend von einem langperiodigen Reproduktionsgleichgewicht die ökonomische „Vorteilhaftigkeit“ eines Technikwechsels anhand von Verteilungskriterien beurteilt und damit komparativ-statistische Analyse betreibt, ist von Neumanns Methode darauf gerichtet, die Bedingungen eines stabilen Reproduktionsgleichgewichts zu formulieren. Der Widerspruch zwischen Reallohnmaximierung im Sinne Sraffas und Reallohnminimierung im Sinne von Neumanns läßt sich auflösen: Die Systeme mit dem niedrigsten Reallohn erweisen sich als suboptimal, weil der dazugehörige Preisvektor im Primal Überschußgewinne erzeugt.

„It is clear that, from the point of view of a comparison of systems coming up one by one in a process of technical progress, ( . . . ), only those systems which are capable of producing the required basket of consumption goods and of sustaining the given rate of

<sup>8</sup> B. Schefold; On Counting Equations, Zeitschrift für Nationalökonomie, Vol. 38, 1978, S. 253 – 285. Es soll keineswegs der Eindruck erweckt werden, das von Neumann-Modell sei unklassisch. Noch ferner läge es, dieses Modell als ein neoklassisches allgemeines Gleichgewichtsmodell zu begreifen. Ein Blick auf die Axiome des Modells genügt, um das auszuschließen. Vgl. auch H. D. Kurz und N. Salvadori; Von Neumann's Growth Model and the 'Classical' Tradition, in: The European Journal for the History of Economic Thought, Vol. 1, 1993, S. 129 – 160.

growth are worth comparing, so that it is clearly the rule of *maximising* the real wage which is relevant in this context"<sup>9</sup>

Das ist die komparativ-statistische Perspektive. Ist die Gleichgewichtslage erreicht,

„(...) no matter how it is attained, profits and wages are lowered to normal rates through competition.“<sup>10</sup>

Das Primal kann weder als Zielfunktion von Wirtschaftssubjekten, noch als Konkurrenzprozeß interpretiert werden,

„(...) but gives the economic reason for the stability of the result of this process.“<sup>11</sup>

Wir wollen die Untersuchung der konzeptionellen Unterschiede zwischen dem Ansatz von Neumanns und dem Sraffas hier nicht weiter vertiefen, sondern auch auf die Gemeinsamkeiten bzw. Ähnlichkeiten hinweisen.

Beiden Ansätzen sind gegebene Anfangsbestände völlig fremd. Sie betonen den Reproduktionsaspekt und die uniforme Profit/Realzinsrate als Charakteristika eines Gleichgewichts der langen Periode. Sowohl von Neumann als auch Sraffa beziehen zunächst keine nicht reproduzierbaren Güter bzw. Faktoren mit ein, und beide lassen explizit Kuppelproduktion zu. Sraffa zeigt dann in origineller Weise, daß sich fixes Kapital und Land als spezielle Kuppelproduktionsfälle auffassen lassen. Die im von Neumann-Modell vorgenommene Koppelung von Wachstumsrate und Profitrate basiert auf einer zusätzlichen Annahme, nämlich der, daß alle Gewinne reinvestiert und die Löhne vollständig konsumiert werden. Werden die Gewinne, aus welchen Gründen auch immer, gar nicht oder nur teilweise re-investiert und die gesamten Löhne wie bisher konsumiert, dann ist eine positive und uniforme Profitrate  $r$  auch mit einer uniformen Wachstumsrate  $g$ ,  $0 \leq g \leq r$  verträglich. Wachstumsrate und Profitrate sind nicht notwendig aneinander gekoppelt, sondern hängen ihrerseits von einem gemeinsamen „Dritten“ ab, nämlich von der Fähigkeit des Input-Output-Systems, einen physischen Überschuß zu produzieren. Sowohl das Sraffa-System als auch die optimale Lösung des von Neumann-Systems stellen ein langperiodiges Konkurrenzgleichgewicht dar, das im Rahmen der Turnpike-Theorie eine herausragende Stellung einnimmt.

## 2. Die Turnpike-Eigenschaft des von Neumann-Pfads

Mit einer Vermutung und einem nicht geglückten Beweis zur Turnpike-Eigenschaft des von Neumann-Wachstumspfads bei Dorfman, Samuelson und Solow<sup>12</sup>

<sup>9</sup> B. Schefold; Von Neumann and Sraffa, a. a. O., S. 145.

<sup>10</sup> Ebenda, S. 145.

<sup>11</sup> Ebenda, S. 146.

<sup>12</sup> R. Dorfman; P. A. Samuelson, R. M. Solow; *Linear Programming and Economic Analysis*, New York / Toronto / London, 1958, S. 309 – 345.

(Dosso) beginnt die Entwicklung der Turnpike-Theorie. Für die in dieser Arbeit behandelte Fragestellung ist es nicht notwendig, auf die verschiedenen Turnpike-Theoreme gesondert einzugehen.<sup>13</sup> Von weitaus größerem Interesse sind die verschiedenen Beweisverfahren, mit deren Hilfe die Konvergenz eines bei beliebigen Anfangsausstattungen beginnenden Pfads zum von Neumann-Pfad nachgewiesen werden. Dabei geht es freilich nicht um die mathematischen Aspekte der Beweisverfahren, sondern vielmehr um die ökonomischen und im engeren Sinn um die gleichgewichtstheoretischen Implikationen der Beweisverfahren.

Es lassen sich im Prinzip drei analytische Beweistechniken unterscheiden:<sup>14</sup>

- Verfahren, die auf die Mengenlehre zurückgreifen. Sie wurden von Radner erstmals angewandt.
- Verfahren der linearen Programmierung und Methoden der Stabilitätsanalyse. Diese Verfahren wurden von Morishima eingesetzt.
- Verfahren der Variationsrechnung, die von Dosso angewandt wurden.

In dieser Arbeit wird dem Ansatz Morishimas gefolgt,<sup>15</sup> nicht nur weil damit in methodischer Hinsicht eine gewisse Einheitlichkeit gewahrt wird, sondern auch, weil dieser Ansatz nicht, wie der von Dosso, an die Voraussetzung differenzierbarer Produktionsfunktionen gebunden ist.

Zur Darstellung des Morishima-Turnpike-Ansatzes weichen wir in zwei Punkten vom bereits dargestellten von Neumann-Modell ab. So wird einerseits Kuppelproduktion ausgeschlossen, und auf der Inputseite wird von einem endlichen Spektrum linearer Techniken (book of blueprints) ausgegangen.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(l) & a_{12}(l) & \dots & a_{1n}(l) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11}(m_1) & a_{12}(m_1) & \dots & a_{1n}(m_1) \\ a_{21}(l) & a_{22}(l) & \dots & a_{2n}(l) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{21}(m_2) & a_{22}(m_2) & \dots & a_{2n}(m_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(l) & a_{n2}(l) & \dots & a_{nn}(l) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(m_n) & a_{n2}(m_n) & \dots & a_{nn}(m_n) \end{bmatrix}$$

<sup>13</sup> Vgl. L. McKenzie; Turnpike Theory, *Econometrica*, vol. 44, 5, 1976, S. 841 – 865.

<sup>14</sup> Vgl. E. Burmeister, R. Dobell; *Mathematical Theories of Economic Growth*, London / New York, 1970, S. 318 f.

<sup>15</sup> M. Morishima; Proof of A Turnpike Theorem: The No Joint Production Case, *Review of Economic Studies*, vol. 28, 1961, S. 89 – 98 und M. Morishima; Equilibrium, Stability and Growth, Oxford, 1964, S. 154 – 171.

Die Inputmatrix  $\mathbf{A}$  ist eine  $m \times n$ -Matrix. Der Sektor  $i$  kann zur Produktion einer Einheit von Gut  $j$   $m_i$  verschiedene Prozesse (Techniken) einsetzen, wobei

$$m = \sum_{i=1}^n m_i .$$

Da Kuppelproduktion ausgeschlossen ist, kann die Outputmatrix wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Jeder Sektor kann somit unter  $m$ -verschiedenen Produktionstechniken wählen, so daß die gesamte Ökonomie unter  $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$  verschiedenen Produktions-techniken wählen kann. Diese lassen sich in einer bestimmten Weise anordnen, die wir mit  $\alpha, \beta, \dots, \mu$  bezeichnen. Wenn ein Sektor  $i$  die  $s_i$ -te Produktionstechnik ( $i = 1, \dots, n$ ) wählt, dann gehört diese zu der Menge der Technologien  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  und

$$\mathbf{A}_\sigma = \begin{bmatrix} a_{s(1)} \\ \vdots \\ a_{s(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{s(n)} \end{bmatrix}, \quad \sigma = \alpha, \beta, \dots, \mu,$$

bildet die von allen Sektoren gewählte ( $n \times n$ ) Matrix der Inputkoeffizienten.  $\mathbf{A}_\sigma$  ist nichtnegativ und besitzt eine charakteristische Wurzel  $\lambda_\sigma$ , die ebenfalls nichtnegativ und dem absoluten Betrage nach nicht kleiner als eine der anderen Wurzeln ist. Weiterhin existiere eine Technologie

$$\mathbf{A}_\epsilon = \begin{bmatrix} a_{1\epsilon} \\ \vdots \\ a_{2\epsilon} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n\epsilon} \end{bmatrix}$$

für die gilt

$$\lambda_\varepsilon \leq \lambda_\sigma, \quad \sigma = \alpha, \beta, \dots, \mu.$$

Die zu  $\lambda_\varepsilon$  gehörenden rechts- bzw. linksseitigen Eigenvektoren sind  $\mathbf{p}_\varepsilon$  bzw.  $\mathbf{x}_\varepsilon$ . Der Zeilenvektor  $\mathbf{x}_\varepsilon$  besteht aus den Elementen  $x_{\varepsilon i}, i = 1, \dots, n$ .  $\mathbf{q}_\varepsilon$  ist ein  $m$ -dimensionaler Zeilenvektor, dessen  $s_i$ -tes Element  $x_{\varepsilon i}$  ist, wenn  $s_i = \varepsilon_i$  und für  $s_i \neq \varepsilon_i$  Nullen enthält.

Morishima führt zwei Annahmen ein:

A1:  $\mathbf{A}_\varepsilon$  ist unzerlegbar.

A2:  $\mathbf{A}_\varepsilon$  ist eindeutig, d. h. es gibt kein  $\mathbf{A}_\theta$  derart, daß  $\lambda_\varepsilon = \lambda_\theta$ <sup>16</sup>

Er zeigt, daß unter diesen getroffenen Voraussetzungen das Tripel  $(\lambda_\varepsilon, \mathbf{q}_\varepsilon, \mathbf{p}_\varepsilon)$  eine eindeutige Lösung des von Neumann-Modells ist, so daß  $\lambda_\varepsilon^{-1} \equiv G_\varepsilon$  den maximalen gleichschrittigen Wachstumsfaktor,  $\mathbf{q}_\varepsilon$  den Outputvektor und  $\mathbf{p}_\varepsilon$  den Preisvektor des von Neumann-Modells bezeichnen.<sup>17</sup> Damit ist sichergestellt, daß für die durch die Technologiemenge beschriebene Ökonomie ein von Neumann-Pfad existiert. Darauf aufbauend wird das Turnpike-Theorem mit Hilfe eines linearen Programms formuliert. Grob vereinfacht läßt sich die Problemstellung wie folgt beschreiben. Die betrachtete Ökonomie hat gegebene Anfangsbestände  $\mathbf{b}_0$ , die nicht bereits in den geeigneten von Neumann-Proportionen vorliegen und will mittels der zur Verfügung stehenden Technologien nach einer bestimmten Zahl von Perioden einen bestimmten proportionierten Output  $\mathbf{b}^*$  erreichen. Welchen Akkumulationspfad wird diese Ökonomie einschlagen? Eine erste Forderung ist, daß der Pfad intertemporal effizient sein sollte. Aus der Menge aller intertemporal effizienten Pfade ist jedoch nur die Menge der Pfade zulässig, die in ihren Anfangsausstattungen übereinstimmen, d. h. nur diese Untermenge kann die Grundlage des Vergleichs alternativer Pfade sein.

Für eine gegebene Anfangsausstattung  $\mathbf{b}_0$ , wobei  $\mathbf{b}_0$  einen  $m$ -dimensionalen Zeilenvektor der Anfangsbestände darstellt, gibt es eine Folge von Aktivitätsvektoren  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_T$ , wobei  $\mathbf{q}_t, t = 1, \dots, T$  einen  $n$ -dimensionalen Zeilenvektor darstellt. Eine solche Folge von Aktivitätsvektoren  $\{\mathbf{q}_t\}_1^T$  ist durchführbar, wenn gilt:

$$\mathbf{q}_t \geqq \mathbf{0}, \quad t = 1, \dots, T$$

$$\mathbf{q}_1 \mathbf{A} \leqq \mathbf{b}_0,$$

$$\mathbf{q}_{t+1} \mathbf{A} \leqq \mathbf{q}_t \mathbf{B}, \quad t = 1, \dots, T-1.$$

Weiterhin soll der Pfad zum Zeitpunkt  $T$  einen Output mit einer bestimmten Zusammensetzung  $\mathbf{b}^*$  erreichen.  $\mathbf{b}^*$  ist ein  $m$ -dimensionaler Zeilenvektor, dessen Elemente sich zu eins addieren. Da dieser Vektor nur die Anteile der  $m$ -Güter am

<sup>16</sup> Diese Annahme ist notwendig, weil die Technologiemenge nicht streng konvex ist.

<sup>17</sup> Vgl. M. Morishima; Equilibrium ..., a. a. O., S. 159 – 161.

Gesamtoutput festlegt, muß außer der Struktur auch das Niveau des Outputs festgelegt werden. Dazu definiert man eine Zahl  $x$

$$x = \min_j \frac{Q_{jt}}{b_j^*}$$

wobei  $Q_{jt}$  die Menge des  $j$ -ten Guts im Endoutput, d. h. das  $j$ -te Element von  $\mathbf{q}_T \mathbf{B}$  ist und  $b_j^*$  das  $j$ -te Element von  $\mathbf{b}^*$  ist. Der Vektor  $\mathbf{b}^*$  ist nichtnegativ und nicht null, und  $x$  ist nichtnegativ. Für die letzte Periode des Pfads muß somit gelten:

$$x \mathbf{b}^* \leqq \mathbf{q}_T \mathbf{B} .$$

Pfade, die diese Bedingungen erfüllen, sind durchführbar. Ein durchführbarer Pfad ist effizient, wenn es keinen anderen durchführbaren Pfad

$$\{\bar{\mathbf{q}}_1, \bar{\mathbf{q}}_2, \dots, \bar{\mathbf{q}}_T\}$$

gibt, für den  $x > \bar{x}$  gilt.

Ein effizienter Pfad, der mit der Anfangsausstattung  $\mathbf{b}_0$  beginnt und in Periode  $T$  einen Output  $x \mathbf{b}^*$  ermöglicht, kann durch die Lösung des folgenden linearen Programms gefunden werden.

*Primal:*

$$\max ! x \lambda_\varepsilon^T$$

$$Nb. : \mathbf{q}_1 \mathbf{A} \leqq \mathbf{b}_0 ,$$

$$\mathbf{q}_{t+1} \mathbf{A} \leqq \mathbf{q}_t \mathbf{B} , \quad t = 1, \dots, T-1 ,$$

$$x \mathbf{b}^* \leqq \mathbf{q}_T \mathbf{B} .$$

*Dual:*

$$\min ! \mathbf{b}_0 \mathbf{p}_0 .$$

$$Nb. : \mathbf{A} \mathbf{p}_t \geqq \mathbf{B} \mathbf{p}_{t+1} , \quad t = 0, \dots, T-1 ,$$

$$\mathbf{b}^* \mathbf{p}_T \geqq \lambda_\varepsilon^T ,$$

wobei wir daran erinnern, daß  $\lambda_\varepsilon^{-1} = G_\varepsilon = R_\varepsilon$  ist.

Die optimale Lösung des linearen Programms liefert im Dual eine Folge von Preisvektoren, die dem effizienten Wachstum der Outputs im Primal korrespondieren. Um zum eigentlichen Turnpike-Theorem vorzudringen, bedarf es einiger Hilfssätze und zwei zusätzlicher Annahmen. Zunächst die Annahmen:

A.3:  $\mathbf{A}_\varepsilon$  ist primitiv.<sup>18</sup>

A.4: Für jedes Gut  $j$  gibt es mindestens einen Sektor  $i$ , für den Gut  $j$  unerlässlich ist.

---

<sup>18</sup> Vgl. hierzu Kapitel III, Fn. 33.

Mit dem ersten Hilfssatz eliminiert Morishima die Ungleichungen.<sup>19</sup> Da der Output in Periode  $T$  positiv ist, sichert (A 4), daß der Output in jeder Periode positiv ist. Jedes Gut wird somit mit Hilfe einer Technologie im entsprechenden Sektor produziert. Da die optimale Lösung des linearen Programms die Nebenbedingungen mit Gleichheit erfüllen, müssen in jeder Periode die Preise den Produktionskosten entsprechen. Somit gibt es in einem Sektor in jeder Periode aus der Menge der zur Verfügung stehenden Technologien eine, die keinen Surplusgewinn (zero-profit condition) erzielt.

Diese Überlegung wird von der sektoralen auf die gesamtwirtschaftliche Ebene übertragen. Es wird jetzt für alle Sektoren die Kombination der Technologien zugrunde gelegt, für die die Produktionskosten minimal sind.

*Hilfssatz 2:*

Es sei  $\mathbf{a}_i(l)$ , die  $l$ -te Aktivität in Sektor  $i$ ,  $l = 1, \dots, m$ , und es werden die Aktivitäten mit den minimalen Produktionskosten gewählt, d. h.

$$\mathbf{a}_i(l)\mathbf{p}_t = \min (\mathbf{a}_i(1)\mathbf{p}_t, \dots, \mathbf{a}_i(m)\mathbf{p}_t) .$$

Damit hängt die Wahl der Aktivitäten vom Preisvektor  $\mathbf{p}_t$  ab. Die so gewählten Techniken in Periode  $t$  bilden die Inputmatrix  $\mathbf{A}_t$ .

Der folgende durch eine Differenzengleichung beschriebene Pfad wird betrachtet:

$$(IV.13) \quad \mathbf{p}_{t+1} = \mathbf{A}_t \mathbf{p}_t \leq \mathbf{A}_\sigma \mathbf{p}_t, \quad \sigma = \alpha, \dots, \varepsilon, \dots, \mu .$$

Jede durch (IV.13) beschriebene Preisfolge, die mit einem beliebigen nichtnegativen Anfangswert  $\mathbf{p}_0 \neq \mathbf{0}$  beginnt, nähert sich schließlich der von Neumann-Preisfolge, d. h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p_t}{\lambda'_\varepsilon p_\varepsilon} = c, \quad c > 0 \text{ und konstant.}$$

In anderen Worten heißt das, daß jede Preisfolge, die die Bedingung der Kostenminimierung erfüllt (= zero profits), zur von Neumann-Preisfolge konvergiert.

Morishima übernimmt die von Solow und Samuelson angewandte Technik zum Beweis der globalen relativen asymptotischen Stabilität eines gleichschrittigen Wachstumspfads.<sup>20</sup> Er führt analog den Beweis für das Preissystem.

<sup>19</sup> M. Morishima; Equilibrium . . ., a. a. O., S. 163 – 164, insb. Lemma 2.

<sup>20</sup> R. M. Solow and P. A. Samuelson; Balanced Growth under Constant Returns to Scale, Econometrica, 1953, S. 412 – 424, wiederabgedruckt in: The Collected Scientific Papers of P. A. Samuelson, Bd. 1, M.I.T.-Press, 1966, S. 248 – 260, hier: S. 255 – 257.

Zunächst wird ein Spaltenvektor definiert

$$\mathbf{Z}_t \equiv (z_1(t), \dots, z_n(t)) \equiv \lambda_\varepsilon^{-t} \mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{p}_t$$

wobei  $\mathbf{P}_\varepsilon$  eine Diagonalmatrix mit den Elementen  $(P_{\varepsilon,1}, \dots, P_{\varepsilon,n})$  darstellt.

Aus (IV.13) folgt  $\mathbf{p}_{t+1} \leqq \mathbf{A} \mathbf{p}_t$ . Setzt man für  $\mathbf{p}_t$  die Definition von  $\mathbf{Z}_t$  in (IV.13) ein, so erhält man:

$$(IV.14) \quad \mathbf{Z}_{t+1} \leqq \lambda_\varepsilon^{-1} \mathbf{P}_\varepsilon^{-1} \mathbf{A}_\varepsilon P_\varepsilon \mathbf{Z}_t, \text{ weil } \lambda_\varepsilon^{-t} \mathbf{P}_\varepsilon^{-1} \geq \mathbf{0}.$$

Weiterhin wissen wir aus (A2), daß  $\lambda_\varepsilon < \lambda_\theta$ , wobei  $\mathbf{A}_\theta$  die Menge der Technologien darstellt, die  $\mathbf{A}_\varepsilon$  nicht enthält, so daß

$$\lambda_\varepsilon \mathbf{p}_\varepsilon < \mathbf{A}_\theta \mathbf{p}_\varepsilon$$

gilt. Damit gilt die folgende Ungleichung

$$(IV.15) \quad \mathbf{L} = \mathbf{A}_\varepsilon \mathbf{P}_\varepsilon \lambda_\varepsilon^{-1} \mathbf{P}_\varepsilon^{-1} \mathbf{L} \leqq \mathbf{A}_t \mathbf{P}_\varepsilon \lambda_\varepsilon^{-1} \mathbf{P}_\varepsilon^{-1} \mathbf{L},$$

wobei  $\mathbf{L} = (1, \dots, 1)'$  ist.

Im nächsten Schritt werden zwei Folgen  $c_t$  und  $C_t$  definiert. Es gelte

$$c_t = \min (z_1(t), \dots, z_n(t)),$$

und

$$C_t = \max (z_1(t), \dots, z_n(t)).$$

Es gilt die folgende Ungleichung

$$\mathbf{A}_\varepsilon \mathbf{P}_\varepsilon \lambda_\varepsilon^{-1} \mathbf{P}_\varepsilon^{-1} \mathbf{Z}_t \leqq \mathbf{A}_\varepsilon \mathbf{P}_\varepsilon \lambda_\varepsilon^{-1} \mathbf{P}_\varepsilon^{-1} \mathbf{L} C_t.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung entspricht (IV.14). Berücksichtigen wir auf der rechten Seite dieser Ungleichung die Gleichung (IV.15), dann gilt:

$$\mathbf{Z}_{t+1} \leqq C_t \mathbf{L}.$$

Daraus folgt

$$C_t \geqq C_{t+1}.$$

Analog folgt aus (IV.13) und (IV.15)

$$\mathbf{Z}_{t+1} = \mathbf{A}_t \mathbf{P}_\varepsilon \lambda_\varepsilon^{-1} \mathbf{P}_\varepsilon^{-1} \mathbf{Z}_t \geqq \mathbf{A}_t \mathbf{P}_\varepsilon \lambda_\varepsilon^{-1} \mathbf{P}_\varepsilon^{-1} \mathbf{L} c_t,$$

d. h.

$$\mathbf{Z}_{t+1} \geqq c_t \mathbf{L} ,$$

bzw.

$$\mathbf{Z}_t \geqq c_{t-1} \mathbf{L} .$$

Da  $\mathbf{Z}_t \geqq \mathbf{Z}_{t+1}$ , folgt somit  $c_t \geqq c_{t-1}$  bzw.  $c_{t+1} \geqq c_t$ .

Somit ist die Folge  $C_t$  niemals steigend und die Folge  $c_t$  niemals fallend. Da aus der Definition von  $C_t$  und  $c_t$  die Bedingung

$$C_t \geqq c_t ,$$

folgt, existieren für beide Folgen Grenzwerte:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_t = C ,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_t = c .$$

In einem weiteren Schritt wird bewiesen, daß  $C_t = c_t$ .<sup>21</sup> Dabei geht man davon aus, daß  $C_t > c_t$  gelten soll. Das führt zu einem Widerspruch mit dem Ergebnis, daß  $C_t$  niemals steigend ist. Somit gilt  $C_t = c_t$ . Das bedeutet, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_i(t) = c .$$

$$\text{Da } z_i(t) \equiv \frac{p_{it}}{\lambda_{\varepsilon}^t p_{\varepsilon i}}$$

ist somit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p_{it}}{\lambda_{\varepsilon}^t p_{\varepsilon i}} = c$$

bewiesen. Um auszuschließen, daß der Grenzwert der Folge  $\mathbf{Z}_t$  Null ist, muß noch  $c > 0$  bewiesen werden.

Das läßt sich leicht zeigen. Hierzu greifen wir auf (IV.13) zurück. Demzufolge gilt:

$$\lambda_{\varepsilon} \mathbf{P}_{\varepsilon} \mathbf{Z}_{t+1} = \mathbf{A}_t \mathbf{P}_{\varepsilon} \mathbf{Z}_t .$$

Durch Annahme (A2) ist sichergestellt, daß  $\mathbf{A}_{\varepsilon}$  einzig ist, so daß

$$\lambda_{\varepsilon} \mathbf{q}_{\varepsilon} = \mathbf{q}_{\varepsilon} \mathbf{A}_{\varepsilon} ,$$

wobei  $\lambda_{\varepsilon}$  der minimale Eigenwert, bzw.  $\lambda_{\varepsilon}^{-1}$  der maximale Wachstumsfaktor (= von Neumann-Wachstumsfaktor) darstellt. Somit gilt

---

<sup>21</sup> M. Morishima; Equilibrium . . ., a. a. O., S. 166.

$$\lambda_\varepsilon \mathbf{q}_\varepsilon \leqq \mathbf{q}_\varepsilon \mathbf{A}_\varepsilon ,$$

bzw.

$$\lambda_\varepsilon \mathbf{q}_\varepsilon \mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{Z}_{t+1} = \mathbf{q}_\varepsilon \mathbf{A}_t \mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{Z}_t \geqq \lambda_\varepsilon \mathbf{q}_\varepsilon \mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{Z}_t .$$

Da  $\lambda_\varepsilon \mathbf{q}_\varepsilon \mathbf{P}_\varepsilon > 0$  und  $\mathbf{Z}_0 \geqq \mathbf{0}$  und  $\mathbf{Z}_0 \neq \mathbf{0}$  gilt, kann  $\mathbf{Z}_t$  nicht gegen Null konvergieren, d. h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_i(t) = c > 0 .$$

Der Hilfssatz 2 zeigt somit, daß jeder Preispfad, der keinen Extragewinn zuläßt, zum Pfad langperiodiger Gleichgewichtspreise konvergiert.

Um eine Vorstellung über die Geschwindigkeit der Konvergenz zum von Neumann-Pfad zu erhalten, benötigt man einen „Referenzabstand“ zum von Neumann-Pfad. Hierzu definiert man einen Kegel  $N$  in Referenz zum von Neumann-Pfad. Hilfssatz 2 besagt, daß der Preispfad  $\mathbf{p}(t, \mathbf{p}_0)$ , der durch (IV.13) generiert wird und in  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0 \geqq \mathbf{0}$ , beginnt, ab einer Periode  $t, t \geqq t(\mathbf{p}_0)$ , innerhalb des Kegels  $N$  verbleibt, wobei  $t(\mathbf{p}_0)$  von  $N$  abhängt. Die kleinste dieser Zahl von Perioden sei  $t(\mathbf{p}_0)$ . Sie gibt für den Preispfad  $\mathbf{p}(t, \mathbf{p}_0)$  den Zeitraum an, den dieser benötigt, um in den Kegel  $N$  hineinzugelangen. Je kleiner  $t$ , desto größer ist die Geschwindigkeit der Konvergenz zum von Neumann-Pfad. Für gegebenes  $N$  variiert  $t$  mit den Anfangsbedingungen  $\mathbf{p}_0$ . Der nun folgende Hilfssatz hebt diese Einschränkung der Anfangsbedingungen auf.

*Hilfssatz 3:*

Für einen beliebig festgelegten Kegel  $N$  und einen beliebigen Punkt  $\mathbf{p}^* \neq \mathbf{0}$  gibt es eine Umgebung von  $\mathbf{p}^*$ , so daß für alle  $t$ , die nicht kleiner als  $t^*$  sind ( $t^*$  ist eine ganze Zahl (Periode), die von  $N$  und  $\mathbf{p}^*$  abhängt), gilt, daß der Pfad  $\mathbf{p}(t, \mathbf{p}_0)$ , der in der Umgebung von  $\mathbf{p}^*$  beginnt, im Kegel  $N$  bleibt. Für alle  $\mathbf{p}_0$  in der Umgebung von  $\mathbf{p}^*$  gilt:

$$t(\mathbf{p}_0) \leqq t^* .$$

*Beweis:* siehe Morishima<sup>22</sup>

Mit diesem Hilfssatz wird die Konvergenzeigenschaft eines Preispfads von den Ausgangsbedingungen weitgehend losgelöst. Während im vorherigen Hilfssatz die Periodenzahl  $t$ , d. h. die Periode ab der sich der „tatsächliche“ Preispfad im Kegel  $N$  befindet, von der gegebenen Anfangsbedingung  $\mathbf{p}_0$  abhängt, wird im Hilfssatz 3 gezeigt, daß jeder Preispfad, der in der Umgebung  $N$  eines Punktes  $\mathbf{p}^*$  beginnt, auch nach einer Zahl von Perioden  $t^*$  in der Umgebung  $N$  verbleibt. In diesem Sinn ist die Zahl der Perioden  $t^*$  unabhängig von den tatsächlichen Anfangsbedingungen, obwohl sie freilich vom Punkt  $\mathbf{p}^*$  abhängt. Morishima hat damit die Uniformität der Konvergenz sichergestellt.

<sup>22</sup> M. Morishima, Equilibrium, . . ., a. a. O., S. 167 ff.

Bevor man das eigentliche Turnpike-Theorem aufstellen kann, muß noch gewährleistet sein, daß die Preise in der Basisperiode ( $t = 0$ ) nicht gegen Unendlich streben, wenn die Horizontlänge  $T$  gegen unendlich geht, d. h. die Folge der Preise muß beschränkt sein.

Wenn  $\mathbf{p}_\varepsilon$  ein Eigenvektor von  $\mathbf{A}_\varepsilon$  ist, so daß  $\lambda_\varepsilon \mathbf{p}_\varepsilon = \mathbf{A}_\varepsilon \mathbf{p}_\varepsilon$  und außerdem  $\mathbf{b}^* \mathbf{p}_\varepsilon = 1$  gilt, dann ist

$$(IV.16) \quad \mathbf{p}_t = \lambda_\varepsilon^t \mathbf{p}_\varepsilon, \quad t = 0, 1, 2, \dots, T,$$

eine zulässige Lösung des Dual, so daß die Zielfunktion des Dual,  $\min \mathbf{x}_0 \mathbf{p}$ , erfüllt ist. Für  $t = 0$  ergibt (IV.16)

$$\mathbf{p}_0 = \lambda_\varepsilon^0 \mathbf{p}_\varepsilon = \mathbf{p}_\varepsilon$$

Somit bilden die von Neumann-Preise eine obere Beschränkung, so daß

$$\mathbf{x}_0 \mathbf{p}_0 \leqq \mathbf{x}_0 \mathbf{p}_\varepsilon,$$

und somit die Preise in der Basisperiode nicht gegen Unendlich wachsen können, wie groß auch immer  $T$  ist. Damit sind alle für die Aufstellung und den Beweis des Morishima Turnpike-Theorems wichtigen Sätze und Voraussetzungen genannt.

#### *Das Turnpike-Theorem:*

Ist der Zeitraum, beschrieben durch die Horizontlänge  $T$ , im Primal des linearen Programms hinreichend groß, dann wird der effiziente Pfad der Outputs beginnend bei  $\mathbf{b}_0$ , ( $\mathbf{b}_0 > \mathbf{0}$ ) und endend bei  $\mathbf{b}^*$ , ( $\mathbf{b}^* > \mathbf{0}$ ), die meiste Zeit des Zeitraums  $T$  innerhalb einer bestimmten, beliebig kleinen Umgebung des von Neumann-Outputpfads verlaufen.

*Beweis:* siehe Morishima<sup>23</sup>

Morishima führt den Beweis durch Anwendung des Dualitätstheorems der linearen Programmierung. Die aufgestellten Hilfssätze beziehen sich ausschließlich auf die Preisseite des Programms. Der Hilfssatz 1 eliminiert die Ungleichungen, und es zeigt sich, daß die Lösung des Duals mit der Lösung des Differenzengleichungssystems (IV.13), das mit dem Preisvektor  $\mathbf{p}_0^T$  beginnt, zusammenfällt. Für beliebige Horizontlängen gilt

$$\mathbf{p}_0^T \neq \mathbf{0}, \quad T = 1, 2, \dots, \infty,$$

weil aus dem vorhandenen Spektrum der Technologien  $\mathbf{A}_\sigma$  immer eine gefunden werden kann, so daß sich die technologisch bedingte Nachfrage mit den gegebenen Anfangsbeständen  $\mathbf{b}_0$  trifft. Für keines der den Anfangsbestand bildenden Güter

<sup>23</sup> M. Morishima, Equilibrium, ..., a. a. O., S. 170 – 171.

kann somit ein Überschussangebot in der Basisperiode vorliegen. Weiterhin wissen wir, daß die Preise in der Basisperiode von oben beschränkt sind. Somit ist die Menge aller Preisvektoren der Basisperiode für die Horizontlänge  $T = 1, 2, \dots, \infty$  abgeschlossen und beschränkt. Definiert man für all diese Preisvektoren eine Umgebung  $U(\mathbf{p}_i^*), (i = 1, \dots, k)$ , dann läßt sich Hilfssatz 3 anwenden. Zu jedem  $\mathbf{p}_i^*$  gibt es ein  $t^*(\mathbf{p}_i)$ , d. h. eine Periode, von der an der Preispfad in der Umgebung des von Neumann-Pfads verläuft.

Es sei

$$T^* = \max [t^*(\mathbf{p}_1), t^*(\mathbf{p}_2), \dots, t^*(\mathbf{p}_k)] .$$

Wir können dann sicher sein, daß der bei einem beliebigen Anfangswert  $\mathbf{p}_0$  beginnende und durch (IV.13) beschriebene Preispfad gegen den von Neumann-Pfad konvergiert und für alle Perioden  $t \geq T^*$  in beliebiger Nähe des von Neumann-Pfads verläuft. Für hinreichend große  $T$  bleibt der Preispfad im Zeitraum  $T - T^*$  am von Neumann-Pfad. Für zunehmende Horizontlänge nimmt der Anteil des Zeitraums, in dem der Preispfad in der Nähe des von Neumann-Pfads verläuft, zu. Für einen unendlichen Horizont gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T - T^*}{T} = 1 .$$

Es stellt sich jetzt die Frage, ob das dem Preissystem korrespondierende Mengensystem ebenfalls zum von Neumann-Pfad konvergiert. Wie bereits erwähnt, wird das von Morishima mit Hilfe des Dualitätstheorems der linearen Programmierung bewiesen. Verläuft der Preispfad ab  $T^*$  in beliebig kleiner Nähe des von Neumann-Pfads, so weisen bei den herrschenden Preisen alle Prozesse (Aktivitäten), die nicht die von Neumann-Technologie verwenden, Surplusgewinne auf, so daß deren Aktivitätsniveau null wird (Konkurrenzannahme). Somit gilt:

$$\mathbf{q}_{t+1} \mathbf{A}_\epsilon \leqq \mathbf{q}_t , \quad t = T^* + 1, \dots, T .$$

Andererseits wird davon ausgegangen, daß der Preisvektor im Zeitraum  $T - T^*$  positiv ist, weil der von Neumann-Preisvektor positiv ist und der Abstand zum von Neumann-Pfad so klein gehalten werden kann, daß auch die Preise, die sich innerhalb dieser Umgebung befinden, positiv sind. Sind die Preise positiv, dann folgt wiederum aus dem Dualitätstheorem, daß die Nebenbedingungen des Primal als Gleichungen erfüllt sind, d. h. auf der Mengenseite gilt:

$$(IV.17) \quad \mathbf{q}_{t+1} \mathbf{A}_\epsilon = \mathbf{q}_t , \quad t = T^* + 1, \dots, T - 1 ,$$

und

$$\mathbf{q}_T = \mathbf{x}_T \mathbf{b}^* > 0 .$$

Da das Mengensystem „rückwärts“ gerichtet ist, nimmt Morishima folgende Transformation vor. Er setzt:

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{x}_T \mathbf{W}_{T-t}, \quad t = T^* - 1, \dots, T.$$

Wird das in (IV.17) eingesetzt, erhält man ein System „vorwärts“ gerichteter Differenzgleichungen.

$$\mathbf{W}_{s-1} \mathbf{A}_\varepsilon = \mathbf{W}_s, \quad s = 1, 2, \dots, T - T^* - 1.$$

Auf der Grundlage von Hilfssatz 2 läßt sich zeigen, daß auch die Mengen gegen den von Neumann-Outputpfad konvergieren.

Die Turnpike-Theorie war in erster Linie unter planungstheoretischen Perspektiven von Interesse. In diesem Sinn war auch Hicks' Einwand gemeint, daß aus den Turnpike-Theoremen kein normatives Argument für ein Wachstum mit uniformer Rate folge.<sup>24</sup> Und mit dem Blick auf marktregulierte Ökonomien könnte man ihnen gänzlich Relevanz absprechen, zumal es sich um reine Produktions-Turnpike-Theoreme handelt, in denen den Konsumenten gleich den „Arbeitspferden“ ein pro Kopf-Konsum qua Technologie zugeteilt wird, die Souveränität einer eigenen Konsumententscheidung jedoch unberücksichtigt bleibt. Dieses Manko wurde durch Konsum-Turnpike-Theoreme beseitigt. Die Ergebnisse dieser Theoreme sind zunächst überraschend, denn auch bei der Nutzenmaximierung des laufenden Konsums zeigen sich die Optimalitätseigenschaften eines steady-state Wachstumspfads. In diesem Sinne kann Orosel zugestimmt werden,

„(…), daß die Produktionsturnpikethoreme trotz der scheinbar größeren Realitätsnähe der Konsumturnpikethoreme von entscheidenderer Bedeutung sind, weil die Konsumturnpikethoreme erst in der Nähe eines pro Kopf stationären Endzustandes relevant werden.“<sup>25</sup>

Bei genauer Analyse der Konsum-Turnpikethoreme zeigt sich, daß dieses Ergebnis – wie könnte es auch anders sein – bereits mit der Präferenzaxiomatik präjudiziert wird. Eine der üblichen Annahmen, die intertemporalen Nutzenfunktionen zugrundeliegen, ist die der Stationarität. Koopmanns zufolge liegt ein stationäres Präferenzsystem vor<sup>26</sup>, wenn sich die Präferenzen über die Zeit nicht ändern und somit sich nur das System als Ganzes in der Zeit „nach vorne“ verschiebt. Die Grenzrate der Substitution zwischen dem Konsum eines Gutes in  $t_1$  und dem Konsum des Gutes in  $t_2$  ist unabhängig von der Periode, in der die Entscheidung getroffen wird. Etwas vereinfacht ausgedrückt heißt das, daß bei einem Individuum die Grenzrate der Substitution bezüglich eines Gutes zwischen zwei Zeitpunkten über sein gesamtes Leben hinweg konstant bleibt. Ist das Präferenzsystem außerdem

<sup>24</sup> Vgl. J. R. Hicks, Capital and Growth, a. a. O., S. 236 – 7.

<sup>25</sup> G. Orosel; Ungleichschrittiges Wachstum bei linearer Technologie, Berlin 1977, S. 65.

<sup>26</sup> T. C. Koopmans; Stationary Ordinal Utility and Impatience, Econometrica, vol. 28, 2, 1960, S. 287 – 309.

noch homogen und ist die Zeitpräferenzrate positiv und konstant, so kann ein daraus resultierender optimaler Konsumplan nur durch einen Pfad mit uniformer und konstanter Wachstumsrate „realisiert“ werden.<sup>27</sup>

Bleiben wir also bei den Produktions-Turnpike-Theoremen und überlegen, welche Bedeutung man ihnen im Rahmen einer ökonomischen Theorie beimesse könnte, die keine geplante, sondern eine durch Märkte gesteuerte Ökonomie zum Gegenstand hat. Die Idee der Selbstregulation einer marktkoordinierten Ökonomie beruht in der klassischen Nationalökonomie im wesentlichen auf zwei Annahmen. Die erste ist handlungstheoretischer Natur und unterstellt, daß die Unternehmen (oder Unternehmer) das Ziel der Gewinnmaximierung verfolgen. Die zweite Annahme stellt einen Zusammenhang zwischen den Handelnden her. Gemeint ist der Konkurrenzzusammenhang, der dafür sorgt, daß übernormale Gewinne (Surplusprofite) nur temporären Charakter haben und langfristig wegkonkurriert werden, so daß eine langfristige Position mit uniformer Gewinnrate (Zins / Profitrate) die Referenz des Konkurrenzprozesses darstellt. Die Frage ist nun, ob in dem Turnpike-Theorem diese klassische Idee der Selbstregulation zum Ausdruck kommt.

Betrachten wir zunächst die erste Phase der Konvergenz zum von Neumann-Pfad, d. h. die Zeitspanne von  $t = 0$  bis  $t = T^*$ . Auf der Preisseite werden die Produktionskosten minimiert, indem aus dem Spektrum der zur Verfügung stehenden Technologien, die mit den geringsten Alternativkosten ausgewählt werden. Diesen Alternativkosten entsprechen langfristig gesehen die von Neumann-Preise. Damit werden aus der Menge aller möglichen Aktivitäten  $A_\sigma$ ,  $\sigma = \alpha, \beta, \dots, \varepsilon, \dots, \mu$ , jene ausgewählt, die keine Verluste erleiden, wenn man sie mit von Neumann-Preisen bewertet.<sup>28</sup> Unter der getroffenen Voraussetzung, daß Outputs wieder zu Inputs werden, der Wert der Inputs den Wert der mit von Neumann-Preisen bewerteten Inputs langfristig nicht übersteigen kann, erzeugt eine auf diese Weise ausgewählte Folge von Aktivitäten einen Preispfad, der mit zunehmender Periodenzahl in beliebiger Nähe des von Neumann-Preispfads verläuft.

Die Differenz zwischen Produktionskosten und Alternativkosten wird für ein hinreichend großes  $T^*$  beliebig klein. Auf der Mengenseite sind die Nebenbedingungen ab  $t = 1$  mit Gleichheit erfüllt, denn ein Gut kann nicht im Überschussangebot vorliegen, es sei denn, daß sein Preis gleich Null ist. Da aber der Preis des Inputs am Anfang der Periode  $t$  gleich dem Preis des Outputs am Ende der vorhergehenden Periode ist, kann ein Gut, das am Ende von  $t$  überproduziert wird, nicht in Periode  $t - 1$  kostenminimal produziert worden sein. Ein Überschussangebot (freie Güter also) kann, wenn überhaupt<sup>29</sup>, nur am Anfang von  $t = 1$  bzw. Ende

<sup>27</sup> Vgl. J. R. Hicks; Capital and Growth, a. a. O., S. 255.

<sup>28</sup> Hicks verwendet hierfür den Begriff „class of top techniques“, Morishima nennt sie „top processes“ und bei McKenzie bilden diese Prozesse die „von Neumann facet“. Vgl. J. R. Hicks; Capital and Growth, S. 227 – 237. M. Morishima; Theory of Economic Growth, Oxford 1969, S. 184 ff.

<sup>29</sup> Durch die hinreichend große Zahl der zur Verfügung stehenden Technologien kann das ausgeschlossen werden.

von  $t = 0$  auftreten. In der Zeitspanne von  $t = T^*$  bis  $t = T$  befindet sich der tatsächliche Pfad in einer beliebig kleinen Umgebung des von Neumann-Pfads.

Das Ziel der Gewinnmaximierung führt zur Wahl der kostenminimalen Technik, wobei die von Neumann-Preise die Bewertungsgrundlage der Alternativkosten darstellen und die Konkurrenz die Surplusgewinne beseitigt. Diese bereits von der klassischen Theorie beschriebenen Mechanismen bilden den ökonomischen Kern der Argumentation. Der von Neumann-Pfad gleichschrittenen Wachstums mit uniformer Profit/Zinsrate bildet die Referenz für einen tatsächlichen Pfad, dessen Ausgangspunkt nicht bereits auf dem von Neumann-Pfad liegt. Diese Idee eines Referenzgleichgewichts werden wir im nächsten Kapitel aufgreifen, wenn wir das neocardianische allgemeine Gleichgewicht der langen Periode mit dem Konzept des allgemeinen intertemporalen Gleichgewichts der neoklassischen Theorie vergleichen.

## **V. Das langperiodige Gleichgewicht: Ein Spezialfall oder der Referenzfall?**

### **1. Das Konzept der Profitrate in der intertemporalen Gleichgewichtstheorie**

Wir haben uns in den beiden letzten Teilen mit recht verschiedenen Gleichgewichtspfaden beschäftigt und damit die Grundlage zur Behandlung eines Problems gelegt, das Gegenstand einer Auseinandersetzung zwischen der walrasianischen Allgemeinen Gleichgewichtstheorie und der neoricardianischen Theorie ist. Ausgelöst wurde diese Auseinandersetzung durch F. Hahn, der in der neoricardianischen Theorie einen Spezialfall der intertemporalen Allgemeinen Gleichgewichtstheorie sieht.<sup>1</sup> Verkürzt gesehen kulminiert der Streit in der Frage, ob ein Gleichgewicht durch eine uniforme Profit- / Zinsrate gekennzeichnet ist, oder ob dies der Spezialfall einer Theorie ist, die ein Gleichgewicht im allgemeinen nicht an einem uniformen Zinssatz, sondern am Zustand der Markträumung festmacht.

Bevor wir auf diese Kritik eingehen, wollen wir noch einmal daran erinnern, daß der jeweilige Begriff des Zinssatzes von der Normierung des intertemporalen Preissystems abhängt. Eigenzinssätze lassen sich nur für physisch gleiche Güter als Quotient ihrer diskontierten Preise ableiten. Bildet man hingegen laufende bzw. undiskontierte Preise, dann wird der Eigenzinssatz des Numeraires zum relevanten Zinssatz.

Bezöge sich das Charakteristikum einer uniformen Zinsrate auf die Eigenzinssätze, dann implizierte das eine Konstanz der relativen Preise über den zugrundegelegten Betrachtungszeitraum. Da nur bei stationären bzw. semistationären Entwicklungen die Struktur der relativen Preise gleich bleibt, wäre das Konzept einer uniformen Profitrate an stationäre bzw. steady-state Wachstumsgleichgewichte gebunden; eine Argumentation, die sich sowohl bei Bliss<sup>2</sup> und Dixit<sup>3</sup> als auch Hahn<sup>4</sup> findet.

Diese Sichtweise ist allerdings ein völlig innerparadigmatisches Problem der Neoklassik. Um dem bei Wicksell in Form der Wicksell-Effekte auftretenden Umbewertungsprobleme bei der Bestimmung des Zinssatzes zu entkommen, ging man auf eine intertemporale Formulierung der walrasianischen Theorie über, muß dann aber feststellen, daß „der Zinssatz“ als solcher nicht mehr existiert.

---

<sup>1</sup> F. H. Hahn; The neo-Ricardians, Cambridge Journal of Economics, 1982, S. 353 – 374.

<sup>2</sup> C. Bliss; Capital Theory and the Distribution of Income, Amsterdam 1977, insbes. Kap. 9, 10, 11.

<sup>3</sup> A. Dixit; The Accumulation of Capital Theory, Oxford Economic Papers, 1977, S. 1 – 29.

<sup>4</sup> F. H. Hahn; The neo-Ricardians, a. a. O., S. 367 f.

„It is tempting in these circumstances for theorists to flee to the stationary or balanced-growth state (...) where all own-rates are equal because all prices in constant external numéraire are falling at the same rate.“<sup>5</sup>

Der Vorwurf gegen die neoricardianische Theorie, daß sich deren Gleichgewichtskonzept auf das der Stationarität und somit auf einen Spezialfall reduziere, ist eine Projektion. Nur weil im eigenen Paradigma die Stationarität als Spezialfall erscheint, soll das in einem anderen Paradigma ebenfalls gelten. Damit soll freilich nicht behauptet werden, daß das stationäre Gleichgewicht bzw. Wachstumsgleichgewicht im neoricardianischen Paradigma nicht existiert. Die Frage ist jedoch, welchen Stellenwert man ihm einräumt. Eine mögliche Sichtweise wäre, ihm den Charakter eines Referenzgleichgewichts zuzuschreiben. Eine Konstellation, die gleichsam das Gravitationszentrum der Marktprozesse darstellt. In diesem Sinn ist das Gravitationszentrum der allgemeine Zustand, und die realen Prozesse sind „das Spezielle“.

Löst man sich vom Konzept der diskontierten Preise und geht zum Konzept der laufenden Preise über, dann läßt sich das zwischen den Paradigmen entstandene „Kanitverstan“ durchbrechen, und eine vergleichende Analyse wird möglich. Das Konzept diskontierter Preise ist darüberhinaus nicht gerade anschaulich, und

„We are used to a current-numéraire economy in which prices in each period are related to a standard commodity whose value is artificially fixed from one  $t$  to the next despite its fluctuation in constant-numéraire value.“<sup>6</sup>

Das Konzept der laufenden Preise erschwert zwar, das Prinzip des intertemporalen Äquivalenttausches zu erkennen. Es ermöglicht dafür aber einen auf einer Werteinheit basierenden Zinssatz für alle Güter zu definieren. Wenn z. B. Geld Numérairegut ist, dann ist der Eigenzinssatz des Geldes der relevante Zinssatz der Ökonomie. In einer Ökonomie, in der alle Verträge „heute“ gezahlt werden, obwohl teilweise erst „morgen“ geliefert wird, also eine Ökonomie mit vollkommenen Zukunftsmärkten, drückt man alle Preise in einem konstanten Numeraire („heute“) aus:

$$\frac{p_{i0}}{p_{g0}}, \frac{p_{i1}}{p_{g0}}, \dots, \frac{p_{it}}{p_{g0}}, \dots \quad \forall i, t .$$

mit  $p_{g0} = 1$ .

In einer intertemporalen Ökonomie ohne Zukunftsmärkte, in der „morgen“ gezahlt und geliefert wird, wobei man „heute“ oder „morgen“ Verträge abschließen kann, sprechen wir von einer Ökonomie mit laufendem Numeraire. Hier gilt:

$$\frac{p_{i0}}{p_{g0}}, \frac{p_{i1}}{p_{g1}}, \dots, \frac{p_{it}}{p_{gt}}, \dots \quad \forall i, t .$$

mit  $p_{gt} = 1, \forall t$ .

<sup>5</sup> R. E. Kuenne; Money, Capital, and Interest ..., a. a. O., S. 620.

<sup>6</sup> R. E. Kuenne; Money, Capital, and Interest ..., a. a. O., S. 627.

Wir erinnern uns, daß zwischen dem *diskontierten* Preis eines Guts  $i$  in Periode  $t$ ,  $p_{it}$ , und seinem laufenden Preis  $\bar{p}_{it}$  die folgende Beziehung besteht:

$$(V.1) \quad p_{it} = \beta_{gt} \bar{p}_{it} ,$$

so daß

$$\frac{p_{it}}{p_{it+1}} = \frac{\beta_{gt} \bar{p}_{it}}{\beta_{gt+1} \bar{p}_{it+1}} .$$

Da

$$(V.2) \quad \frac{\beta_{gt}}{\beta_{gt+1}} = (1 + \rho_{gt}), \quad (1 + \rho_{it}) \frac{\bar{p}_{it+1}}{\bar{p}_{it}} = (1 + \rho_{gt})$$

und

$$\frac{\bar{p}_{it+1}}{\bar{p}_{it}} = (1 + \delta_{it}) ,$$

folgt

$$(1 + \rho_{it})(1 + \delta_{it}) = (1 + \rho_{gt}) .$$

Diese Formel wurde von Irving Fisher bereits vor rund 100 Jahren in *Appreciation and Interest* (1896) entwickelt.<sup>7</sup> Die Gleichung selbst ist freilich noch keine Theorie, sondern lediglich eine Definitionsgleichung, die sich aus der Normierung des intertemporalen Preissystems ergibt. Wir werden im folgenden den Eigenzinssatz des Numeraires als Geldzinssatz bezeichnen, d. h. es gilt  $\rho_{gt} \equiv i_t$ .

Malinvaud definiert die marginale Profitrate in der Produktion<sup>8</sup>

$$(V.3) \quad \tau_t = \frac{\partial \mathbf{b}_{t+1} \bar{\mathbf{p}}_{t+1} - \partial \mathbf{a}_t \bar{\mathbf{p}}_t}{\partial \mathbf{a}_t \bar{\mathbf{p}}_t} ,$$

d. h. das Verhältnis von der Differenz zwischen marginaler Outputveränderung und marginaler Inputveränderung zu marginaler Inputveränderung bewertet mit den Preisen am Anfang bzw. am Ende der Periode.

Verfolgen die Unternehmen das Ziel der Gewinnmaximierung, dann gilt unter Konkurrenzbedingungen und unter der Annahme konstanter Skalenerträge, daß der diskontierte Gewinn gleich Null ist, d. h.

$$(V.4) \quad 0 = \mathbf{b}_{t+1} \mathbf{p}_{t+1} - \mathbf{a}_t \mathbf{p}_t .$$

<sup>7</sup> I. Fisher; *Appreciation and Interest*, American Economic Association Publications, Bd. 3, S. 331 – 442, Reprint, A.M. Kelley, 1961.

<sup>8</sup> E. Malinvaud; *Lectures on Microeconomic Theory*, Amsterdam – London, 1972, S. 240.

Transformiert man (V.4) mit Hilfe von (V.2) in laufende Preise, so ergibt sich:

$$(V.5) \quad 0 = \beta_{gt+1} \mathbf{b}_{t+1} \bar{\mathbf{p}}_{t+1} - \beta_{gt} \mathbf{a}_t \bar{\mathbf{p}}_t .$$

Unter Berücksichtigung von (V.1) und (V.2) erhält man

$$(V.5') \quad 0 = \mathbf{b}_{t+1} \bar{\mathbf{p}}_{t+1} - (1 + i_t) \mathbf{a}_t \bar{\mathbf{p}}_t$$

oder

$$(V.6) \quad i_t = \frac{\mathbf{b}_{t+1} \bar{\mathbf{p}}_{t+1} - \mathbf{a}_t \bar{\mathbf{p}}_t}{\mathbf{a}_t \bar{\mathbf{p}}_t} .$$

Aus (V.3) und (V.6) folgt

$$i_t = \tau_t ,$$

d. h. im Gleichgewicht ist in jeder Periode der Zinssatz (Eigenzinssatz des Numéraires) gleich der Profitrate in der Produktion.

Bevor wir das Profitratenkonzept der neocardianischen Theorie mit dem der neoklassischen intertemporalen Gleichgewichtstheorie vergleichen können, müssen wir das neoklassische Gewinnkonzept eingehend analysieren. Hierzu greifen wir auf (V.5') zurück. Der Periodengewinn in laufenden Preisen ist demnach

$$\bar{G} = (\mathbf{b}_{t+1}) \bar{\mathbf{p}}_{t+1} - (1 + i_t) \mathbf{a}_t \bar{\mathbf{p}}_t .$$

Da Input- und Outputpreise verschieden sind, wird die Gewinnhöhe nicht nur durch die physische Produktivität, sondern auch durch Preiseffekte beeinflußt. Um die verschiedenen Einflußkomponenten sichtbar zu machen, zerlegen wir den Gewinn.

$$(V.7) \quad \bar{G} = (\mathbf{b}_{t+1} - \mathbf{a}_t) \bar{\mathbf{p}}_{t+1} + \mathbf{a}_t (\bar{\mathbf{p}}_{t+1} - \bar{\mathbf{p}}_t) - i_t \mathbf{a}_t \bar{\mathbf{p}}_t ,$$

wobei

$(\mathbf{b}_{t+1} - \mathbf{a}_t) \bar{\mathbf{p}}_{t+1}$	den Wert der Nettoproduktion,
$\mathbf{a}_t (\bar{\mathbf{p}}_{t+1} - \bar{\mathbf{p}}_t)$	den „capital gain“,
und $i_t \mathbf{a}_t \bar{\mathbf{p}}_t$	die Zinskosten

darstellen.

Betrachten wir zunächst den Term, der den Wert der Nettoproduktion darstellt. Die Bewertung erfolgt zu Outputpreisen. Auch die Inputs, die ursprünglich zu Preisen der Periode  $t$  bewertet wurden, werden hier mit Preisen der Periode  $t + 1$  bewertet. Die Inputs werden somit zu Wiederbeschaffungspreisen bewertet.<sup>9</sup>

Der Term, der den „capital gain“ bezeichnet, verweist darauf, daß ein Teil des Gesamtgewinns auf reine Preisänderung zurückgeführt werden muß. Wenn  $\bar{p}_{i,t+1} > \bar{p}_{i,t}$  bzw.  $\bar{p}_{i,t+1} < \bar{p}_{i,t}$  dann ist der „capital gain“ positiv bzw. negativ.

Der letzte Term bezeichnet die „historischen“ Zinskosten; „historisch“, weil das Kapital zu Inputpreisen, d. h. zu Anschaffungspreisen bewertet wird.

Im Gleichgewicht ist bei vollkommener Konkurrenz und bei konstanten Skalenerträgen der Gesamtgewinn  $\bar{G} = 0$ , so daß

$$(V.8) \quad i_t = \frac{(\mathbf{b}_{t+1} - \mathbf{a}_t) \bar{\mathbf{p}}_{t+1}}{\mathbf{a}_t \bar{\mathbf{p}}_t} + \frac{\mathbf{a}_t (\bar{\mathbf{p}}_{t+1} - \bar{\mathbf{p}}_t)}{\mathbf{a}_t \bar{\mathbf{p}}_t}.$$

Wir bezeichnen den ersten Term auf der rechten Seite von (V.8) als Umsatzprofitrate,  $\hat{\tau}_t$ , und den zweiten Term als Kapitalrente,  $\pi_t$ . Somit gilt im Gleichgewicht:

$$(V.9) \quad i_t = \hat{\tau}_t + \pi_t = \tau_t.$$

Im Gleichgewicht ist der Geldzinssatz gleich der marginalen Gesamtprofitrate (V.6), wobei sich die Gesamtprofitrate in die Umsatzprofitrate<sup>10</sup> und in die Kapitalrente aufspalten läßt.

Zunächst ist festzustellen, daß die Gesamtprofitrate des intertemporalen Modells über die Perioden hinweg uniform wäre, wenn der Geldzinssatz über die Zeit konstant bliebe. Wie aber ist dann die Konvergenz zu Produktionspreisen möglich, wenn diese über die Zeit uniforme Gesamtprofitrate keinem Akteur einen Anlaß gibt, sein Verhalten zu ändern? Dazu muß bedacht werden, daß die Proportionen zwischen Umsatzgewinn und Kapitalrente in zwei verschiedenen Sektoren trotz gleichem Gesamtgewinn recht unterschiedlich sein können.

Die der neoklassischen Theorie zugrundeliegenden Definitionen der (marginalen bzw. durchschnittlichen) Gesamtprofitrate und der Umsatzprofitrate können nun mit der in der neocardianischen Theorie üblichen Definition der Profitrate verglichen werden. Der klassisch-neocardianischen Definition der Profitrate liegt keine Pfadbetrachtung zugrunde. Die Grundidee ist „zirkuläre Reproduktion“ und nicht „zeitlich gerichtete Produktion“. Inputs und Outputs werden gleichdatiert, und der Übergang von einer zur folgenden Periode wird nicht behandelt. Ein bestimmter Zeitraum wird als eigenständiges System betrachtet. In diesem Sinne ist die Methode statisch bzw. komparativ-statistisch, wenn die Gleichgewichtslagen von zwei verschiedenen Perioden verglichen werden. Datiert man Inputs und Outputs gleich, dann müssen auch die zugehörigen Preise gleichdatiert werden.

<sup>9</sup> Moxter bezeichnet den „Wert der Nettoproduktion“ als „Umsatzgewinn“ und unterscheidet diesen vom realisierten Gewinn, der die Scheingewinne (capital gains) enthält. Vgl. A. Moxter; Betriebswirtschaftliche Gewinnermittlung, Tübingen 1982, S. 116.

<sup>10</sup> Wir unterstellen, daß marginale und durchschnittliche Gesamtprofitrate gleich sind.

Die neoricardianische Profitrate und die neoklassische Umsatzprofitrate unterscheiden sich dadurch, daß im neoklassischen Konzept der Kapitalwert im Nenner zu Inputpreisen, zu „historischen“ Kosten also, angesetzt wird, während im Zähler zu Wiederbeschaffungspreisen bewertet wird. Im neoricardianischen Konzept werden Inputs und Outputs und daher auch die Kapitalkosten im Nenner mit den gleichen Preisen bewertet. Am neoklassischen Konzept fällt auf, daß die Kapitalinputs verschieden bewertet werden. Bei der Berechnung der Nettoerlöse werden die Kapitalgüterinputs zu Wiederbeschaffungspreisen bewertet, während sie im Nenner zu „historischen“ Inputpreisen angesetzt werden. Würde man auch die Kapitalkosten im Nenner zu Wiederbeschaffungspreisen ansetzen, hätte man auf den ersten Blick eine gewisse Ähnlichkeit zum neoricardianischen Konzept. Eigentümlich daran ist jedoch, daß in diesem Fall die Profitrate in Periode  $t$  durch die Preise in Periode  $t + 1$  definiert wäre. Bewertet man Nenner und Zähler zu Inputpreisen, ergäbe sich, daß die Outputs in  $t + 1$  zu Preisen der Vorperiode bewertet würden. Auch das scheint eine unbefriedigende Lösung zu sein.<sup>11</sup> Auf den ersten Blick führt keine Variante zu einer Übereinstimmung mit dem neoricardianischen Konzept. Es sei denn, man postuliert, daß die Preisänderungsrate Null ist. In diesem Fall sind Output- und Inputpreise identisch und beide Definitionen stimmen überein. Damit werden wir wieder mit dem Spezialfallproblem konfrontiert. Die neoricardianische Definition der Profitrate kann im Rahmen des neoklassischen Konzepts nur erzeugt werden, wenn das Preissystem stationär ist. Das Problem der Inkongruenz beider Konzepte liegt somit an anderer Stelle, und zwar in der Konzeptualisierung von Produktionsprozeß und Marktprozeß. Produktion und Marktbewertung werden im neoklassischen Periodenkonzept voneinander getrennt. Jeder Produktionsprozeß wird von zwei „Markttagen“ (Hicksscher Montag) umklammert, so daß die zu einem Produktionsprozeß gehörigen Input- und Outputpreise nur dann identisch sind, wenn an beiden Markttagen identische (strukturidentische) Angebots- und Nachfrageverhältnisse vorherrschen.

Das konzeptionelle Problem liegt somit in der chronologischen Trennung von Produktionsprozeß und Marktprozeß, denn diese präjudiziert die im allgemeinen unterschiedliche Bewertung von Inputs und Outputs. Die Fragwürdigkeit dieser Trennung von Markt und Produktion ist offensichtlich, und eine Konzeption, in der Marktbewertung und Produktion simultan stattfände, ist vorzuziehen. Es wäre allerdings vermassen zu behaupten, die neoricardianische Theorie könne diese Forderung erfüllen. Genaugenommen berücksichtigt die neoricardianische Theorie die Marktbewertung zunächst gar nicht. Sie untersucht die Verteilungsabhängigkeit von Tauschverhältnissen in einem interdependenten System der Warenproduktion. Diese Tauschverhältnisse sichern, sofern sie eingehalten werden, die Reproduktionsfähigkeit des Systems der Warenproduktion. Die ermittelten Tauschverhältnisse sind Produktionspreise und keine Marktpreise. Ob sich die Produktionspreise

<sup>11</sup> Hätte man einen geeigneten Index, dann ließen sich die Erlöse deflationieren. Es wird sich zeigen, daß sich ein solcher „Deflator“ aus der Preisänderungsrate der laufenden Preise gewinnen läßt.

im Marktprozeß realisieren lassen, d. h. ob Marktpreise zu Produktionspreisen werden, ist eine Problemstellung, die seit einigen wenigen Jahren im Rahmen dynamischer Modelle untersucht wird.<sup>12</sup>

Die in der neoricardianischen Theorie zur Definition der Profitrate herangezogenen Preise sind Produktionspreise, die sich auf eine gegebene Input-Outputstruktur in einem gegebenen Zeitraum beziehen. Da in diesem Zeitraum Waren sowohl Inputs als auch Outputs darstellen, macht es überhaupt keinen Sinn, sie mit unterschiedlichen Preisen zu bewerten, denn ein und dieselbe Ware kann bei gegebener Verteilung und Technologie nicht zwei verschiedene Produktionspreise haben.

Wir können somit vorläufig festhalten, daß sich die Zins- bzw. Profitratenkonzepte der neoklassischen und der neoricardianischen Theorie wesentlich unterscheiden. Im neoklassischen Konzept ist im Gleichgewicht die (marginale) Gesamtprofitrate gleich dem Zinssatz. Das impliziert, daß die Profitrate auf keinen nur durch die Produktivität erzeugten Überschuß in der Produktion zurückgeführt werden kann, weil die mengenmäßige Veränderung zu verschiedenen Zeitpunkten mit unterschiedlichen Preisen bewertet wird. Beide Konzepte, das neoklassische und das neoricardianische, machen für sich genommen einen Sinn, sind jedoch nicht direkt ineinander überführbar, es sei denn, man beschränkt sich wiederum auf stationäre bzw. semistationäre Zustände bzw. Pfade.

Gegen das Argument, die neoricardianische Theorie sei ein Spezialfall der neoklassischen intertemporalen Gleichgewichtstheorie, kann man aus neoricardianischer Perspektive verschiedene Gegenargumente anführen. Im wesentlichen lassen sich diese auf das Problem des Gleichgewichtsbegriffs zuspielen. Die neoklassische intertemporale Gleichgewichtstheorie erhebt das intertemporale Periodengleichgewicht mit uniformen marginalen Profitraten, die dem Zinssatz (des Numéraires) entsprechen, zum allgemeinen Gleichgewichtsbegriff und damit zum Referenzgleichgewicht. Der Grund hierfür liegt, wie wir gezeigt haben, in den Schwierigkeiten, ein langperiodiges Gleichgewicht mit Kapitalgüterproduktion und uniformer Profitrate konsistent abzuleiten.

Akzeptiert man das Konzept des Periodengleichgewichts als Referenzfall, dann läßt sich aus dieser Perspektive ein langfristiges Gleichgewicht als eine Abfolge von Periodengleichgewichten – ein intertemporales Gleichgewicht – begreifen. Kann man zeigen, daß ein solches intertemporales Gleichgewicht im allgemeinen keine über alle Perioden hinweg uniforme Profitrate haben muß, dann ist die Menge aller intertemporalen Gleichgewichte eine Obermenge der Menge der intertemporalen Gleichgewichte mit uniformer Profitrate. Ein langfristiges Gleichgewicht wird somit zu einem Spezialfall, weil es eine Untermenge der Menge kurzfristiger Gleichgewichte ist.

Fast umgekehrt lautet die Argumentation der Neoricardianer. Das langperiodige Gleichgewicht bildet den Referenzfall, und das intertemporale Gleichgewicht ist

---

<sup>12</sup> Vgl. I. Kubin; Neoricardianische Gleichgewichtsmodelle und Änderungen in der Zusammensetzung der Endnachfrage, Marburg 1989.

ein kurzfristiges Gleichgewicht, das vom Standpunkt des langperiodigen Gleichgewichts aus gesehen ein Ungleichgewicht darstellt. In welchem Sinn im intertemporalen Gleichgewicht ein Ungleichgewicht „enthalten“ ist, werden wir in Kürze noch analysieren.

Die neocardianische Position läßt sich zum einen für wachsende Ökonomien durch die Turnpike-Theorie erhärten und ist auch auf stationäre Entwicklungen übertragbar. So haben Duménil und Levy gezeigt<sup>13</sup>, daß unter bestimmten Voraussetzungen die laufenden Preise eines intertemporalen Modells gegen Produktionspreise und die periodenbezogenen Zinsraten (des Numéraires) gegen eine uniforme Profitrate konvergieren, wenn ein Produktionspreissystem existiert.<sup>14</sup>

## 2. Das Modell von Duménil und Levy

Duménil und Levy nehmen in ihrem intertemporalen Modell mit unendlichem Horizont an, daß nur „Kapitalisten“ intertemporale Konsumententscheidungen treffen, während „Arbeiter“ ein exogen gegebenes Güterbündel konsumieren.

Es gibt nur eine Technologie mit fixen Koeffizienten, es liegen konstante Skalenerträge vor, und Arbeit wird in jedem Prozeß eingesetzt. Es herrscht vollkommene Konkurrenz, und die Unternehmen verfolgen das Ziel der Gewinnmaximierung.

Die Unternehmen maximieren ihren diskontierten Periodengewinn, d. h.

$$G_{it} = \mathbf{p}_{it+1} - \mathbf{A}_i \mathbf{p}_t = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots \\ t = 0, 1, 2, \dots, s, \dots$$

wobei  $\mathbf{A}_i$  die auf eine Einheit Output normierten Inputs des  $i$ -ten Sektors bezeichnen. Daraus resultiert die folgende Sequenz von Gleichungen für die diskontierten Preise.

$$(V.10) \quad \begin{aligned} \mathbf{p}_{t+1} &= \mathbf{A} \mathbf{p}_t \\ \mathbf{p}_{t+2} &= \mathbf{A} \mathbf{p}_{t+1} \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\ \mathbf{p}_{t+s} &= \mathbf{A} \mathbf{p}_{t+s-1} \end{aligned}$$

Durch rekursives Einsetzen folgt aus (V.10)

$$(V.11) \quad \mathbf{p}_t = \mathbf{A}' \mathbf{p}_0.$$

<sup>13</sup> G. Duménil and D. Levy; The Classicals and the Neoclassicals: A Rejoinder to Frank Hahn, Cambridge Journal of Economics, 1985, S. 327 – 345.

<sup>14</sup> Vgl. auch: R. A. Dana, M. Florenzano, C. LeVan and D. Levy; Production Prices and General Equilibrium Prices, Journal of Mathematical Economics, vol. 18, 1989, S. 263 – 280.

Die „Kapitalisten“ maximieren ihren Nutzen, der durch eine intertemporale Nutzenfunktion  $U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots)$  beschrieben wird. Die Beschränkung ergibt sich aus den Anfangsbeständen  $\mathbf{b}_0$ .

Für den „Kapitalisten“-Haushalt gilt:

$$\text{Max!} \quad U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots) ,$$

$$\text{Nb.:} \quad \mathbf{b}_0 \mathbf{p}_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_t \mathbf{A}' \mathbf{p}_0$$

Im Gleichgewicht muß bei dem herrschenden Preisvektor  $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots)$  gelten:

$$\begin{aligned} \text{(V. 12)} \quad \mathbf{b}_0 &\geq \mathbf{q}_1 \mathbf{A} + \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{q}_1 &\geq \mathbf{q}_2 \mathbf{A} + \mathbf{x}_1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \mathbf{q}_t &\geq \mathbf{q}_{t+1} \mathbf{A} + \mathbf{x}_t \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Zeile mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$ , die zweite Zeile mit  $\mathbf{A}$ , die  $t$ -te Zeile mit  $\mathbf{A}^{t-1}$  usw., und summiert die Zeilen, dann erhält man

$$\text{(V.13)} \quad \mathbf{b}_0 \geq \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_t(\mathbf{p}_0) \mathbf{A}^t .$$

Sind die Anfangsbestände streng positiv und hat die Nutzenfunktion die üblichen neoklassischen Eigenschaften, dann garantiert (V.13) die Existenz einer positiven Lösung für  $\mathbf{p}_0$ .

Unter dieser Voraussetzung können wir unsere Aufmerksamkeit auf das durch (V.11) beschriebene System der diskontierten Preise lenken. Transformieren wir diese in laufende Preise, dann gilt, wie wir bereits gezeigt haben:

$$\begin{aligned} \text{(V. 14)} \quad \bar{\mathbf{p}}_{t+1} &= (1 + i_t) \mathbf{A} \bar{\mathbf{p}}_t \\ \bar{\mathbf{p}}_{t+2} &= (1 + i_{t+1}) \mathbf{A} \bar{\mathbf{p}}_{t+1} \\ &\vdots \\ \bar{\mathbf{p}}_{t+s} &= (1 + i_{t+s}) \mathbf{A} \bar{\mathbf{p}}_{t+s-1} \end{aligned}$$

Zusammengefaßt durch rekursives Einsetzen ergibt sich

$$\text{(V.15)} \quad \bar{\mathbf{p}}_t = \prod_{k=0}^{t-1} (1 + i_k) \mathbf{A}' \bar{\mathbf{p}}_0 .$$

Hierbei handelt es sich um das System der undiskontierten (laufenden) intertemporalen Gleichgewichtspreise.

Bevor untersucht werden kann, ob die durch (V.15) bestimmten Preise gegen Produktionspreise konvergieren, muß die Existenz von Produktionspreisen sichergestellt sein.

Wir bezeichnen  $\mathbf{p}^*$  und  $\mathbf{r}^*$  als Vektor der Produktionspreise bzw. die uniforme Profitrate und definieren Produktionspreise durch folgendes Gleichungssystem

$$(V.16) \quad \mathbf{p}^* = (1 + \mathbf{r}^*) \mathbf{A} \mathbf{p}^*,$$

wobei die Matrix  $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{d}$  ist, d. h. den Lohngüterkorb  $\mathbf{d}$  enthält. Der Lohn  $w = \mathbf{d} \mathbf{p}$  wird somit vorgeschossen.

Wir formen (V.16) um

$$\left( \frac{1}{1 + \mathbf{r}^*} (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \right) \mathbf{p}^* = \mathbf{0}.$$

Der Vektor der Produktionspreise  $\mathbf{p}^*$  ist der zum Eigenwert  $1/1 + \mathbf{r}^*$  gehörige rechtsseitige Eigenvektor von  $\mathbf{A}$ . Der Vektor der Produktionspreise wird im gleichen Numéraire wie der der laufenden Preise ausgedrückt, d. h. es gilt  $\mathbf{N} \mathbf{p}^* = 1$ . Unter der Voraussetzung, daß  $\mathbf{A}$  eine nichtnegative, unzerlegbare quadratische Matrix ist, sichert das Frobenius-Theorem, daß der Eigenvektor  $\mathbf{p}^* = \mathbf{p}^*(\mathbf{A})$  semipositiv ist und außerdem  $1/1 + \mathbf{r}^* = \lambda \mathbf{A}$  gilt, wobei  $\lambda \mathbf{A}$  den Frobenius-Eigenwert von  $\mathbf{A}$  darstellt. Ist das System produktiv, d. h. produziert es einen Surplus, dann ist  $|\lambda_A| < 1$ .

Die Produktionspreise unterscheiden sich von den laufenden Preisen des intertemporalen Gleichgewichtsmodells dadurch, daß die Produktionspreise durch die Technologie und die Verteilung bestimmt sind, während die intertemporalen Gleichgewichtspreise durch die Technologie, die Präferenzen der Konsumenten und durch die arbiträre Anfangsausstattung bestimmt werden. Es läßt sich nun zeigen, daß die durch (V.15) beschriebenen intertemporalen Gleichgewichtspreise für  $t \rightarrow \infty$  gegen die durch (V.16) definierten Produktionspreise konvergieren.

Die durch System (V.11) bzw. (V.15) beschriebene Folge von Preisen konvergiert gegen die durch (V.16) definierten Produktionspreise, wenn die Folge der Potenzen der Matrix  $\mathbf{A}; \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \dots, \mathbf{A}^t, \dots$  konvergiert.

Satz:

Hat die  $(n \times n)$ -Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  die Eigenwerte  $\lambda_i$  und gilt

$$(i) \quad |\lambda_i| < 1, \quad \forall i,$$

$$(ii) \quad |\lambda_i| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|,^{15}$$

---

<sup>15</sup> Diese Bedingung impliziert, daß  $\mathbf{A}$  primitiv ist.

so gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_{ij}^{t+1} : a_{ij}^t = \lambda_1$$

d. h. die entsprechenden Elemente in  $\mathbf{A}^{t+1}$  und  $\mathbf{A}^t$  unterscheiden sich in der Grenze  $t \rightarrow \infty$  um den Faktor  $\lambda_1$ . Ist  $\mathbf{u}$  ein beliebiger Vektor, dann unterscheiden sich die entsprechenden Komponenten der iterierten Vektoren  $\mathbf{A}^{t+1}\mathbf{u}$  und  $\mathbf{A}^t\mathbf{u}$  für  $t$  um den Faktor  $\lambda_1$ .

*Beweis:* W. Gröbner, Matrizenrechnung.<sup>16</sup>

In der Grenze gilt somit

$$\mathbf{A}^{t+1}\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{A}^t \mathbf{u}$$

bzw.

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{u} .$$

Setzt man  $\lambda_1 = \lambda_A = 1/1 + r^*$  und  $\mathbf{u} = \mathbf{p}^*$ , so gilt in der Grenze

$$\mathbf{A}\mathbf{p}^* = \frac{1}{1 + r^*} \mathbf{p}^*$$

bzw.

$$(1 + r^*)\mathbf{A}\mathbf{p}^* = \mathbf{p}^* .$$

Unter den getroffenen Voraussetzungen konvergieren die intertemporalen Gleichgewichtspreise gegen die Produktionspreise, und die periodenbezogenen Zinssätze konvergieren gegen die uniforme Profitrate  $r^*$ . Mit zunehmender Zahl von Perioden wird der Einfluß der Anfangsbestände auf die Gleichgewichtspreise geringer und der Einfluß der Technologie größer. Zu Beginn dominiert die „Knappheit“ der Anfangsbestände die Preisbestimmung sowohl auf der Angebotsseite als auch durch die Einkommensbeschränkung auf der Nachfrageseite. Mit wachsender Zahl von Perioden werden die durch die Struktur der Anfangsbestände bestimmten Preise durch die Produktion verändert. Die Einkommensbeschränkung resultiert aus der laufenden Produktion und die Preise werden mehr und mehr durch die Reproduktionsbedingungen und durch die Verteilung der aus der laufenden Produktion resultierenden Einkommen bestimmt.

In diesem Sinn bilden die Produktionspreise die Referenz für die intertemporalen Gleichgewichtspreise. Auf dieser Grundlage läßt sich argumentieren, daß ein intertemporales Gleichgewicht eine Übergangsphase darstellt, eine Folge kurzfristiger Gleichgewichte, die zum langfristigen Gleichgewicht konvergiert. Aus der Perspektive des langfristigen Gleichgewichts stellt diese Übergangsphase ein Ungleichgewicht dar, denn es finden offensichtlich von Periode zu Periode Ände-

<sup>16</sup> W. Gröbner; Matrizenrechnung, Mannheim, 1966, S. 179 – 180.

rungen der relativen Preise und damit auch der periodenbezogenen Zinssätze statt. Lindahl selbst muß das intertemporale Gleichgewicht in diesem Sinn verstanden haben, denn er läßt es in eine stationäre Entwicklung einmünden.<sup>17</sup>

### **3. Das intertemporale Gleichgewicht: Ein Gleichgewicht der kurzen Periode?**

Der Gleichgewichtsbegriff der intertemporalen Gleichgewichtstheorie ist aus der Sicht der neoricardianischen Theorie kritisch hinterfragt worden.<sup>18</sup> Eine häufig vorgetragene Kritik richtet sich gegen die Annahme beliebig gegebener Anfangsbestände, weil damit die Begründung einer Vermögensverteilung ausgeklammert wird. Häufig wird auch in polemischer Absicht eine Analogie zum Kriegsgefangenenlager hergestellt. Protagonisten der Allgemeinen Gleichgewichtstheorie verteidigen sich gegen diese Kritik eher pragmatisch: Selbstverständlich seien die Anfangsbestände nicht einfach so als gegeben anzusehen. Die ökonomische Analyse der Allokation könne jedoch nicht bis zum Neandertaler zurückgehen. Dieses Argument ist jedoch etwas zu vordergründig. Denn gerade Malinvauds Argument gegen Kapitalgüterendbestände in Modellen mit endlichem Horizont läßt sich auch gegen die Annahme gegebener Erstausstattungen übertragen, wenn man bedenkt, daß die heute gegebene Erstausstattung als Endbestand eines bereits durchlaufenen Pfads aufgefaßt werden kann. Schefold<sup>19</sup> hat darauf hingewiesen, daß diese Bestände mit bestimmten Erwartungen über ihre zukünftige Nutzung aufgebaut wurden. Wenn diese Erwartungen heute enttäuscht werden, dann ist es unwahrscheinlich, daß morgen Gleichgewicht herrscht. Die Annahme vollkommener Voraussicht (bzw. vollständiger Zukunftsmärkte) steht somit in einem merkwürdigen Verhältnis zur Annahme arbiträrer Erstausstattungen:

... „one may (...) ask why this foresight did not exist yesterday to prevent the wrong stocks from accumulating“. (S. 142)

Das Verblüffende an diesem sich über die Markträumung definierenden Gleichgewichtsbegriff besteht darin, daß Phänomene wie Konkurse, Börsenzusammenbrüche und Arbeitslosigkeit nicht als Krisen, sondern als Gleichgewichte interpretiert werden. Eatwell faßt die Schwierigkeit, die man aus neoricardianischer Perspektive mit dem Gleichgewichtsbegriff der intertemporalen Gleichgewichtstheorie hat, pointiert zusammen:

<sup>17</sup> Vgl. E. Lindahl; *Studies in the Theory of Money and Capital*, a. a. O., S. 327 Fn.

<sup>18</sup> Vgl. B. Schefold; *On Changes in the Composition of Output*, in: K. Bhardwaj and B. Schefold (Hrsg.), *Essays on Piero Sraffa*, London 1990, S. 181 – 182 und derselbe; *Comment on Samuelson*, in: *Essays on P. Sraffa*, a. a. O., S. 301 – 304.

H. D. Kurz; *Sraffa's Contribution to the Debate in Capital Theory*, *Contributions to Political Economy*, 1985, S. 3 – 24, insb. S. 21.

<sup>19</sup> B. Schefold; *Cambridge Price Theory: Special Model or General Theory of Value*, *AEA Papers and Proceedings*, Vol. 75,2, S. 140 – 145.

„The price magnitudes determined in the solution of neoclassical general-equilibrium models should be centres of gravitation. Instead, they define points from which the economy would always tend away.“<sup>20</sup>

Auch Morishima kann sich nicht dazu durchringen, intertemporale Gleichgewichte als langfristige Gleichgewichtspositionen zu begreifen. Er nennt sie Gleichgewichtstrajektorien, und er stellt sich die Frage:

„Does a Hicks-Malinvaud competitive equilibrium trajectory starting from a historically given initial point approach nearer and nearer to the state of Golden Equilibrium when the order of the path gets larger?“<sup>21</sup>

Eine Antwort darauf wurde in der Form des Turnpike-Theorems gegeben. Es besteht allerdings ein gewisser Bedarf, die durch das Turnpike-Theorem und durch das Modell von Duménil und Levy aufgezeigte Konvergenz zum langperiodigen Gleichgewicht ökonomisch zu interpretieren. Es stellt sich doch die Frage, welche Mechanismen und welche „Kräfte“ die Ökonomie zum langfristigen Gleichgewicht „tendieren“ lassen. Eine Möglichkeit sehe ich darin, die Entstehung und Beseitigung der Kapitalrente zu thematisieren.

Ein Gleichgewicht der langen Periode schließt die Existenz von Quasigewinnen aus. Da diese jedoch auf die Änderung der Kapitalgüterpreise zurückzuführen sind, ist ihre Elimination daran gebunden, daß Input- und Outputpreise für Kapitalgüter identisch werden. Die Frage ist, wie diese Elimination im Marktprozeß zustande kommen soll. Die klassische Idee des Ausgleichs der Profitrate durch Abwanderung des Kapitals aus Sektoren, in denen die Profitrate relativ niedrig ist, in solche Sektoren, in denen sie relativ hoch ist, kann auf das Konzept der Gesamtprofitrate nicht angewandt werden, da die „Produktivität“ des Kapitals in den verschiedenen Sektoren durch die kompensierende Funktion der Kapitalrenten verdeckt wird. Die Gleichgewichtsbedingung, die fordert, daß die Gesamtprofitrate dem Nominalzinsatz entspricht, impliziert, daß eine relativ hohe (niedrige) Umsatzprofitrate einer niedrigen (hohen) Kapitalrentate entspricht. Im allgemeinen herrscht im intertemporalen Gleichgewicht somit eine nichtuniforme Umsatzprofitrate. Gibt also die Umsatzprofitrate den auf die „Produktivität“ des Kapitals und die Kapitalrente den auf die relative Knappheit des Kapitals entfallenden Einkommensanteil an? Aber auch die Umsatzprofitrate kann nicht als Produktivitätsindikator herhalten, da Zähler und Nenner mit jeweils verschiedenen Preisvektoren bewertet werden.

Es gilt für die Umsatzprofitrate im Sektor  $i$

$$(V.17) \quad \hat{\tau}_{it} = \frac{\bar{p}_{it+1} - A_i \bar{p}_{t+1}}{A_i \bar{p}_t} .$$

<sup>20</sup> J. Eatwell; „Competition“, in: Classical and Marxian Political Economy (ed. by: J. Bradley and M. Howard), London 1982, S. 222 f.

<sup>21</sup> M. Morishima; Theory of Economic Growth, O. U. P., 1969, S. 179.

Während im Zähler das Kapital zu Wiederbeschaffungspreisen (Outputpreise) bewertet wird, werden im Nenner die Anschaffungskosten der Kapitalgüter (Inputpreise) zugrundegelegt.

Die neocardianische Definition der Profitrate vermeidet diesen intertemporalen Bewertungseffekt, da das Kapital im Zähler und im Nenner mit den gleichen Preisvektoren bewertet wird. Damit kann die Verteilungsabhängigkeit der relativen laufenden Preise zwar nicht ausgeschaltet werden, der intertemporale Umbewertungseffekt fällt jedoch heraus. Wir wollen daher untersuchen, ob sich auch im intertemporalen Gleichgewicht die neocardianische Profitrate berechnen lässt. Dazu greifen wir auf bereits bekannte Definitionen zurück:

Für den Eigenzinssatz  $\rho_{it}$  von Gut  $i$  in Periode  $t$  gilt:

$$(V.18) \quad (1 + \rho_{it}) = \frac{p_{it}}{p_{it+1}} ,$$

wobei  $p_{it}$  den diskontierten Preis von Gut  $i$  in Periode  $t$  bezeichnet.

Der Geldzinssatz  $i_t$  in Periode  $t$  ist definiert durch

$$(V.19) \quad (1 + i_t) = \frac{\beta_{gt}}{\beta_{gt+1}} ,$$

wobei  $\beta_{gt}$  den Diskontfaktor für den Preis des Numéraireguts in Periode  $t$  darstellt. Für die Preisänderungsrate des laufenden Preises von Gut  $i$  in Periode  $t$ ,  $\delta_{it}$ , gilt:

$$(V.20) \quad (1 + \delta_{it}) = \frac{\bar{p}_{it+1}}{\bar{p}_{it}} ,$$

wobei  $\bar{p}_{it}$  den laufenden (undiskontierten) Preis von Gut  $i$  in Periode  $t$  darstellt.

Zwischen (V.18), (V.19) und (V.20) bestehen folgende Beziehungen:

$$(1 + \rho_{it}) = \frac{p_{it}}{p_{it+1}} = \frac{\beta_{gt}\bar{p}_{it}}{\beta_{gt+1}\bar{p}_{it+1}} = \frac{(1 + i_t)}{(1 + \delta_{it})} ,$$

d. h. es gilt

$$(V.21) \quad (1 + i_t) = (1 + \rho_{it})(1 + \delta_{it}) ,$$

bzw.

$$(V.21') \quad i_t = \rho_{it}(1 + \delta_{it}) + \delta_{it} .$$

Wir haben bereits gezeigt, daß im intertemporalen Gleichgewicht der Geldzinsatz in Periode  $t$ ,  $i_t$ , gleich der Gesamtprofitrate des Sektors  $i$  in Periode  $t$  ist:

$$(V.22) \quad i_t = \tau_{it}$$

Die Gesamtprofitrate ist gleich der Umsatzprofitrate zuzüglich der Kapitalrentrate.

$$(V.23) \quad \tau_{it} = \hat{\tau}_{it} + \pi_{it} .$$

Setzt man (V.21') und (V.23) in (V.22) ein, so gilt im Gleichgewicht:

$$(V.24) \quad \rho_{it}(1 + \delta_{it}) + \delta_{it} = \hat{\tau}_{it} + \pi_{it} .$$

Wir erinnern uns, daß der Eigenzinssatz des Guts  $i$  in Periode  $t$  die *Menge* des Guts  $i$  darstellt, die man in Periode  $t + 1$  im Austausch gegen eine Einheit des Guts  $i$  in Periode  $t + 1$  erhält. Unter der Voraussetzung, daß  $\rho_{it} > 0$  sein soll, muß die Menge von Gut  $i$  in  $t + 1$  größer sein, als die in  $t$ . Ist dieses Gut ein Basisgut im Sinne Sraffas und im engeren Sinne ein Kapitalgut, dann muß der Gesamtoutput des Guts  $i$  in  $t + 1$  so groß sein, daß potentiell auch die Reproduktion von Gut  $i$  sichergestellt ist, d. h. die Produktion von Gut  $i$  muß einen mengenmäßigen, über die Reproduktionserfordernisse hinausgehenden Surplus von Gut  $i$  ermöglichen.

Die Eigenzinsrate kann der Umsatzprofitrate nicht gleichgesetzt werden. Letztere drückt einen wertmäßigen Surplus aus, der nicht auf einen rein mengenmäßigen Überschuß zurückgeführt werden kann, weil sie auch einen intertemporalen Preiseffekt enthält.

Die durch (V.24) gegebene Gleichgewichtsbedingung gibt uns den Hinweis, wie man das produktionswirtschaftliche Korrelat zum Eigenzinssatz des Guts  $i$  in Periode  $t$  erhält. Zieht man von der Summe von Umsatzprofitrate und Kapitalrentrate des Sektors  $i$  in Periode  $t$  die Preisänderungsrate  $\delta_{it} > 0$  ab und dividiert den gesamten Ausdruck durch den Preisänderungsfaktor<sup>22</sup>, dann ergibt sich:

$$\rho_{it} = \frac{\hat{\tau}_{it} + \pi_{it} - \delta_{it}}{1 + \delta_{it}} .$$

Setzt man für  $\tau_{it}, \pi_{it}, \delta_{it}$  die in (V.17), (V.8) und (V.20) definierten Größen ein, dann ergibt sich

$$\rho_{it} = \frac{\frac{\bar{p}_{it+1} - A_i \bar{p}_{t+1}}{A_i \bar{p}_t} + \frac{A_i (\bar{p}_{t+1} - \bar{p}_t)}{A_i \bar{p}_t} - \frac{\bar{p}_{it+1} - \bar{p}_{it}}{\bar{p}_t}}{\frac{\bar{p}_{it+1}}{\bar{p}_{it}}} .$$

Löst man diesen auf den ersten Blick verwirrenden Ausdruck auf, dann erhält man:

$$(V.25) \quad \rho_{it} = \frac{\bar{p}_{it}}{A_i \bar{p}_t} - 1 .$$

---

<sup>22</sup> Hierbei handelt es sich um den an früherer Stelle erwähnten „Deflator“.

Die rechte Seite von (V.25) ist nichts anderes als die in Periode  $t$  herrschende neoricardianische Profitrate  $r_{it}$  im Sektor  $i$ .

Sind die Eigenzinssätze der verschiedenen Güter in Periode  $t$  nicht uniform, dann ist auch die in den verschiedenen Sektoren herrschende neoricardianische Profitrate in Periode  $t$  nicht uniform, obwohl die neoklassische Gesamtprofitrate in Periode  $t$  in allen Sektoren gleich dem Geldzinssatz und damit uniform ist. Das neoklassische Periodengleichgewicht erweist sich aus neoricardianischer Perspektive als ein Ungleichgewicht, denn unter Konkurrenzbedingungen ist eine unterschiedliche sektorale Profitabilität des Kapitals langfristig nicht vorstellbar. Im Konkurrenzprozeß muß es zu einer Angleichung der Profitraten und damit notwendigerweise zu einer Angleichung der Eigenzinssätze der Güter kommen.

Die Konvergenz zum langfristigen Gleichgewicht und damit die Herausbildung einer uniformen Profitrate erfolgt im Prinzip durch die Elimination von Kapitalrenten. Diese ergeben sich aus der Struktur der laufenden intertemporalen Preise, die selbst wiederum durch die Nachfrage (Konsumnachfrage und technologisch bedingte Nachfrage), die Technologie und die Anfangsbestände bestimmt wird. In der Basisperiode trifft die Konsumnachfrage und die aus zukünftigen Konsumnachfragen abgeleitete Nachfrage nach Inputs für die folgende Periode auf die zufälligen und fixen Anfangsbestände. Die daraus resultierenden Preise müssen die „Knappheiten“ reflektieren. Gegenüber dem exogen gegebenen Geldzinssatz (= Eigenzinsatz des Numéraires) wird der Eigenzinssatz einiger Güter größer, der anderer Güter kleiner als der Geldzinssatz sein. Da andererseits jeder Produzent seine Produktion nur soweit ausdehnt, bis die Gesamtprofitrate gleich dem Geldzinssatz ist, muß der Gesamtgewinn von Produzenten, die ein Gut mit niedriger Eigenzinsrate produzieren, positive Kapitalrenten enthalten, während bei den anderen negative Kapitalrenten im Gesamtgewinn enthalten sind. Diese positive oder negative Kapitalrenten reflektieren die durch die Anfangsbestände bedingten „Knappheiten“.

Wird in Prozessen mit positiven Kapitalrenten die Produktion erhöht und in solchen mit negativen Kapitalrenten reduziert, dann werden die Preise der Güter, die durch expandierende Prozesse produziert werden, relativ zu denen, deren Produktion kontrahiert, fallen. Die Eigenzinssätze der Güter, deren Preise relativ fallen, werden ansteigen, und die Eigenzinssätze der Güter, deren Preise relativ steigen, werden fallen. Dadurch reduziert sich der positive bzw. negative Anteil der Kapitalrenten am Gesamtprofit. Von Periode zu Periode werden die Kapitalrenten, positive wie negative, abgebaut, und damit einher geht die Reduktion des Einflusses der „Knappheiten“. Je geringer diese „Knappheiten“ werden, desto geringer werden die Preisänderungen, denen die Kapitalrenten auf der Verteilungsseite korrespondieren. Sind alle Kapitalrenten eliminiert, gibt es keine endogene Ursache für Preisänderungen von Periode zu Periode. Inputpreise sind dann gleich den Outputpreisen und die Profitrate ist uniform in allen Prozessen.

Dieser stilisierte Anpassungsprozeß läßt sich auch als Anpassung der Eigenzinssätze und Preisänderungsraten der laufenden Preise an den Geldzinssatz auffassen. Ohne eine Theorie der Preisbestimmung des Numéraires ist der Geldzinssatz nicht

als theorieendogen, sondern nur als exogen bestimmt anzusehen. Bei gegebenem Geldzinssatz  $i_t$  folgt aus (V.21')

$$i_t = \rho_{it}(1 + \delta_{it}) + \delta_{it} ,$$

daß die Preissteigerungsrate der laufenden Preise umso größer (kleiner) sein muß, je geringer (größer) die Eigenzinsrate des Guts ist.

In einem Modell, das Produktion und Akkumulation berücksichtigt, spiegelt die Veränderung der Eigenzinssätze die Mengenentwicklung wider, während die Preisänderungsrate die Reaktion der laufenden Preise anzeigt, wenn am Ende einer Periode, d. h. am Markttag, die Konsumnachfrage und die Nachfrage des Inputs auf die produzierten Outputs der gerade abgelaufenen Periode treffen. Dieser Output ist als Bestand aufzufassen, da am Markttag eine Outputvariation nicht möglich ist. Somit findet am Markttag eine reine Preisangepassung statt. Die erzielten Preise führen, wenn man sich nicht bereits im langfristigen Gleichgewicht befindet, zu einer anders strukturierten Produktion in der folgenden Periode, d. h. zu einer Mengenänderung. Sind der Geldzinssatz und die Anfangsausstattungen beliebig vorgegeben, dann gibt es am „ersten“ Markttag nur Preisangepassung, d. h. die Kapitaleinkommen bestehen nur aus Kapitalrenten, da noch keine Produktion stattgefunden hat. Der Teil der Anfangsausstattungen, der nicht konsumiert wird, steht als Input für die Produktion der folgenden Periode zur Verfügung. Indem die Kapitalrenten die relativen Knappheiten signalisieren, wird die Produktion in Bereiche mit hohen Gewinnchancen gelenkt. Im Zuge der Anpassung der Produktion an die „Knappheiten“ passen sich die Eigenzinssätze als Ausdruck der Mengenentwicklung an. Die periodischen Preisänderungen werden geringer, und die  $\delta_{it}$  werden betragsmäßig kleiner. Die Kapitalrenten verschwinden, und die sich einstellenden Eigenzinssätze sind uniform und gleich dem exogen fixierten Geldzinssatz.

So gesehen besteht eine frappierende Ähnlichkeit dieser Theorie mit der von Keynes in der *Treatise on Money* entwickelten Theorie des Preisniveaus. In Erweiterung einer Theorie des Numéraires passen sich in der hier vorgestellten Version die Eigenzinssätze an den Geldzinssatz an. Die Anpassung des Geldzinssatzes an den realen Zinssatz (Wicksell) ist schwer vorstellbar, den es gibt in jeder Periode soviele Eigenzinssätze wie Güter und keinen „realen“ Zinssatz.

Die Ähnlichkeit des intertemporalen Gleichgewichtskonzepts mit dem des kurzfristigen Gleichgewichts der *Treatise on Money* von Keynes zeigt sich auch in den gesamtwirtschaftlichen Bilanzgleichungen. Wir unterstellen der Einfachheit halber, daß nur zirkulierendes Kapital existiert. Die gesamtwirtschaftlichen Nettoinvestitionen sind somit:

$$(V.26) \quad I_t^n = (\mathbf{k}_{t+1} - \mathbf{k}_t) \bar{\mathbf{p}}_{t+1} .$$

Die gesamtwirtschaftliche Nettoproduktion ist:

$$(V.27) \quad \mathbf{b}_{t+1}'' \bar{\mathbf{p}}_{t+1} = \mathbf{c}_{t+1} \bar{\mathbf{p}}_{t+1} + (\mathbf{k}_{t+1} - \mathbf{k}_t) \bar{\mathbf{p}}_{t+1} ,$$

bzw.

$$(V.27') \quad P_t^n = C_{t+1} + I_t^n ,$$

wobei  $P_t^n$  den Nettoproduktionswert,  $C_t + 1$  den Konsum und  $I_t^n$  die Nettoinvestitionen bezeichnet.

Wenn der Lohn nachgeschossen wird und nicht Bestandteil des Inputvektors  $\mathbf{a}$  ist, dann folgt aus dem Preissystem:

$$(V.28) \quad \mathbf{b}_{t+1} \bar{\mathbf{p}}_{t+1} = (1 + i_t) \mathbf{k}_t \bar{\mathbf{p}}_t + w_t \mathbf{l}_t ,$$

$$(V.28') \quad P_t^b = R_t + G_t + W_t ,$$

wobei  $R_t$  die Vorleistungen,  $G_t$  den Gesamtgewinn und  $W_t$  die Lohnsumme bezeichnet.

Zieht man vom Bruttonproduktionswert die Vorleistungen ab, so ergibt sich der Nettoproduktionswert, der in diesem Fall gleich dem Nettosozialprodukt am Ende der Periode  $t$  ist.

$$(V.29) \quad Y_{t+1}^n = P_t^b - R_t = P_t^n .$$

Im Unterschied zu Malinvaud nehmen wir an, daß die im Gesamtgewinn  $G$  enthaltenen Kapitalrenten nicht an die Haushalte verteilt werden. Das Volkseinkommen  $Y_{t+1}^{nf}$  ist somit

$$(V.30) \quad Y_{t+1}^n - Q_t = Y_{t+1}^{nf} = G_t - Q_t + W_t .$$

Das Volkseinkommen kann gespart oder konsumiert werden:

$$(V.31) \quad Y_{t+1}^{nf} = C_{t+1} + S_{t+1} .$$

Unter Berücksichtigung von (V.29) und (V.30) gilt

$$(V.32) \quad Y_{t+1}^{nf} = P_t^n - Q_t .$$

Unter Berücksichtigung von (V.27'), (V.31) und (V.32) gilt:

$$C_{t+1} + S_{t+1} = C_{t+1} + I_t^n - Q_t ,$$

so daß

$$(V.33) \quad S_{t+1} + Q_t = I_t^n$$

gilt. Bei Malinvaud sind die Kapitalrenten nicht im Nettoproduktionswert enthalten. Im Unterschied zu Keynes nimmt er an, daß die Kapitalrenten an die

Haushalte verteilt werden, so daß das Volkseinkommen die Kapitalrenten entält.<sup>23</sup>

In Analogie zu (V.33) ergibt sich bei Malinvaud

$$(V.34) \quad S_{t+1} = I_t^n + Q_t .$$

Malinvaud weist darauf hin, daß es sich bei (V.34) um keine Gleichgewichtsbedingung, sondern um eine buchhalterische Identität handelt, wenn man voraussetzt, daß das Nettovermögen der Haushalte dem Wert der Firmen entspricht.<sup>24</sup>

Für Keynes ist (V.33) mehr als eine ex-post Identität. In der *Treatise* signalisieren positive bzw. negative Kapitalrenten (Quasirenten) ein Ungleichgewicht zwischen Sparen und Investieren.<sup>25</sup> Keynes nahm in der *Treatise* an, die Beseitigung der Kapitalrenten erfolge durch Anpassungen des Preisniveaus. Als er jedoch bemerkte, daß Änderungen im Nominaleinkommen zu Mengen- und damit zu Beschäftigungsänderungen führen, gab er das gleichgewichtstheoretische Konzept der *Treatise* auf.<sup>26</sup> Es ist nämlich durchaus möglich, daß die Elimination der Kapitalrenten und damit die Herausbildung einer langfristigen Gleichgewichtsposition zu rückläufigen Mengen führt, was wiederum eine vorübergehende Freisetzung von Primärfaktoren – z. B. Arbeit – bedeutet.<sup>27</sup>

Es fällt auf – und damit kommen wir zur Ausgangsfrage zurück –, daß Keynes in der *Treatise* das Auftreten von Kapitalrenten als Ungleichgewichtsphänomen deutet. In gleicher Weise läßt sich aus unserer Sicht das neoklassische intertemporale Gleichgewicht als eine Abfolge kurzfristiger Gleichgewichte begreifen, die in Referenz zum neocardianischen langperiodigen Reproduktionsgleichgewicht ein Ungleichgewicht darstellen, weil die Kapitalbestände, die die Wirtschaftssubjekte bei Preisen am Anfang einer Periode halten, verschieden sind von den Beständen, die sie bei geänderten Preisen am Ende einer Periode halten wollen. Erst wenn die Preise dergestalt sind, daß die am Periodenanfang und am Periodenende gehaltenen Bestände übereinstimmen, wird das klassische Stromgrößengleichgewicht nicht mehr von Bestandsänderungen affiziert.

---

<sup>23</sup> Vgl. E. Malinvaud; Capital Accumulation, . . ., a. a. O., S. 256.

Es ist in der Betriebswirtschaftslehre durchaus umstritten, Scheingewinne (capital gains), d. h. Kapitalrenten auszuschütten. Vgl. A. Moxter; Betriebswirtschaftliche Gewinnermittlung, a. a. O., S. 142 ff.

<sup>24</sup> E. Malinvaud; Capital Accumulation . . ., a. a. O., S. 256 FN 27.

<sup>25</sup> Vgl. J. M. Keynes; A Treatise on Money, London 1930, The Collected Economic Writings of J. M. Keynes, Bd. V, London 1971, S. 121 ff.

<sup>26</sup> Zum Übergang von der *Treatise* zur *General Theory* siehe: J. M. Keynes; The Collected Economic Writings of J. M. Keynes, Bd. XIII, London 1971.

<sup>27</sup> Auch bei Duménil und Levy führt die Konvergenz des Preissystems zu einer Schrumpfung im Mengensystem. Ob das Mengensystem schrumpft, hängt im wesentlichen von der intertemporalen Konsumnachfrage und diese wiederum von der Höhe der Zeitpräferenzrate ab.

Aus neoricardianischer Perspektive stellt sich somit die Frage, worin der analytische Vorteil besteht, wenn man, wie die neoklassische intertemporale Gleichgewichtstheorie, ungleichgewichtige Zustände bzw. Pfade, die aus einer Folge kurzperiodiger Gleichgewichte generiert werden, als theoretischen Referenzfall zugrunde legt. Es drängt sich doch der Eindruck auf, daß man aus einer kapitaltheoretischen Not eine methodische Tugend gemacht hat.

#### 4. Alte und neue Parabeln: Burmeisters reguläre Ökonomie

Nachdem Keynes der neoklassischen Theorie die Angebots- und Nachfrage-Parabel über die Funktionsweise des Arbeitsmarkts zerstört hatte, wurde der Neoklassizismus in der kapitaltheoretischen Kontroverse der 60er und 70er Jahre die Unhaltbarkeit ihrer Kapitalmarktparabel, die auf dem Konzept des homogenen Kapitals und der aggregierten Produktionsfunktion beruht, nachgewiesen. Das wurde und wird von Ökonomen, die die intertemporale Gleichgewichtstheorie walrasianischer Prägung als ihr theoretisches Fundament begreifen, bereitwillig konzidet, zumal die intertemporale Gleichgewichtstheorie zu dieser Zeit längst elaboriert war. Außerdem ist sie gegen einen wesentlichen Teil der neoricardianischen Kritik immun, da sie die im wicksellianischen Ansatz enthaltenen Inkonsistenzen vermeidet.

Parabeln stilisieren das allgemeine Erklärungsmuster, mit dessen Hilfe die Bildung von Hypothesen über das zu erklärende Phänomen organisiert wird. So gesehen haben Parabeln einen heuristischen Wert. Daher ist es verständlich, daß sich die walrasianisch orientierten Theoretiker des allgemeinen Gleichgewichts auf die Suche nach einer neuen Parabel machten. Burmeister sieht den Kern der „neuen“ Parabel in der inversen Beziehung zwischen dem pro-Kopf-Konsum und dem Zinssatz.<sup>28</sup> Dahinter steht die Vorstellung, daß eine dauerhaft höhere Wachstumsrate nur durch Konsumverzicht alimentiert werden kann. Sowohl Reswitching als auch negative Wicksell-Effekte führen zu paradoxen Resultaten: Eine relativ niedrige steady-state Profit/Zinsrate kann nicht immer mit einem höheren steady-state pro-Kopf-Konsum assoziiert werden. Aus diesem Grund definiert Burmeister Ökonomen ohne paradoxe Resultate als reguläre Ökonomien.

„Regular economics constitute a subset of the set of alternative technologies. One property of this subset is that paradoxical behavior is excluded.“<sup>29</sup>

Burmeisters Reaktion auf die kapitaltheoretische Kritik der Neoricardianer ist weniger radikal als die von Hahn. Er will das langfristige Gleichgewichtskonzept und den Vergleich von steady-state Gleichgewichtslösungen beibehalten und nicht durch das intertemporale Gleichgewichtskonzept ersetzen. Konsequenterweise muß er Reswitching und negative Wicksell-Effekte ausschließen. Unklar bleibt, in welchem Sinne eine ökonomische Theorie einen Allgemeinheitsanspruch erheben

<sup>28</sup> E. Burmeister; Capital Theory and Dynamics, a. a. O., S. 124 ff.

<sup>29</sup> Ebenda, S. 124.

kann, wenn sie sich auf die sogenannten regulären Fälle beschränkt. Darüber hinaus scheint es mir nicht ganz redlich zu sein, die mit der neoklassischen Theorie verträglichen Fälle als regulär zu klassifizieren, weil damit die unverträglichen Fälle zu irregulären gestempelt werden. Hierbei entsteht leicht der Eindruck, daß das Problem von Regularität und Irregularität durch einen Rückgriff auf die Empirie entschieden werden könne. Da es sich beim Reswitching und bei den Wicksell-Effekten nicht um empirische Phänomene, sondern um aus Prämissen deduzierte logische Sachverhalte handelt, kann die Empirie keine Grundlage für eine Diskriminierung liefern. Ein logisch-konzeptionelles Problem kann nicht durch einen Rückgriff auf empirische Evidenz gelöst werden.<sup>30</sup>

---

<sup>30</sup> Die Ablösung des ptolemäischen Systems durch das heliozentrische kann nicht durch den Rekurs auf empirische Beobachtungen erklärt werden. Erst konzeptionelle Änderungen (Standpunkt des „Beobachters“ in der Theorie der Bewegung) ermöglichen es, die „Irregularitäten“ (Epizyklen) als Zyklen zu erkennen.

## VI. Zusammenfassung und Ausblick

Den Ausgangspunkt der Untersuchung bildete die Auseinandersetzung zwischen den Vertretern der neoklassischen intertemporalen Gleichgewichtstheorie und den Neoricardianern über das ihren Theorien zugrundeliegende Gleichgewichtskonzept. Der Vorwurf der Theoretiker des intertemporalen allgemeinen Gleichgewichts, die neoricardianische Theorie des langperiodigen Gleichgewichts sei ein Spezialfall der neoklassischen Theorie erwies sich im allgemeinen als unhaltbar. Auf der Basis der Turnpike-Theorie konnte der Nachweis geführt werden, daß intertemporale Gleichgewichtspfade bei unendlichem Horizont unter nicht allzu speziellen Voraussetzungen gegen ein allgemeines neoricardianisches Gleichgewicht der langen Periode konvergieren. Der Konvergenzprozeß läßt sich als Elimination von positiven und negativen Kapitalrenten auffassen. Die Existenz von Kapitalrenten selbst muß als Ungleichgewichtsphänomen interpretiert werden. Der scheinbar größere Allgemeinheitsgrad der neoklassischen Theorie wird mit einem ambivalenten Gleichgewichtsbegriff erkauft.

Aus neoricardianischer Sicht ist ein Gleichgewicht ein Ruhezustand, in dem die Akteure keinen Anlaß haben, ihr Verhalten zu ändern, d. h. bei einer uniformen Profitrate gibt es keinen Grund für Kapitalwanderungen. Die gewünschten Kapitalgüterbestände entsprechen den tatsächlich vorhandenen, und der daraus resultierende Einkommensstrom liefert keinen Grund, die Proportionen dieser Bestände zu ändern. Die Akteure der neoricardianischen Ökonomie sind „Unternehmertypen“; die „Haushalte“ bleiben auf ihrer Budgetrestriktion, wobei jedoch die Aufteilung des Budgets auf die verschiedenen Verwendungsmöglichkeiten nicht präferenztheoretisch abgeleitet wird<sup>1</sup>, sondern einer die historischen und kulturellen Umstände berücksichtigenden Erklärung überlassen wird. Die untergeordnete Rolle des „Rationalverhaltens“ der Haushalte (Konsumenten) ist ein Erbe der klassischen Tradition, von dem sich selbst A. Marshall und J. M. Keynes nicht allzu weit entfernten. Gleichgewicht wird damit nicht durch Marktträumung, sondern durch *Verhaltenskonstanz* definiert, d. h. durch die Abwesenheit von Verhaltensänderungen der Akteure. Gleichgewicht ist das Gravitationszentrum der Ökonomie, das erreicht werden könnte, wenn nicht exogene Störungen das Verhalten der Akteure ändern würde.<sup>2</sup> Neben dem klassischen (oder marshallianischen) Gleichgewichtsbegriff gibt es noch das schwedische Gleichgewichtskonzept, das die

<sup>1</sup> Vgl. B. Schefold; On Changes in the Composition of Output, in: Bharadwaj, K. / Schefold, B. (Hrsg.); Essays on Piero Sraffa, London 1990, S. 178 – 203, hier S. 178 – 188.

<sup>2</sup> Vgl. auch E. Schlicht; Der Gleichgewichtsbegriff in der ökonomischen Analyse, Jahrbuch für Sozialwissenschaften, 1982, S. 50 – 63.

korrekte Antizipation der Zukunft betont und damit auf die Übereinstimmung von geplanten und realisierten Größen abstellt. Wird Gleichgewicht indes am Zustand der Marktträumung festgemacht, dann haben wir es mit dem walrasianischen Gleichgewichtsbegriff zu tun. Dieser setzt voraus, daß „Angebot und Nachfrage“ je für sich aus wohldefinierten Handlungsmotiven abgeleitet werden können und daß nur bei den markträumenden Preisen Transaktionen stattfinden. Ex ante-Koordination und Konsistenz der Individualpläne im Aggregat sind die wesentlichen Merkmale des walrasianischen Gleichgewichtsbegriffs. Diese Bedingungen müssen auf allen Ebenen der Analyse erfüllt werden. Zunächst beim Tausch gegebener Anfangsausstattungen, dann im Fall der atemporalen Produktion, die sich auf einen Tausch von Faktordiensten reduzieren läßt und zuletzt in der intertemporalen Betrachtung, die die Analyse der Kapitalbildung und des Wachstums miteinschließt. Auch in diesem komplexen Fall werden die ökonomischen Vorgänge auf das Tauschprinzip zurückgeführt: Gegenwartsgüter tauschen sich gegen Zukunftsgüter. So ist denn die Subsumtion aller ökonomischen Vorgänge unter das Tauschprinzip eines der wesentlichen Merkmale des *walrasianischen* Ansatzes. Schrittweise werden scheinbar diparete Kategorien wie Kapital (produzierte Produktionsmittel), Arbeitslosigkeit, Geld, der Staat und inzwischen auch Institutionen mit dieser Analysemethode behandelt und somit der Erklärungsmethode von „Angebot und Nachfrage“ zugänglich gemacht. Ob man diese Methodik für sinnvoll hält oder nicht, steht auf einem anderen Blatt. Sie ist jedenfalls erfolgreich und zwar in dem Sinne, daß die Mehrheit der akademischen Ökonomen diese Herangehensweise lehren und auch als heuristisches Prinzip in der angewandten Forschung verwenden.

Mit einem dieser Integrationsversuche – dem der Berücksichtigung produzierter Produktionsmittel – haben wir uns ausführlich beschäftigt und dabei festgestellt, daß der walrasianische Ansatz aus analytischen Gründen das Konzept des langperiodigen Gleichgewichts, das er mit der klassischen ökonomischen Theorie teilte, aufgeben mußte und zur temporären bzw. intertemporalen Gleichgewichtsanalyse überging. Die Rekonstruktion des *klassischen* Konzepts des langperiodigen Gleichgewichts im Rahmen der intertemporalen Gleichgewichtsanalyse läßt dieses dann als *steady state* Gleichgewicht wiederauferstehen. Das in der Klassik als allgemeiner Referenzfall oder als Gravitationszentrum aufgefaßte langperiodige Gleichgewicht wird im Rahmen der Allgemeinen Gleichgewichtstheorie zu einem Spezialfall. Denn dieses Gleichgewicht ist mehr als ein Ruhezustand. Die Marktträumungsbedingung erzwingt nämlich, daß sich die relativen Preise solange von Periode zu Periode ändern, bis die am Ende einer Periode vorhandenen (Kapital-) Güterbestände den gewünschten Beständen entsprechen. Die (positiven und negativen) Kapitalrenten resultieren aus den Änderungen der relativen Preise und stellen somit kein dauerhaftes Einkommen dar. Die dauerhafte Einkommenszahlung, der „reine“ gleichgewichtige Kapitalzinssatz (Profitrate) ist nur im langfristigen Gleichgewicht eindeutig bestimmt.

Spezialfall hier, Referenzfall dort: Das klingt haarspalterisch. Der neoklassische Ökonom zieht sich nicht nur auf die kurzperiodige Betrachtung zurück, er hält sie

angesichts einer sich dauernd wandelnden Wirtschaft für die dem Untersuchungsgegenstand angemessenere Methode. Warum sollte man also am Konzept der langperiodigen Analyse festhalten wollen? Ich möchte hierzu nur einige kurze Überlegungen vorstellen.

Eine der zentralen Botschaften der ökonomischen Theorie seit A. Smith ist die These, daß eine Ökonomie mit freier Konkurrenz auf allen Märkten eine so große Selbstregulierungsfähigkeit hat, daß es weder mercantiler Politiken noch eines durch die Zentralverwaltung regulierten Wirtschaftsprozesses bedarf, um den Wohlstand der Nation zu mehren. Die Stabilität des Systems der „natürlichen Freiheit“ spiegelt sich wider in der Stabilität des Systems der „natürlichen“ Preise. Die Konkurrenz sorgt dafür, daß die Marktpreise der Güter um deren „natürliche“ Preise schwanken. Der „natürliche“ Preis wird als Gravitationszentrum der Marktpreise begriffen. Bei Marshall wird aus dem „natürlichen“ Preis der „long period normal price“, und Walras und Wicksell nennen ihn den Gleichgewichtspreis. Erst diese Eigenschaft, d. h. ein dauerhafter Bezugspunkt zu sein, hebt den Gleichgewichtszustand von anderen denkbaren Situationen ab. Langperiodige Gleichgewichte sind nicht durch kalendarische Zeiträume definiert, sondern durch den „Grad der Endogenisierung“. Bei Marshall wird das sehr deutlich. In der temporären Analyse ist das Angebot eines (produzierbaren) Guts (Fisch) virtuell fixiert; in der kurzperiodigen Analyse ist der physische Kapitalstock (Zahl der Boote), mit dem das Gut produziert werden kann, virtuell konstant gesetzt, wobei die Produktion des Guts (in Grenzen) variiert werden kann. In der langperiodigen Analyse kann der Kapitalstock variiert werden. Somit ist in der temporären Analyse der (Markt-) Preis des Guts endogen, die Produktionskosten einschließlich der Faktorpreise von Arbeit und Kapital sind hingegen exogene Variable. In der kurzperiodigen Analyse werden nun ein Teil der Produktionskosten endogen, wobei jedoch die Produktionskosten des Kapitals und damit dessen Faktorpreis eine exogene Variable bleiben. In der langperiodigen Analyse werden dann auch diese Variablen endogenisiert. Je höher der Grad der Endogenisierung, desto interessanter ist die Frage nach den Selbstregulierungseigenschaften. Denn bei einem niedrigen Grad der Endogenisierung braucht man auf Stabilitätseigenschaften erst gar nicht zu achten, weil prinzipiell endogene Variable hypothetisch konstant gesetzt sind. Ihre *tatsächliche* Variation läßt den temporären oder transitorischen Charakter des Zustands deutlich werden. Transitorische Zustände können jedoch nicht als Gravitationszentren angesehen werden.

Es fällt auf, daß in der zentralen Frage der Zinssatz- bzw. Profitratenbestimmung die neoklassische Theorie des intertemporalen Gleichgewichts so offen wie die neoricardianische Theorie ist. Formal gesehen, fehlt in beiden Modellen eine Gleichung zur Bestimmung des Zinssatzes bzw. der Profitrate. Die Schließung der Modelle wird jedoch wesentlich durch die unterschiedlichen Gleichgewichtsbegriffe präjudiziert, so daß sich aus den konkurrierenden Theorieansätzen unterschiedliche Forschungsprogramme ergeben. Darin liegt die eigentliche Bedeutung der Auseinandersetzung zwischen neoklassischer und neoricardianischer Allge-

meiner Gleichgewichtstheorie. Für die neoklassische Allgemeine Gleichgewichtstheorie liegt der „Forschungs- und Theoriebildungsbedarf“ in der Theorie des Geldzinssatzes. Deshalb war und ist es in zweifacher Hinsicht folgerichtig, das Thema „Geld und allgemeines Gleichgewicht“ zum Forschungsgegenstand zu machen. Zur Bestimmung der diskontierten Preise muß man die Existenz von Zukunftsmärkten für alle Güter voraussetzen. Das ist auch aus neoklassischer Perspektive zugegebenermaßen eine kontrafaktische Annahme. Für Geld hingegen existieren solche Märkte. Gelänge die Integration von Geld in die Allgemeine Gleichgewichtstheorie, hätte man „zwei Fliegen mit einer Klappe geschlagen“. Man könnte auf die Annahme eines vollständigen Systems von Zukunftsmärkten verzichten und hätte eine Theorie des Geldzinssatzes, die es zudem erlaubt, diskontierte in laufende Preise zu transformieren.<sup>3</sup> Nun gilt für Geld wie auch für Kapitalgüter, daß man sie nicht um ihrer selbst Willen begehrte. Integriert man Geld in das Modell mit endlichem Horizont, stellt sich analog zum Kapitalproblem die Frage, warum ein Wirtschaftssubjekt am Periodenende (doomsday) noch Geld halten sollte? Geld muß somit am Periodenende auf die gleiche wundersame Weise verschwinden, wie es am Anfang der Betrachtung in den Anfangsbeständen auftaucht. Außer dem unsäglichen „Helikopter“ muß jetzt auch noch der „Staubsauger“ bemüht werden. In der Endperiode muß Geld wertlos sein. Wie aber soll es dann in den Vorperioden einen Wert, d. h. einen Preis haben? Ohne positiven Preis des Geldes in den einzelnen Perioden gibt es auch keinen positiven Eigenzinssatz des Geldes (Geldzinssatz). Wiederum erweist sich die Aufhebung der Horizontbeschränkung als hilfreich. Der unendliche Horizont drückt in diesem Fall eine grundlegende Unsicherheit aus, die die Entscheidung in jeder Periode Geld zu halten (d. h. nachzufragen) plausibel macht.

Neben dieser Forschungsrichtung, die sich im wesentlichen auf Modelle mit überlappenden Generationen stützt, gibt es auch Ansätze zu einer Integration von intertemporaler Allgemeiner Gleichgewichtstheorie und Turnpike Theorie.<sup>4</sup> Diese Entwicklung ist für mich schwer zu beurteilen, weil sie den Rahmen meiner Kenntnisse der Topologie und Funktionalanalysis weit überschreitet. Anzumerken bleibt allerdings, daß in diesen Integrationsansätzen neben der traditionellen Turnpike-Theorie dem Konzept des rekursiven Nutzens eine herausragende Bedeutung zukommt. Mit Hilfe des Konzepts einer rekursiven Nutzenfunktion bzw. Nutzenfunktional wird es möglich, die Zeitpräferenzrate als endogen determinierte Variable zu begreifen. Vereinfacht ausgedrückt heißt das, daß die „felicity function“ nicht mit einer konstanten Zeitpräferenzrate, sondern mit einer Diskontierungsfunktion abgezinst wird<sup>5</sup>, wobei die Diskontierungsfunktion im Prinzip die gleichen Argumente aufweist, wie die „felicity function“. Damit hängt der Diskont-

<sup>3</sup> Vgl. C. Bliss; Capital Theory and Distribution of Income, Amsterdam 1975, S. 57 ff.

<sup>4</sup> Vgl. T. Bewley; An Integration of Equilibrium Theory and Turnpike Theory, Journal of Mathematical Economics (10) 1982, S. 233 – 267.

<sup>5</sup> Vgl. R. A. Becker, J. H. Boyd, B. Y. Sung; Recursive Utility and Optimal Capital Accumulation, I. Existence., Journal of Economic Theory (47), 1989, S. 76 – 100, hier: S. 80 – 81.

faktor in jedem Zeitpunkt vom Konsumpfad selbst ab. Die Diskontrate ist somit pfadabhängig, und zwar von dem Teil des Pfads, der vom Betrachtungszeitpunkt aus gesehen in der Zukunft liegt. Inwieweit eine endogenisierte Zeitpräferenzrate mit der traditionell neoklassischen Vorstellung gegebener Präferenzen – dazu zählt auch die Zeitpräferenz – verträglich ist und inwieweit die neoklassische Allgemeine Gleichgewichtstheorie damit eine ihrer zentralen Prämissen preisgibt, vermag ich gegenwärtig nicht zu beurteilen. Auf jeden Fall sind die vorläufigen Ergebnisse eher für das neoricardianische Forschungsprogramm ermutigend, denn es wird gezeigt, daß sich die Zeitpräferenzrate an eine sich herausbildende uniforme Profitrate anpaßt und nicht umgekehrt.

Andere Probleme hat das aus dem neoricardianischen Ansatz folgende Forschungsprogramm zu lösen. Das dem Forschungsprogramm zugrundeliegende Konzept des langperiodigen Gleichgewichts ermöglicht die Bestimmung von Produktionspreisen, die, werden sie realisiert, die Reproduktion bzw. erweiterte Reproduktion der Ökonomie gewährleisten. Damit bleibt der Prozeß der Marktpreisbildung ausgeblendet. Diese „Lücke“ wird mit Hilfe von Modellen geschlossen, in denen die Konvergenz der Marktpreise zu den Produktionspreisen analysiert wird.<sup>6</sup> Dabei ist hervorzuheben, daß die Marktprozesse nicht analog dem walrasianischen Tatonnement behandelt werden. Die Grundidee besteht vielmehr in einer Modellierung des Profitratenausgleichs durch Elimination von übernormalen Gewinnen und Verlusten. Behält man dabei das sowohl im von Neumann-Modell wie auch in Modellen der neoklassischen Allgemeinen Gleichgewichtstheorie rückwärts gerichtete Mengensystem bei<sup>7</sup>, wird die Investition zu einer Residualgröße, denn die Investitionen der Periode  $t$  ergeben sich als Differenz zwischen dem Output am Ende von  $t$ , d. h. am dem Markttag mit dem die Periode  $t+1$  beginnt und dem Konsum am Markttag  $t+1$ , d. h.

$$\mathbf{b}_{t+1} - \mathbf{c}_{t+1} = \mathbf{k}_{t+1} .$$

Da die Investitionen definiert sind durch

$$I_t = (\mathbf{k}_{t+1} - \mathbf{k}_t) \mathbf{p}_{t+1} .$$

gilt somit

$$I_t = (\mathbf{b}_{t+1} - \mathbf{c}_{t+1} - \mathbf{k}_t) \mathbf{p}_{t+1} ,$$

---

<sup>6</sup> Vgl. I. Kubin; Neoricardianische Gleichgewichtsmodelle und Änderungen in der Zusammensetzung der Endnachfrage, a. a. o. I. Steedman; Natural Prices, Differential Profit Rates and the Classical Competitive Process, The Manchester School, 1984, S. 123 – 140. P. Flaschel und W. Semmler; Classical and neoclassical Competitive Processes, The Manchester School, 1987. R. Franke; Production Prices and Dynamical Processes of the Gravitation of Market Prices, Ffm. 1987. G. Dumenil und D. Lévy; The Dynamics of Competition: A Restoration of the Classical Analysis, Cambridge Journal of Economics, 1987, S. 133 – 164.

<sup>7</sup> Der Begriff des rückwärts gerichteten Systems geht zurück auf Nikaido. Vgl. H. Nikaido; Some Dynamic Phenomena in the Leontief Model of Reversely Lagged Type, Review of Economic Studies, 1962, S. 313 – 323.

d. h. die intertemporale Konsumallokation determiniert die Investitionshöhe, da  $k_t$  am Markttag  $t + 1$  einen „historisch“ gegebenen Bestand darstellt, der irreversibel ist. Ökonomen, die sich dem neocardianischen Forschungsprogramm verpflichtet fühlen, kommen daher nicht umhin, diesem Problem Aufmerksamkeit zu schenken, zumal sie sich im Rahmen der kurzfristigen Analyse des Marktprozesses gerne Keynescher Argumente bedienen. In diesem Fall ist die Investition die unabhängige Variable, die den einkommensabhängigen Konsum via Multiplikator zur abhängigen Variablen werden läßt.

Modelliert man die Mengenseite „vorwärts gerichtet“, d. h.

$$\mathbf{q}_{t+1} = \mathbf{q}_t \mathbf{A} + \mathbf{d}_t ,$$

muß beachtet werden, daß die Elemente von  $\mathbf{A}$  im Prinzip nicht mehr als technische Inputkoeffizienten und die Aktivitätsniveaus nicht als Mengen bzw. dimensionslose Zahlen interpretiert werden dürfen. Bei den  $(a_{ij}) = \mathbf{A}$  handelt es sich um Ausgabenanteile und  $\mathbf{q}_t$  sind die Ausgaben der Industrien für Vorleistungen in Periode  $t$ . Der Vektor  $\mathbf{d}_t$  stellt die Endnachfrage nach Konsum- und Investitionsgütern dar. Ohne eine Theorie des Niveaus und der Struktur der Endnachfrage bleibt das Mengensystem unbestimmt, es sei denn,  $\mathbf{d}_t$  wird exogen vorgegeben. Diese offene Flanke des Mengensystems hat bisher nur Schefold ausführlich thematisiert.<sup>8</sup> Dabei hat er sein Augenmerk vornehmlich auf die Struktur der Konsumnachfrage gerichtet. Offen bleibt, wodurch das Niveau und die Struktur der Investitionen bestimmt werden.

Zur Modellierung der kurzen Periode öffnet sich die neocardianische Theorie sowohl in theoretischer als auch in methodischer Hinsicht. So gesehen, steht im neocardianischen Forschungsprogramm die Strenge des Gleichgewichtsbegriffs in einem eigentümlichen Kontrast zur methodischen Offenheit. Das methodische Konzept von Angebot und Nachfrage bleibt damit nur im Rahmen der kurzperiodigen und der temporären Gleichgewichtsanalyse anwendbar. Hier stehen Probleme der Auslastung gegebener Ressourcen (z. B. Auslastung gegebener Produktionskapazitäten, Beschäftigung eines gegebenen Arbeitskräftepotentials) und Probleme der Marktpreisbildung im Zentrum. Der emphatische Anspruch der neoklassischen Theorie des Allgemeinen Gleichgewichts, mit diesem Konzept ein einheitliches und universell anwendbares Prinzip der Erklärung entwickelt zu haben, kann zumindest bei dem gegenwärtigen Stand der Theorie nicht eingelöst werden. Denn gerade für das Konzept des langperiodigen Gleichgewichts sind die intertemporalen Modelle in kapitaltheoretischer Hinsicht nicht die gesicherte Grundlage als die sie oft dargestellt werden.

<sup>8</sup> B. Schefold; On Changes in the Composition of Output, in: K. Bharadwaj und B. Schefold (Hrsg.); Essays on P. Sraffa, a. a. O., S. 178 – 203.

## Literaturverzeichnis

- Åkerman*, G.: *Realkapital und Kapitalzins*, Heft 1 u. 2, Stockholm 1923/24.
- Becker*, R. A. / *Boyd*, J. H. / *Sung*, B. Y.: Recursive Utility and Optimal Capital Accumulation, I. Existence, *Journal of Economic Theory*, 1989, S. 76 – 100.
- Bewley*, T.: An Integration of Equilibrium Theory and Turnpike Theory, *Journal of Mathematical Economics*, 1982, S. 233 – 267.
- Bharadwaj*, K. / *Schefold*, B. (Hrsg.): *Essays on Piero Sraffa*, London 1990.
- Bliss*, C.: *Capital Theory and Distribution of Income*, Amsterdam 1975.
- Bradley*, J. / *Howard*, M. (Hrsg.): *Classical and Marxian Political Economy*, London 1982.
- Brown*, M. / *Sato*, K. / *Zarembka*, P. (Hrsg.): *Essays in Modern Capital Theory*, Amsterdam / New York / Oxford, 1976.
- Burmeister*, E.: *Capital Theory and Dynamics*, Cambridge 1980.
- Caspari*, V.: *Walras, Marshall, Keynes*, Berlin 1989.
- Cass*, D.: On Capital Overaccumulation in the Aggregative Neoclassical Model of Economic Growth: A complete Characterization, *Journal of Economic Theory*, 1972, S. 200 – 223.
- Cassel*, G.: *Theoretische Sozialökonomie*, 5. Aufl, Leipzig, 1932.
- Dana*, R. A / *Florenzano*, M. / *LeVan*, C. / *Lévy*, D.: Production Prices and General Equilibrium Prices, *Journal of Mathematical Economics*, 1989, S. 263 – 280.
- Debreu*, G.: The Coefficient of Resource Utilization, *Econometrica*, 1951, S. 273 – 292.  
– Werttheorie, Berlin / Heidelberg 1976, englische Ausgabe New York 1959.
- Dixit*, A.: The Accumulation of Capital Theory, *Oxford Economic Papers*, 1977, S. 1 – 29.
- Duménil*, G. / *Lévy*, D.: The Classicals and the Neoclassicals: A rejoinder to Frank Hahn, *Cambridge Journal of Economics*, 1985, S. 327 – 345.  
– The Dynamics of Competition: A restoration of the classical analysis, *Cambridge Journal of Economics*, 1987, S. 133 – 164.
- Eatwell*, J.: Scarce and Produced Commodities, Ph.D.-thesis, Harvard University, Cambridge (Mass.), 1975.  
– „Competition“, in: *Bradley*, J. / *Howard*, M. (Hrsg.), *Classical and Marxian Political Economy*, London 1982,
- Faber*, M. (Hrsg.): *Studies in Austrian Capital Theory, Investment and Time*, Berlin / Heidelberg / New York 1986.
- Fisher*, I.: *Appreciation and Interest*, American Economic Association Publications, Bd. 3, S. 331 – 442, (1896), Reprint, A. M. Kelley, New York 1961.

- *Appreciation and Interest*, (Reprint: Kelley), New York 1991.
  - *The Theory of Interest*, New York 1930.
- Flaschel, F. / Semmler, W.*: Classical and Neoclassical Competitive Process, The Manchester School, 1987.
- Franke, R.*: Production Prices and Dynamical Processes of the Gravitation of Market Prices, Frankfurt am Main 1987.
- Gale, D.*: The Theory of Linear Economic Models, New York 1960.
- Garegnani, P.*: Il Capitale nelle Teorie della Distribuzione, Mailand, 1960.
- On a change in the notion of equilibrium in recent work on value and distribution, in: Brown, M. / Sato, K. / Zarembka, P. (Hrsg.); Essays in Modern Capital Theory, Amsterdam / New York / Oxford, 1976, S. 25 – 45.
  - Kapital, Einkommensverteilung und effektive Nachfrage, Marburg 1989
- Gröbner, W.*: Matrizenrechnung, Mannheim 1966.
- Hahn, F.*: The neo-Ricardians, Cambridge Journal of Economics, 1982 S. 353 – 374.
- Hansen, B.*: A Survey of General Equilibrium Systems, New York 1970.
- Hansson, B. A.*: The Stockholm School and the Development of Dynamic Method, London 1982.
- Hayek, F. A. v.*: Money and Capital: a reply to Mr. Sraffa, Economic Journal, 1932, S. 237 – 249.
- Hicks, J. R.*: Value and Capital, Oxford 1939, zweite Auflage 1946.
- Capital and Growth, Oxford 1965.
  - Methods of Dynamic Economics, Oxford 1985.
- Huth, Th.*: Kapital und Gleichgewicht, Marburg 1989.
- Intriligator, M. D.*: Mathematical Optimization and Economic Theory, Englewood Cliffs, N.J. 1971
- Kemeny, J. G. / Morgenstern, O. / Thompson, G. L.*: A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding Economy, Econometrica 1956, S. 115 – 135.
- Keynes, J. M.*: A Treatise on Money, London 1930.
- The General Theory of Employment, Interest and Money, London 1936.
- Koopmans, T. C.*: Three Essays on the State of Economic Science, New York / Toronto / London 1957.
- Stationary Ordinal Utility and Impatience, Econometrica, 1960, S. 287 – 309.
  - On the Concept of Optimal Economic Growth, in: Scientific Papers of T. C. Koopmans, Dordrecht 1970, S. 485 – 545.
  - Scientific Papers of T. C. Koopmans, Dordrecht 1970.
- Kubin, I.*: Neoricardianische Gleichgewichtsmodelle und Änderungen in der Zusammensetzung der Endnachfrage, Marburg 1989.

- Kuenne*, R. E.: Money, Capital and Interest in intertemporal General Equilibrium Theory, *Economie appliquée*, 1977, S. 617–638.
- Kurz*, H. D.: Sraffa's Contribution to the Debate in Capital Theory, *Contributions to Political Economy*, 1985, S. 3–24.
- Kurz*, H. D. / *Salvadori*, N.: Von Neumann's Growth Model and the 'Classical' Tradition, in: *The European Journal for the History of Economic Thought*, 1993, S. 129–160.
- Kurz*, M.: Tightness and Substitution in the Theory of Capital, *Journal of Economic Theory*, 1969, S. 244–272.
- Lindahl*, E.: Prisbildningsproblemets uppläggning från kapitalteoretisk synpunkt, *Ekonomisk Tidskrift*, 1929.
- Studies in the Theory of Money and Capital, New York 1939.
- Lowe*, A.: The Classical Theory of Economic Growth, *Social Research*, 1954, S. 127–158.
- Majumdar*, M.: Efficient Programmes in Infinite-Dimensional Spaces: A Complete Characterization, *Journal of Economic Theory*, 1974, S. 355–369.
- Malinvaud*, E.: Capital Accumulation and Efficient Allocation of Resources, *Econometrica*, 1953, S. 233–268.
- Efficient Capital Accumulation: A Corrigendum, *Econometrica* 1962, S. 570–573.
- Lectures on Microeconomic Theory, North-Holland 1972.
- v. *Mangoldt-Knopp*: Einführung in die höhere Mathematik, 15. Aufl., Stuttgart 1974.
- Mauer*, L. J.: The Patinkin Controversy: A Review, *Kyklos*, 1966, S. 299–314.
- McFadden*, D.: The Evaluation of Development Programmes, *Review of Economic Studies*, 1967, S. 25–50.
- An Example of the Non-Existence of Malinvaud Prices in a Tight Economy, *Journal of Mathematical Economics*, 1975, S. 17–19.
- Mitra*, T. / *Majumdar*, M.: A Note on the Rule of the Transversality Condition in Signalling Capital Overaccumulation, *Journal of Economic Theory*, 1976, S. 47–57.
- Moeschlin*, O.: Zur Theorie von Neumannscher Wachstumsmodelle, Berlin / Heidelberg 1974.
- Morishima*, M.: Equilibrium, Stability and Growth, Oxford 1964.
- Theory of Economic Growth, Oxford 1969.
- Moxter*, A.: Betriebswirtschaftliche Gewinnermittlung, Tübingen 1982.
- Nikaido*, H.: Some Dynamic Phenomena in the Leontief Model of Reversely Lagged Type, *Review of Economic Studies*, 1962, S. 313–323.
- Nuti*, M. D.: On Rates of Return on Investment, *Kyklos*, 27, 1974, S. 345–369, wiederaufgedruckt in: *Brown*, M. / *Sato*, K. / *Zarembska*, P. (Hrsg.); *Essays in Modern Capital Theory*, Amsterdam / New York / Oxford, 1976, S. 47–69.
- Peleg*, B. / *Yaari*, M. E.: Efficiency Prices in an Infinite-Dimensional Space, *Journal of Economic Theory*, 1979, S. 41–85.

- Radner, R.:* Efficiency Prices for Infinite Horizon Production Programmes, *Review of Economic Studies*, 1967, S. 51 – 66.
- Ramsey, F. P.:* A Mathematical Theory of Saving, *Economic Journal*, 1928, S. 543 – 559.
- Ricardo, D.:* On the Principles of Political Economy and Taxation, *The Works and Correspondence of David Ricardo*, herausgegeben von P. Sraffa, Vol. 1, Cambridge 1951.
- Robinson, J.:* The Production Function and the Theory of Capital, *Review of Economic Studies*, 1953/54, S. 107 – 11.
- The Production Function, *Economic Journal*, 1955, S. 67 – 71.
- Samuelson, P. A.:* An exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money, *Journal of Political Economy*, 1958, S. 467 – 482.
- Schefold, B.:* On Counting Equations, *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 1978, S. 253 – 285.
- Von Neumann and Sraffa: Mathematical Equivalence and Conceptual Difference, *Economic Journal*, 1980, S. 140 – 156.
  - On Changes in the Composition of Output, in: Bharadwaj, K. / Schefold, B. (Hrsg.), *Essays on Piero Sraffa*, London 1990, S. 178 – 203.
  - Comment on Samuelson, in: Bharadwaj, K. / Schefold, B. (Hrsg.), *Essays on Piero Sraffa*, London 1990, S. 301 – 317.
  - Joint Production, Intertemporal Preferences and Long Period Equilibrium: A Comment on Bidard, *Political Economy. Studies in the Surplus Approach*, 1990, S. 139 – 163.
- Schlicht, E.:* Der Gleichgewichtsbegriff in der ökonomischen Analyse, *Jahrbuch für Sozialwissenschaft*, 1982, S. 50 – 63.
- Schlesinger, K.:* Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre, in: *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Heft 6, Leipzig / Wien 1933/34.
- Sraffa, P.:* Dr. Hayek on Money and Capital, *Economic Journal*, 1932.
- A Rejoinder, *Economic Journal*, 1932, S. 249 – 251.
- Steedman, I.:* Natural Prices, Differential Profit Rates and the Classical Competitive Process, *The Manchester School*, 1984, S. 123 – 140.
- Stephan, G.:* Preise und Zinsen in Modellen mit unendlichem Horizont, Frankfurt a.M. 1980.
- Roundaboutness, nontightness and Malinvaud prices in multisectoral models with infinite horizon, in: M. Faber (Hrsg.), *Studies in Austrian Capital Theory, Investment and Time*, Berlin / Heidelberg / New York 1986, S. 154 – 172.
- Swan, T. W.:* Economic Growth and Capital Accumulation, *Economic Record*, 1956, S. 343 – 361.
- Takayama, A.:* Mathematical Economics, 2.Ed. Cambridge University Press, 1985
- Uhr, C. G.:* Economic Doctrines of Knut Wicksell, Berkley / Los Angeles 1960.
- Wald, A.:* Über einige Gleichungssysteme der mathematischen Ökonomie, *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 1936, S. 637 – 670.
- Walras, L.:* Elements of Pure Economics, Homewood (Ill.), 1954.

- Weintraub, E. R.:* On the Existence of a Competitive Equilibrium: 1930 – 1954, *Journal of Economic Literature*, 1983, S. 1 – 39.
- Weizsäcker, C. C. von:* Existence of Optimal Programmes of Accumulation for an Infinite Time Horizon, *Review of Economic Studies*, 1965, S. 85 – 104.
- Wicksell, K.:* Vorlesungen über Nationalökonomie, 2 Bände, Jena 1913.
- *Realkapital och Kapitalränta*, *Ekonomisk Tidskrift*, 1923.
  - *Lectures on Political Economy*, Band 1, London 1934.
  - *Value, Capital and Rent*, London 1954.